Projeto e Análise de Algoritmos*

Redução entre problemas

Segundo Semestre de 2019

*Criado por C. de Souza, C. da Silva, O. Lee, F. Miyazawa et al.

A maior parte deste conjunto de slides foi inicialmente preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para cursos de Análise de Algoritmos. Além desse material, diversos conteúdos foram adicionados ou incorporados por outros professores, em especial por Orlando Lee e por Flávio Keidi Miyazawa. Os slides usados nessa disciplina são uma junção dos materiais didáticos gentilmente cedidos por esses professores e contêm algumas modificações, que podem ter introduzido erros.

O conjunto de slides de cada unidade do curso será disponibilizado como guia de estudos e deve ser usado unicamente para revisar as aulas. Para estudar e praticar, leia o livro-texto indicado e resolva os exercícios sugeridos.

Lehilton

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - Flávio Keidi Miyazawa
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Cotas para um problema

Formalizando problema

Como formalizar um problema genericamente?

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma relação $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$, onde

- *$\mathcal{I}$ é o conjunto de entradas e*
- *$\mathcal{S}$ é o conjunto de saídas.*

Formalizando problema

Como formalizar um problema genericamente?

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma relação $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$, onde

- $\mathcal{I}$ *é o conjunto de entradas e*
- $\mathcal{S}$ *é o conjunto de saídas.*

Formalizando problema

Como formalizar um problema genericamente?

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma relação $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$, onde

- $\mathcal{I}$ *é o conjunto de entradas e*
- $\mathcal{S}$ *é o conjunto de saídas.*

Formalizando problema

Como formalizar um problema genericamente?

Definição (Problema computacional)

Um problema computacional é uma relação $P \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{S}$, onde

- $\mathcal{I}$ *é o conjunto de entradas e*
- $\mathcal{S}$ *é o conjunto de saídas.*

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG *resolve um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada
- escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo
- denotamos por n o "tamanho" de I
- normalmente n é o números de bits de I

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG *resolve um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada
- escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo
- denotamos por n o "tamanho" de I
- normalmente n é o números de bits de I

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG *resolve um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada
- escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo
- denotamos por n o "tamanho" de I
- normalmente n é o números de bits de I

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG *resolve um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada
- escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo
- denotamos por n o "tamanho" de I
- normalmente n é o números de bits de I

Algoritmo para um problema

Definição

Dizemos que um algoritmo ALG *resolve um problema* $P = (\mathcal{I}, \mathcal{P})$ *se para toda entrada* $I \in \mathcal{I}$*, ele devolve uma saída* $S \in \mathcal{S}$ *tal que* $(I, S) \in P$*.*

- escrevemos $I \in P$ para representar uma entrada
- escrevemos $A(I)$ para representar a saída do algoritmo
- denotamos por n o "tamanho" de I
- normalmente n é o números de bits de I

Revisitando a complexidade de um algoritmo

Seja ALG um algoritmo para um problema P e n um parâmetro.

Notação O:

- Se o algoritmo leva tempo no máximo $f(n)$ para toda entrada de tamanho n, então dizemos que ALG executa em tempo $O(f(n))$.

Notação Ω:

- Se o algoritmo leva tempo pelo menos $g(n)$ para alguma entrada de tamanho n, então dizemos que ALG executa em tempo $\Omega(g(n))$.

Revisitando a complexidade de um algoritmo

Seja Alg um algoritmo para um problema P e n um parâmetro.

Notação O:

- Se o algoritmo leva tempo no máximo $f(n)$ para toda entrada de tamanho n, então dizemos que Alg executa em tempo $O(f(n))$.

Notação Ω:

- Se o algoritmo leva tempo pelo menos $g(n)$ para alguma entrada de tamanho n, então dizemos que Alg executa em tempo $\Omega(g(n))$.

Revisitando a complexidade de um algoritmo

Seja ALG um algoritmo para um problema P e n um parâmetro.

