

Projeto e Análise de Algoritmos*

Algoritmos gulosos

Segundo Semestre de 2019

*Criado por C. de Souza, C. da Silva, O. Lee, F. Miyazawa et al.

A maior parte deste conjunto de slides foi inicialmente preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para cursos de Análise de Algoritmos. Além desse material, diversos conteúdos foram adicionados ou incorporados por outros professores, em especial por Orlando Lee e por Flávio Keidi Miyazawa. Os slides usados nessa disciplina são uma junção dos materiais didáticos gentilmente cedidos por esses professores e contêm algumas modificações, que podem ter introduzido erros.

O conjunto de slides de cada unidade do curso será disponibilizado como guia de estudos e deve ser usado unicamente para revisar as aulas. Para estudar e praticar, leia o livro-texto indicado e resolva os exercícios sugeridos.

Lehilton

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- ▶ Várias pessoas contribuíram **direta ou indiretamente** com a preparação deste material.
- ▶ Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- ▶ Uma lista destes “colaboradores” (**em ordem alfabética**) é dada abaixo:
 - ▶ Célia Picinin de Mello
 - ▶ Flávio Keidi Miyazawa
 - ▶ José Coelho de Pina
 - ▶ Orlando Lee
 - ▶ Paulo Feofiloff
 - ▶ Pedro Rezende
 - ▶ Ricardo Dahab
 - ▶ Zanoni Dias

Algoritmos gulosos

Algoritmos Gulosos: Conceitos Básicos

- ▶ Tipicamente algoritmos gulosos são utilizados para resolver problemas de **otimização**.
- ▶ Uma característica comum dos problemas onde se aplicam algoritmos gulosos é a existência **subestrutura ótima**, **semelhante à programação dinâmica!**
- ▶ **Programação dinâmica**: tipicamente os subproblemas são resolvidos à otimalidade antes de se proceder à **escolha** de um elemento que irá compor a solução ótima.
- ▶ **Algoritmo Guloso**: primeiramente é feita a escolha de um elemento que irá compor a solução ótima e só depois um subproblema é resolvido.

Algoritmos Gulosos: Conceitos Básicos

- ▶ Um algoritmo guloso sempre faz a **escolha** que parece ser a “melhor” a cada iteração usando um **critério guloso**.
É uma decisão localmente ótima.
- ▶ **Propriedade da escolha gulosa**: garante que a cada iteração é tomada uma decisão que irá levar a um ótimo global.
- ▶ Em um algoritmo guloso uma escolha que foi feita **nunca é revista**, ou seja, não há qualquer tipo de *backtracking*.
- ▶ Em geral é fácil projetar ou descrever um algoritmo guloso. O **difícil** é provar que ele funciona!

Seleção de Atividades

- ▶ $S = \{a_1, \dots, a_n\}$: conjunto de n atividades que podem ser executadas em um mesmo local. Exemplo: palestras em um auditório.
- ▶ Para todo $i = 1, \dots, n$, a atividade a_i **começa** no instante s_i e **termina** no instante f_i , com $0 \leq s_i < f_i < \infty$.
Ou seja, supõe-se que a atividade a_i será executada no intervalo de tempo (**semi-aberto**) $[s_i, f_i)$.

Definição

As atividades a_i e a_j são ditas **compatíveis** se os intervalos $[s_i, f_i)$ e $[s_j, f_j)$ são disjuntos.

Problema de Seleção de Atividades

Encontre em S um subconjunto de atividades mutuamente compatíveis que tenha tamanho **máximo**.

Seleção de Atividades

▶ Exemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	4	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

- ▶ Pares de atividades incompatíveis: $(a_1, a_2), (a_1, a_3)$
Pares de atividades compatíveis: $(a_1, a_4), (a_4, a_8)$
- ▶ Conjunto maximal de atividades compatíveis: (a_3, a_9, a_{11}) .
- ▶ Conjunto máximo de atividades compatíveis:
 (a_1, a_4, a_8, a_{11}) .

As atividades estão ordenadas em ordem crescente de instantes de término! Isso será importante mais adiante.

