MO417 — Complexidade de Algoritmos I — 2s2019

Lista de Exercício 10

Além dos exercícios abaixo, recomendo que façam a maior quantidade possível de exercícios dos livros texto (CLRS e Manber) dos capítulos relacionados.

Questão 1. (Kleinberg and Tardos) Suponha que é dado um grafo G com custos nas arestas positivos. Seja T uma árvore geradora mínima de G. Agora suponha que substituímos o custo cada aresta, c_e, por seu quadrado, c_e^2, criando assim uma nova instância do problema com o mesmo grafo, mas com custos diferentes. Concorde ou discorde: T ainda deve ser uma árvore geradora mínima para a nova instância. Prove ou dê um contraexemplo.

Dica: compare os custos das arestas entre duas árvores geradoras mínimas T e T' para as duas instâncias, respectivamente; por exemplo, se o custo da menor aresta de T é m, quanto deve valer o custo da menor aresta de T'?

Questão 2. Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado com pesos nas arestas e seja F um subgrafo de G que é uma floresta (i.e., F é acíclico). Projete um algoritmo eficiente para encontrar uma árvore geradora em G que contém todas as arestas de F e tem um custo mínimo dentre todas as árvores geradoras que contêm F. Argumente que seu algoritmo está correto e calcule sua complexidade de tempo.

Questão 3. (Skiena) Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado. Um conjunto $F \subseteq E$ de arestas é chamado conjunto de retroalimentação se cada ciclo de G tiver pelo menos uma aresta em F.

- ***(a)*** Suponha que G não seja ponderado. Crie um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de tamanho mínimo.
- ***(b)*** Suponha que G é um grafo não direcionado com pesos positivos nas arestas. Projete um algoritmo eficiente para encontrar um conjunto de retroalimentação de peso mínimo. Argumente que seu algoritmo está correto.

[Observação: Em cada item, argumente porque o algoritmo está correto e sua complexidade.]

Questão 4. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não-orientado com pesos $\omega(u, v)$ associados a cada aresta $(u, v) \in E$. Considere o problema de encontrar uma árvore geradora mínima de (G, ω). Professor B. Smart propôs o seguinte algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima de (G, ω) onde $G = (V, E)$.

```
SMART-AGM(G, ω)
    Ordene E em ordem não crescente de pesos
    H ← G
    Para cada e ∈ E em ordem não crescente de pesos, faça
        Se H − e é conexo,
            então H ← H − e
    Devolva H
```

- ***(a)*** Argumente sucintamente (em poucas linhas) que o grafo obtido é conexo e acíclico.
- ***(b)*** Mostre que se e é uma aresta de G com peso máximo e $G - e$ é conexo, então existe árvore geradora mínima de G que não contém e.
- ***(c)*** Conclua mostrando que o algoritmo está correto.