Notação O:

- Se o algoritmo leva tempo no máximo $f(n)$ para toda entrada de tamanho n, então dizemos que ALG executa em tempo $O(f(n))$.

Notação Ω:

- Se o algoritmo leva tempo pelo menos $g(n)$ para alguma entrada de tamanho n, então dizemos que ALG executa em tempo $\Omega(g(n))$.

Cotas superior e inferior de um problema

Seja P um problema e seja n um parâmetro:

Definição (Cota superior)

Uma função $f(n)$ é chamada de cota superior para P se existe algum algoritmo que resolve P em tempo $O(f(n))$.

Definição (Cota inferior)

Uma função $g(n)$ é chamada de cota inferior para P se todo algoritmo que resolve P leva tempo $\Omega(f(n))$.

Cotas superior e inferior de um problema

Seja P um problema e seja n um parâmetro:

Definição (Cota superior)

Uma função $f(n)$ é chamada de cota superior para P se existe algum algoritmo que resolve P em tempo $O(f(n))$.

Definição (Cota inferior)

Uma função $g(n)$ é chamada de cota inferior para P se todo algoritmo que resolve P leva tempo $\Omega(f(n))$.

Cotas superior e inferior de um problema

Seja P um problema e seja n um parâmetro:

Definição (Cota superior)

Uma função $f(n)$ é chamada de cota superior para P se existe algum algoritmo que resolve P em tempo $O(f(n))$.

Definição (Cota inferior)

Uma função $g(n)$ é chamada de cota inferior para P se todo algoritmo que resolve P leva tempo $\Omega(f(n))$.

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Algoritmo ótimo

Um algoritmo ALG é ótimo para um problema P se:

1. ALG resolve P em tempo $O(f(n))$ e
2. $f(n)$ é uma cota inferior de P.

- HEAP-SORT e MERGE-SORT são ótimos para ordenação:
  - eles têm complexidade $O(n \lg n)$
  - ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- BUSCA-BINARIA é ótimo para busca em vetor ordenado:
  - tem complexidade $O(\lg n)$
  - qualquer algoritmo leva tempo $\Omega(\lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Comparando problemas

Como comparamos dois algoritmos para um único problema?

- comparamos a complexidade de cada algoritmo
- descobrimos se um algoritmo é mais "rápido" que outro

E se quisermos comparar dois problemas A e B?

- queremos descobrir se então A é mais "fácil" do que B
- podemos comparar as cotas de cada algoritmo

Exemplo: Achar o máximo é mais fácil que ordenar um vetor!

- máximo tem cota superior $O(n)$
- ordenação tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Reduções

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

  Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

  Pergunta: como relacionar esses problemas?

Combinando problemas

Uma analogia

Um certo editor de literatura internacional é especialista em publicar livros em português. Ele conta com um time de tradutores, entre os quais:

- Cook, responsável por traduzir de **inglês para português**.
- Levin, responsável por traduzir de **russo para inglês**.

Em uma edição especial, ele gostaria de publicar Crime e Castigo; como então traduzir de russo para português?

- Em geral, lidamos com problemas bem conhecidos
- Mas eventualmente, topamos com problemas novos

  Pergunta: como relacionar esses problemas?

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

Uma redução do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- *τ_I transforma instância I_A de A em uma instância I_B de B*
- *τ_S transforma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

Uma redução do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- *τ_I transforma instância I_A de A em uma instância I_B de B*
- *τ_S transforma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

Uma redução do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- τ_I *transforma instância I_A de A em uma instância I_B de B*
- τ_S *transforma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

Uma redução do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- τ_I *transforma instância I_A de A em uma instância I_B de B*
- τ_S *transforma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução

Problema A:

- Instância: I_A
- Solução: S_A

Problema B:

- Instância: I_B
- Solução: S_B

Definição

Uma redução do problema A ao problema B é um par de sub-rotinas τ_I e τ_S tais que:

- *τ_I transforma instância I_A de A em uma instância I_B de B*
- *τ_S transforma solução S_B de I_B em uma solução S_A de I_A.*

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \leqslant B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \leqslant B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \leqslant B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo ALG_B para o problema B.
2. Podemos usar ALG_B como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \preccurlyeq B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1   I_B ← τ_I(I_A)
2   S_B ← ALG_B(I_B)
3   S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4   devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil" que B
- denotamos $A \leqslant B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1   I_B ← τ_I(I_A)
2   S_B ← ALG_B(I_B)
3   S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4   devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \leqslant B$

Redução como um algoritmo

Como podemos resolver o problema A?