Seleção de Atividades

- ▶ Vimos que tanto os algoritmos gulosos quanto aqueles que usam programação dinâmica valem-se da existência da **propriedade de subestrutura ótima**.
- ▶ Inicialmente verificaremos que o problema da seleção de atividades tem esta propriedade e, então, projetaremos um algoritmo por **programação dinâmica**.
- ▶ Em seguida, mostraremos que há uma forma de resolver uma quantidade **consideravelmente** menor de subproblemas do que é feito na programação dinâmica.
- ▶ Isto será garantido por uma **propriedade de escolha gulosa**, a qual dará origem a um **algoritmo guloso**.
- ▶ Este processo auxiliará no entendimento da diferença entre estas duas **técnicas de projeto de algoritmos**.

Seleção de Atividades

Suponha que $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n$, ou seja, as atividades estão ordenadas em ordem crescente de instantes de término.

Definição

Denote $S_{ij} = \{a_k \in S : f_i \leq s_k < f_k \leq s_j\}$, ou seja, S_{ij} é o conjunto de atividades que começam depois do término de a_i e terminam antes do início de a_j .

- ▶ **Atividades artificiais:** a_0 com $f_0 = 0$ e a_{n+1} com $s_{n+1} = \infty$
- ▶ Tem-se que $S = S_{0,n+1}$ e, com isso, S_{ij} está bem definido para qualquer par (i,j) tal que $0 \leq i, j \leq n+1$.
- ▶ Note que $S_{ij} = \emptyset$ para todo $i \geq j$.
Por quê?

- ▶ **Subestrutura ótima:** considere o *subproblema* da seleção de atividades definido sobre S_{ij} . Suponha que a_k pertence a uma solução ótima de S_{ij} .

Como $f_i \leq s_k < f_k \leq s_j$, uma solução ótima para S_{ij} que contenha a_k será composta pelas atividades de uma solução ótima de S_{ik} , pelas atividades de uma solução ótima de S_{kj} e por a_k .

Por quê?

Seleção de Atividades

- ▶ **Definição:** para todo $0 \leq i, j \leq n + 1$, seja $c[i, j]$ o **valor ótimo** do problema de seleção de atividades para a instância S_{ij} .
- ▶ Deste modo, o valor ótimo do problema de seleção de atividades para instância $S = S_{0, n+1}$ é $c[0, n + 1]$.
- ▶ **Fórmula de recorrência:**

$$c[i, j] = \begin{cases} 0 & \text{se } S_{ij} = \emptyset \\ \max_{i < k < j: a_k \in S_{ij}} \{c[i, k] + c[k, j] + 1\} & \text{se } S_{ij} \neq \emptyset \end{cases}$$

Agora é fácil escrever o algoritmo de programação dinâmica. ([Exercício.](#))

Seleção de Atividades

Podemos “converter” o algoritmo de programação dinâmica em um algoritmo guloso se notarmos que o primeiro resolve subproblemas desnecessariamente.

Teorema: (escolha gulosa)

Considere o subproblema definido para uma instância não vazia S_{ij} , e seja a_m a atividade de S_{ij} com o menor tempo de término, i.e.:

$$f_m = \min\{f_k : a_k \in S_{ij}\}.$$

Então (a) existe uma solução ótima para S_{ij} que contém a_m e (b) S_{im} é vazio e o subproblema definido para esta instância é trivial, portanto, a escolha de a_m deixa apenas um dos subproblemas com solução possivelmente não trivial, já que S_{mj} pode não ser vazio.

Método geral para provar que um algoritmo guloso funciona

- ▶ Mostre que o problema tem subestrutura ótima.
- ▶ Mostre que se a foi a primeira escolha do algoritmo, então **existe** alguma **solução ótima** que contém a . Segue então por indução e pela subestrutura ótima que o algoritmo sempre faz escolhas corretas.

Seleção de Atividades

Vou mostrar que existe uma solução ótima para $S = S_{0,n+1}$ que contém a_m .

Seja A um conjunto de atividades mutuamente compatíveis de tamanho máximo em S_{ij} . Se $a_m \in A$ então nada há a fazer. Suponha então que $a_m \notin A$.

Seja $a_k \in A$ com menor f_k . Seja $A' = A - \{a_k\} \cup \{a_m\}$. Então A' também é conjunto de atividades mutuamente compatíveis de tamanho máximo. (Por quê?)

Este parece ser um truque importante: modificar uma solução ótima “genérica” e obter uma solução ótima com a(s) escolha(s) gulosa(s). Tenho que me lembrar disso.