1. Suponha que existe um algoritmo $\textsc{Alg}_B$ para o problema B.
2. Podemos usar $\textsc{Alg}_B$ como uma caixa-preta

```
REDUÇÃO(I_A)
1   I_B ← τ_I(I_A)
2   S_B ← ALG_B(I_B)
3   S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4   devolva S_A
```

Em outras palavras:

- se sei resolver B, então também sei resolver A!
- A é mais "fácil"que B
- denotamos $A \leqslant B$

Um problema de origem

Problema da Alocação de Centros (AC)

Entrada:

- um grafo bipartido conexo $G = ((X \cup Y), E)$ e
- uma função de pesos nas arestas $\omega : E \to \mathbb{R}_+$

Saída:

- alocar cada vértice v em X a um vértice $\phi[v]$ em Y tal que o peso $\omega(v, \phi[v])$ seja mínimo

Um problema de origem

Problema da Alocação de Centros (AC)

Entrada:

- um grafo bipartido conexo $G = ((X \cup Y), E)$ e
- uma função de pesos nas arestas $\omega : E \to \mathbb{R}_+$

Saída:

- alocar cada vértice v em X a um vértice $\phi[v]$ em Y tal que o peso $\omega(v, \phi[v])$ seja mínimo

Um problema de origem

Problema da Alocação de Centros (AC)

Entrada:

- um grafo bipartido conexo $G = ((X \cup Y), E)$ e
- uma função de pesos nas arestas $\omega : E \to \mathbb{R}_+$

Saída:

- alocar cada vértice v em X a um vértice $\phi[v]$ em Y tal que o peso $\omega(v, \phi[v])$ seja mínimo

Um problema de destino

Problema do Caminho Mínimo (CM)

Entrada:

- grafo direcionado acíclico $G = (V, E)$
- função de peso $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ nas arestas
- origem s.

Saída:

- vetor d com $d[v] = \text{dist}(s, v)$ para $v \in V$
- vetor π definindo uma arvore de caminhos mínimos

Um problema de destino

Problema do Caminho Mínimo (CM)

Entrada:

- grafo direcionado acíclico $G = (V, E)$
- função de peso $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ nas arestas
- origem s.

Saída:

- vetor d com $d[v] = \text{dist}(s, v)$ para $v \in V$
- vetor π definindo uma arvore de caminhos mínimos

Um problema de destino

Problema do Caminho Mínimo (CM)

Entrada:

- grafo direcionado acíclico $G = (V, E)$
- função de peso $\omega : E \to \mathbb{R}_+$ nas arestas
- origem s.

Saída:

- vetor d com $d[v] = \mathrm{dist}(s, v)$ para $v \in V$
- vetor π definindo uma arvore de caminhos mínimos

Reduzindo: transformação da entrada

Recebemos uma entrada do problema de origem AC:

```
τ_I(G, ω)
1  G' ← G, ω' ← ω
2  Adicione um novo vértice s a G'.
3  para cada v ∈ Y faça
4      Adicione aresta (s, v) a G'.
5      ω'(s, v) ← 0
6  devolva (G', ω', s)
```

Tempo: $O(Y)$

Reduzindo: transformação da entrada

Recebemos uma entrada do problema de origem AC:

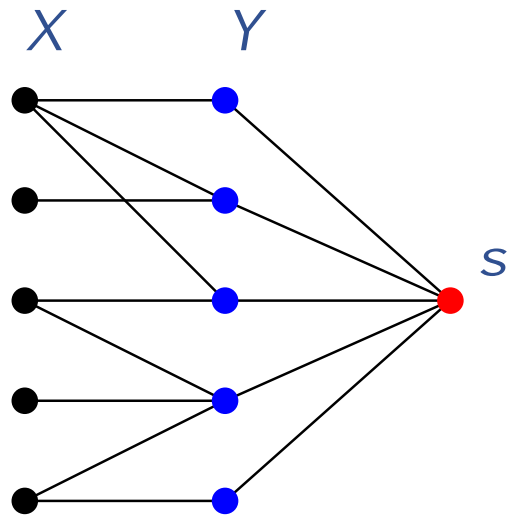
$\tau_I(G, \omega)$
1 $G' \leftarrow G$, $\omega' \leftarrow \omega$
2 Adicione um novo vértice s a G'.
3 **para cada** $v \in Y$ **faça**
4 Adicione aresta (s, v) a G'.
5 $\omega'(s, v) \leftarrow 0$
6 **devolva** (G', ω', s)

Tempo: $O(Y)$

Reduzindo: transformação da entrada

Recebemos uma entrada do problema de origem AC:

$\tau_I(G, \omega)$
1 $G' \leftarrow G$, $\omega' \leftarrow \omega$
2 Adicione um novo vértice s a G'.
3 **para cada** $v \in Y$ **faça**
4 Adicione aresta (s, v) a G'.
5 $\omega'(s, v) \leftarrow 0$
6 **devolva** (G', ω', s)

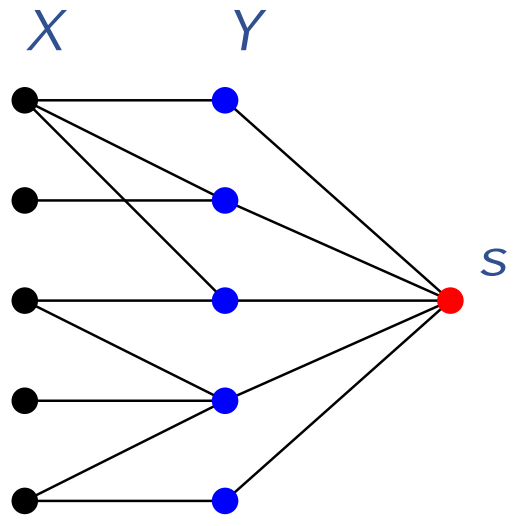


Tempo: $O(Y)$

Reduzindo: transformação da entrada

Recebemos uma entrada do problema de origem AC:

$\tau_I(G, \omega)$
1 $G' \leftarrow G$, $\omega' \leftarrow \omega$
2 Adicione um novo vértice s a G'.
3 **para cada** $v \in Y$ **faça**
4 Adicione aresta (s, v) a G'.
5 $\omega'(s, v) \leftarrow 0$
6 **devolva** (G', ω', s)



Tempo: $O(Y)$

Reduzindo: transformação da saída

Também recebemos uma solução do problema de destino CM:

```
τ_S(G, ω, d, π)
1  para cada v ∈ X faça
2      φ[v] ← π[v]
3  devolva φ
```

Tempo: $O(X)$

Reduzindo: transformação da saída

Também recebemos uma solução do problema de destino CM:

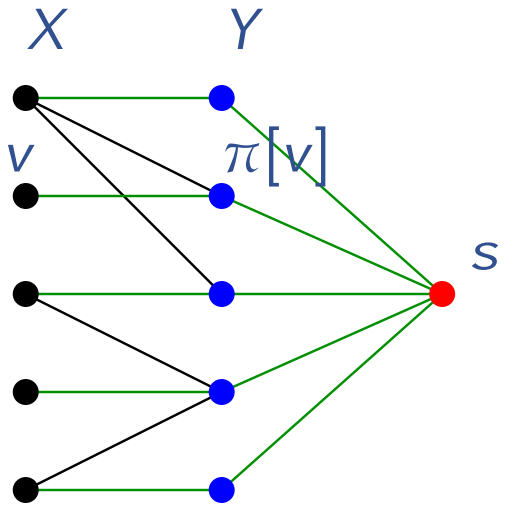
```
τ_S(G, ω, d, π)
1   para cada v ∈ X faça
2       φ[v] ← π[v]
3   devolva φ
```