Usando o teorema anterior, um modo simples de projetar um algoritmo seria o seguinte:

- ▶ Suponha que estamos tentando resolver S_{ij} .
- ▶ Determine a atividade a_m com menor tempo de término em S_{ij} .
- ▶ Resolva o subproblema S_{mj} e junte a_m à solução obtida na recursão. Devolva este conjunto de atividades.

Seleção de Atividades

SELEC-ATIV-GUL-REC(s, f, i, j)

▷ **Entrada:** vetores s e f com instantes de início e término das atividades a_i, a_{i+1}, \dots, a_j , sendo $f_i \leq \dots \leq f_j$.

▷ **Saída:** conjunto de tamanho máximo de índices de atividades mutuamente compatíveis.

1 $m \leftarrow i + 1;$

▷ Busca atividade com menor tempo de término que está em S_{ij}

2 enquanto $m < j$ e $s_m < f_i$ faça $m \leftarrow m + 1;$

3 se $m \geq j$ então devolva $\emptyset;$

4 senão

5 se $f_m > s_j$ então devolva $\emptyset;$ ▷ $a_m \notin S_{ij}$

6 senão devolva $\{a_m\} \cup \text{SELEC-ATIV-GUL-REC}(s, f, m, j).$

Seleção de Atividades

- ▶ A chamada inicial será $\text{SELEC-ATIV-GUL-REC}(s, f, 0, n + 1)$.
- ▶ **Complexidade:** $\Theta(n)$.
Ao longo de todas as chamadas recursivas, cada atividade é examinada exatamente uma vez no laço da linha 2. Em particular, a atividade a_k é examinada na última chamada com $i < k$.
- ▶ Como o algoritmo anterior é um caso simples de **recursão caudal**, é trivial escrever uma versão iterativa do mesmo.

Seleção de Atividades

SELEC-ATIV-GUL-ITER(s, f, n)

- ▷ **Entrada:** vetores s e f com instantes de início e término das n atividades com os instantes de término em ordem crescente.
- ▷ **Saída:** um conjunto A de tamanho máximo contendo atividades mutuamente compatíveis.

```
1   $A \leftarrow \{a_1\};$   
2   $i \leftarrow 1;$   
3  para  $m \leftarrow 2$  até  $n$  faça  
4      se  $s_m \geq f_i$  então  
5           $A \leftarrow A \cup \{a_m\};$   
6           $i \leftarrow m;$   
7  devolva  $A.$ 
```

Seleção de Atividades

- ▶ Observe que na linha 3, i é o índice da última atividade colocada em A . Como as atividades estão ordenadas pelo instante de término, tem-se que:

$$f_i = \max\{f_k : a_k \in A\},$$

ou seja, f_i é sempre o maior instante de término de uma atividade em A .

- ▶ Pode-se concluir que o algoritmo faz as mesmas escolhas de SELEC-ATIV-GUL-REC e portanto, está correto.
- ▶ **Complexidade:** $\Theta(n)$.

Códigos de Huffman

- ▶ **Códigos de Huffman:** técnica de compressão de dados.
- ▶ Reduções no tamanho dos arquivos dependem das características dos dados contidos nos mesmos. Valores típicos oscilam entre 20 e 90%.
- ▶ **Exemplo:** arquivo texto contendo 100.000 caracteres no alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$. As frequências de cada caracter no arquivo são indicadas na tabela abaixo.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
Frequência (em milhares)	45	13	12	16	9	5
Código de tamanho fixo	000	001	010	011	100	101
Código de tamanho variável	0	101	100	111	1101	1100

- ▶ **Codificação do arquivo:** representar cada caracter por uma sequência de *bits*
- ▶ **Alternativas:**
 1. sequências de **tamanho fixo**.
 2. sequências de **tamanho variável**.

Códigos de Huffman

- ▶ Qual o tamanho (em *bits*) do arquivo comprimido usando os códigos acima?
- ▶ **Códigos de tamanho fixo:** $3 \times 100.000 = 300.000$
Códigos de tamanho variável:

$$\underbrace{(45 \times 1)}_a + \underbrace{13 \times 3}_b + \underbrace{12 \times 3}_c + \underbrace{16 \times 3}_d + \underbrace{9 \times 4}_e + \underbrace{5 \times 4}_f) \times 1.000 = 224.000$$

Ganho de $\approx 25\%$ em relação à solução anterior.

Problema da Codificação:

Dadas as frequências de ocorrência dos caracteres de um arquivo, encontrar as sequências de *bits* (códigos) para representá-los de modo que o arquivo comprimido tenha tamanho mínimo.