Tempo: $O(X)$

Reduzindo: transformação da saída

Também recebemos uma solução do problema de destino CM:

```
τ_S(G, ω, d, π)
1   para cada v ∈ X faça
2       φ[v] ← π[v]
3   devolva φ
```

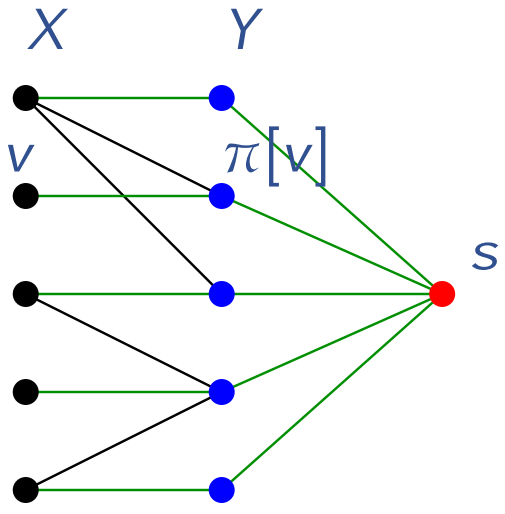


Tempo: $O(X)$

Reduzindo: transformação da saída

Também recebemos uma solução do problema de destino CM:

```
τ_S(G, ω, d, π)
1   para cada v ∈ X faça
2       φ[v] ← π[v]
3   devolva φ
```



Tempo: $O(X)$

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

Redução-AC-CM(G, ω)
1 $(G', \omega', s) \leftarrow \tau_I(G, \omega)$
2 $(d, \pi) \leftarrow \textsc{Alg}_{\text{CM}}(G', \omega', s)$
3 $\phi \leftarrow \tau_S(G, \omega, d, \pi)$
4 **devolva** ϕ

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

```
Redução-AC-CM(G, ω)
1  (G', ω', s) ← τ_I(G, ω)
2  (d, π) ← Alg_CM(G', ω', s)
3  φ ← τ_S(G, ω, d, π)
4  devolva φ
```

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

```
Redução-AC-CM(G, ω)
1  (G', ω', s) ← τ_I(G, ω)
2  (d, π) ← Alg_CM(G', ω', s)
3  φ ← τ_S(G, ω, d, π)
4  devolva φ
```

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

Redução-AC-CM(G, ω)
1 $(G', \omega', s) \leftarrow \tau_I(G, \omega)$
2 $(d, \pi) \leftarrow \textsc{Alg}_{\text{CM}}(G', \omega', s)$
3 $\phi \leftarrow \tau_S(G, \omega, d, \pi)$
4 **devolva** ϕ

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

Redução-AC-CM(G, ω)
1 $(G', \omega', s) \leftarrow \tau_I(G, \omega)$
2 $(d, \pi) \leftarrow \textsc{Alg}_{\text{CM}}(G', \omega', s)$
3 $\phi \leftarrow \tau_S(G, \omega, d, \pi)$
4 **devolva** ϕ

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Reduzindo: AC $\preccurlyeq$ CM

Seja $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ um algoritmo para Caminho Mínimo.

- $\textsc{Alg}_{\text{CM}}$ poderia ser Dijkstra, Bellman-Ford...
- Pode ser que não conheçamos um algoritmo para o problema de destino!

Redução-AC-CM(G, ω)
1 $\quad (G', \omega', s) \leftarrow \tau_I(G, \omega)$
2 $\quad (d, \pi) \leftarrow \textsc{Alg}_{\text{CM}}(G', \omega', s)$
3 $\quad \phi \leftarrow \tau_S(G, \omega, d, \pi)$
4 $\quad$ **devolva** ϕ

Tempo total: [tempo da redução] + [tempo de$\textsc{Alg}_{\text{CM}}$]

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO-AC-CM(G, ω)
1  (G', ω', s) ← τ_I(G, ω)
2  (d, π) ← ALG_CM(G', ω', s)
3  φ ← τ_S(G, ω, d, π)
4  devolva φ
```

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Tempo da redução

Quanto tempo gastamos só com a redução?

- não contamos o tempo do algoritmo para o problema B
- a complexidade de uma redução $f(n)$ é a soma dos tempos das transformações τ_I e τ_S
- escrevemos $A \leqslant_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO-AC-CM(G, ω)
1  (G', ω', s) ← τ_I(G, ω)
2  (d, π) ← ALG_CM(G', ω', s)
3  φ ← τ_S(G, ω, d, π)
4  devolva φ
```

Nesse caso: $AC \leqslant_{|X|+|Y|} CM$

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Parênteses: reduções polinomiais

Queremos construir algoritmos rápidos. Mas o que é "rápido"?

- normalmente, dizemos que um algoritmo é rápido se ele executa em tempo polinomial
- daí, queremos reduções de tempo polinomial
- nesse caso, escrevemos $A \leqslant_{\text{poli}} B$

Qual a consequência de $A \leqslant_{\text{poli}} B$?

1. se B tem algoritmo de tempo polinomial, então A também
2. se A não tem algoritmo de tempo polinomial, tampouco B

- Isso é útil para distinguir problemas fáceis de difíceis!
- Mas é assunto para depois...

Exemplos de reduções

Exemplos de reduções

- Sistema Linear (LS) para Sistema Linear Simétrico (SLS)

Problema de origem

Sistema Linear (LS)

Entrada:

- matriz M de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Problema de origem

Sistema Linear (LS)

Entrada:

- matriz M de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Problema de origem

Sistema Linear (LS)

Entrada:

- matriz M de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Problema de destino

Sistema Linear Simétrico (SLS)

Entrada:

- matriz M simétrica de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Problema de destino

Sistema Linear Simétrico (SLS)

Entrada:

- matriz M simétrica de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Problema de destino

Sistema Linear Simétrico (SLS)

Entrada:

- matriz M simétrica de dimensões $n \times n$ com determinante não nulo
- vetor b de dimensão n

Saída:

- vetor x de dimensão n que satisfaz o seguinte sistema linear:

$$Mx = b$$

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente $\mathrm{SLS} \preccurlyeq \mathrm{LS}$
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, $\mathrm{LS} \preccurlyeq \mathrm{SLS}$.

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Perguntas

SLS é um caso particular de LS

- então trivialmente SLS $\preccurlyeq$ LS
- será que LS é estritamente mais difícil?

A resposta é não!

- Iremos reduzir LS para SLS.
- Isso é, LS $\preccurlyeq$ SLS.

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

Um fato simples

Lema

Um vetor x é solução de $Mx = b$ se, e só se, x é solução de $M^T Mx = M^T b$.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- multiplicamos $Mx = b$ por M^T
- obtemos $M^T Mx = M^T b$

($\Leftarrow$)
- M^T tem determinante não nulo
- então M^T tem inversa Z
- multiplicando $M^T Mx = M^T b$ por Z
- obtemos $Mx = b$

Observe que $M' = M^T M$ é uma matriz simétrica!

LS $\preccurlyeq$ SLS

Redução-LS-SLS(M, b)

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

LS $\preccurlyeq$ SLS

Redução-LS-SLS(M, b)
1 $\quad M' \leftarrow M^T M$

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

LS $\preccurlyeq$ SLS

Redução-LS-SLS(M, b)
1 $M' \leftarrow M^T M$
2 $b' \leftarrow M^T b$

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

$\text{LS} \preccurlyeq \text{SLS}$

Redução-LS-SLS(M, b)

1 $M' \leftarrow M^T M$
2 $b' \leftarrow M^T b$
3 $x \leftarrow \text{Alg}_{\text{SLS}}(M', b')$

Concluímos que de fato $\text{LS} \preccurlyeq \text{SLS}$.