Códigos de Huffman

Definição:

Códigos livres de prefixo são aqueles onde, dados dois caracteres quaisquer i e j representados pela codificação, a sequência de *bits* associada a i não é um *prefixo* da sequência associada a j .

Importante:

Pode-se provar que sempre **existe** uma solução ótima do problema da codificação que é dado por um código *livre de prefixo*.

Códigos de Huffman – codificação

O **processo de codificação**, i.e, de geração do arquivo comprimido é sempre fácil pois reduz-se a concatenar os códigos dos caracteres presentes no arquivo original em sequência.

Exemplo: usando a codificação de tamanho variável do exemplo anterior, o arquivo original dado por abc seria codificado por 0101100.

Códigos de Huffman – decodificação

- ▶ A vantagem dos códigos livres de prefixo se torna evidente quando vamos decodificar o arquivo comprimido.
- ▶ Como nenhum código é prefixo de outro código, o código que se encontra no início do arquivo comprimido não apresenta ambiguidade. Pode-se simplesmente identificar este código inicial, traduzi-lo de volta ao caracter original e repetir o processo no restante do arquivo comprimido.
- ▶ **Exemplo:** usando a codificação de tamanho variável do exemplo anterior, o arquivo comprimido contendo os *bits* 001011101 divide-se de **forma unívoca** em 0 0 101 1101, ou seja, corresponde ao arquivo original dado por *aabe*.

Códigos de Huffman

- ▶ Como representar de maneira conveniente uma codificação livre de prefixo de modo a facilitar o processo de decodificação?
- ▶ **Solução:** usar uma árvore binária.
O **filho esquerdo** está associado ao *bit* **ZERO** enquanto o **filho direito** está associado ao *bit* **UM**. Nas **folhas** encontram-se os caracteres presentes no arquivo original.

Códigos de Huffman

Veamos como ficam as árvores que representam os códigos do exemplo anterior.

Códigos de Huffman

- ▶ Pode-se mostrar ([Exercício!](#)) que uma **codificação ótima** sempre pode ser representada por uma árvore binária **cheia**, na qual cada vértice interno tem exatamente **dois** filhos.
- ▶ Então podemos restringir nossa atenção às árvores binárias cheias com $|C|$ folhas e $|C| - 1$ vértices internos ([Exercício!](#)), onde C é o conjunto de caracteres do alfabeto no qual está escrito o arquivo original.

Códigos de Huffman

Computando o tamanho do arquivo comprimido:

Se T é a árvore que representa a codificação, $d_T(c)$ é a profundidade da folha representado o caracter c e $f(c)$ é a sua frequência, o tamanho do arquivo comprimido será dado por:

$$B(T) = \sum_{c \in C} f(c) d_T(c).$$

Dizemos que $B(T)$ é o **custo** da árvore T .

Isto é exatamente o tamanho do arquivo codificado.

Códigos de Huffman

- ▶ **Idéia do algoritmo de Huffman:** Começar com $|C|$ folhas e realizar sequencialmente $|C| - 1$ operações de “intercalação” de dois vértices da árvore. Cada uma destas intercalações dá origem a um novo vértice interno, que será o pai dos vértices que participaram da intercalação.
- ▶ A escolha do par de vértices que dará origem a intercalação em cada passo depende da soma das frequências das folhas das subárvores com raízes nos vértices que ainda não participaram de intercalações.

Algoritmo de Huffman

HUFFMAN(C)

▷ **Entrada:** Conjunto de caracteres C e frequências f dos caracteres em C .

▷ **Saída:** raiz de uma árvore binária codificação ótima.

1 $n \leftarrow |C|;$

2 $Q \leftarrow C;$ ▷ Q é fila de prioridades dada pelas frequências
▷ dos vértices ainda não intercalados

3 **para** $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ **faça**

4 **alocar novo registro** $z;$ ▷ vértice de T

5 $z.esq \leftarrow x \leftarrow \text{EXTRAI_MIN}(Q);$

6 $z.dir \leftarrow y \leftarrow \text{EXTRAI_MIN}(Q);$

7 $z.f \leftarrow x.f + y.f;$

8 **INSERE**(Q, z);

9 **retorne** $\text{EXTRAI_MIN}(Q).$

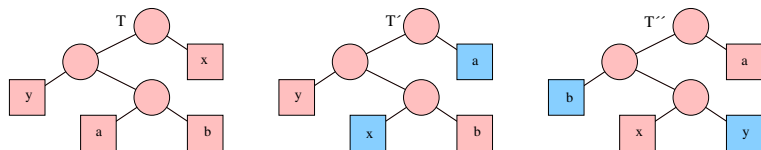
Lema 1: (escolha gulosa)

Seja C um alfabeto onde cada caracter $c \in C$ tem frequência $f[c]$. Sejam x e y dois caracteres em C com as menores frequências. Então, existe um código ótimo livre de prefixo para C no qual os códigos para x e y tem o mesmo comprimento e diferem apenas no último bit.

Prova do Lema 1:

- ▶ Seja T uma árvore ótima.
- ▶ Sejam a e b duas folhas “irmãs” (i.e. usadas em uma intercalação) mais profundas de T e x e y as folhas de T de menor frequência.
- ▶ **Idéia:** a partir de T , obter uma outra árvore ótima T' com x e y sendo duas folhas “irmãs”.

Correção do algoritmo de Huffman



$$\begin{aligned} B(T) - B(T') &= \sum_{c \in C} f(c)d_T(c) - \sum_{c \in C} f(c)d_{T'}(c) \\ &= f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a) - f[x]d_{T'}(x) - f[a]d_{T'}(a) \\ &= f[x]d_T(x) + f[a]d_T(a) - f[x]d_T(a) - f[a]d_T(x) \\ &= (f[a] - f[x])(d_T(a) - d_T(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, $B(T) \geq B(T')$.

Analogamente $B(T') \geq B(T'')$.

Como T é ótima, T'' é ótima e o resultado vale. \square

Lema 2: (subestrutura ótima)

Seja C um alfabeto com frequência $f[c]$ definida para cada caracter $c \in C$. Sejam x e y dois caracteres de C com as menores frequências. Seja C' o alfabeto obtido pela remoção de x e y e pela inclusão de um novo caracter z , ou seja, $C' = C \cup \{z\} - \{x, y\}$. As frequências dos caracteres em $C' \cap C$ são as mesmas que em C e $f[z]$ é definida como sendo $f[z] = f[x] + f[y]$.

Seja T' uma árvore binária representando um código ótimo livre de prefixo para C' . Então a árvore binária T obtida de T' substituindo-se o vértice (folha) z pela por um vértice interno tendo x e y como filhos, representa uma código ótimo livre de prefixo para C .

Correção do algoritmo de Huffman

Prova do Lema 2:

- ▶ Comparando os custos de T e T' :
 - ▶ Se $c \in C - \{x, y\}$, $f[c]d_T(c) = f[c]d_{T'}(c)$.
 - ▶ $f[x]d_T(x) + f[y]d_T(y) = (f[x] + f[y])(d_{T'}(z) + 1) = f[z]d_{T'}(z) + (f[x] + f[y])$.
- ▶ Logo, $B(T') = B(T) - f[x] - f[y]$.

- ▶ Por **contradição**, suponha que existe T'' tal que $B(T'') < B(T)$.

Pelo lema anterior, podemos supor que x e y são folhas “irmãs” em T'' . Seja T''' a árvore obtida de T'' pela substituição de x e y por uma folha z com frequência $f[z] = f[x] + f[y]$. O custo de T''' é tal que

$$B(T''') = B(T'') - f[x] - f[y] < B(T) - f[x] - f[y] = B(T'),$$

contradizendo a hipótese de que T' é uma árvore ótima para C' . □

Teorema:

O algoritmo de Huffman constrói um código ótimo (livre de prefixo).

Segue imediatamente dos Lemas 1 e 2.

Passos do projeto de algoritmos gulosos: resumo

1. Formule o problema como um **problema de otimização** no qual uma escolha é feita, restando-nos então resolver um único subproblema a resolver.
2. Provar que existe sempre uma solução ótima do problema que atende à **escolha gulosa**, ou seja, a escolha feita pelo algoritmo guloso é segura.
3. Demonstrar que, uma vez feita a escolha gulosa, o que resta a resolver é um subproblema tal que se combinarmos a resposta ótima deste subproblema com o(s) elemento(s) da escolha gulosa, chega-se à solução ótima do problema original.

Esta é a parte que requer mais engenhosidade!

Normalmente a prova começa com uma solução ótima *genérica* e a modificamos até que ela inclua o(s) elemento(s) identificados pela escolha gulosa.