LS $\preccurlyeq$ SLS

Redução-LS-SLS(M, b)
1 $M' \leftarrow M^T M$
2 $b' \leftarrow M^T b$
3 $x \leftarrow \text{Alg}_{\text{SLS}}(M', b')$
4 **devolva** x

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

LS $\preccurlyeq$ SLS

Redução-LS-SLS(M, b)
1 $M' \leftarrow M^T M$
2 $b' \leftarrow M^T b$
3 $x \leftarrow \text{Alg}_{\text{SLS}}(M', b')$
4 **devolva** x

Concluímos que de fato LS $\preccurlyeq$ SLS.

Exemplos de reduções

- Casamento Cíclico de Strings para Casamento de Strings

Problema de origem

Problema do casamento cíclico de strings (CSM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ com n símbolos

Saída:

- decidir se B é um deslocamento cíclico de A
- se sim, então o número k de letras deslocadas

Exemplo:

- Entrada: $A = acgtact$ e $B = gtactac$
- Saída: TRUE, $k = 2$

Problema de origem

Problema do casamento cíclico de strings (CSM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ com n símbolos

Saída:

- decidir se B é um deslocamento cíclico de A
- se sim, então o número k de letras deslocadas

Exemplo:

- Entrada: $A = acgtact$ e $B = gtactac$
- Saída: TRUE, $k = 2$

Problema de origem

Problema do casamento cíclico de strings (CSM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$ com n símbolos

Saída:

- decidir se B é um deslocamento cíclico de A
- se sim, então o número k de letras deslocadas

Exemplo:

- Entrada: $A = acgtact$ e $B = gtactac$
- Saída: TRUE, $k = 2$

Problema de destino

Problema do casamento de strings (SM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ com m símbolos

Saída:

- decidir se B é subcadeia de A
- se sim, qual índice k da primeira ocorrência de B em A

Exemplo:

- Entrada: $A = acgttaccgtacccg$ e $B = tac$
- Saída: TRUE, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).

Problema de destino

Problema do casamento de strings (SM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ com m símbolos

Saída:

- decidir se B é subcadeia de A
- se sim, qual índice k da primeira ocorrência de B em A

Exemplo:

- Entrada: $A = acgttaccgtacccg$ e $B = tac$
- Saída: TRUE, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).

Problema de destino

Problema do casamento de strings (SM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ com m símbolos

Saída:

- decidir se B é subcadeia de A
- se sim, qual índice k da primeira ocorrência de B em A

Exemplo:

- Entrada: $A = acgttaccgtacccg$ e $B = tac$
- Saída: TRUE, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).

Problema de destino

Problema do casamento de strings (SM)

Entrada:

- alfabeto Σ
- cadeia $A = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ com n símbolos
- cadeia $B = b_0 b_1 \ldots b_{m-1}$ com m símbolos

Saída:

- decidir se B é subcadeia de A
- se sim, qual índice k da primeira ocorrência de B em A

Exemplo:

- Entrada: $A = acgttaccgtacccg$ e $B = tac$
- Saída: TRUE, $k = 4$

Observação: o problema SM pode ser resolvido em tempo $O(n + m)$ pelo algoritmo KMP de Knuth, Morris and Pratt (1977).

CSM $\preccurlyeq$ SM

Redução-CSM-SM(A, B, n)

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)
1 $A' \leftarrow AA$ $\triangleright$ concatena duas cópias de A

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)

1 $A' \leftarrow AA$ $\triangleright$ concatena duas cópias de A

2 $B' \leftarrow B$

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)

1 $A' \leftarrow AA$ ▷ concatena duas cópias de A
2 $B' \leftarrow B$
3 $n' \leftarrow 2n$

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

Redução-CSM-SM(A, B, n)

1 $A' \leftarrow AA$ ▷ concatena duas cópias de A
2 $B' \leftarrow B$
3 $n' \leftarrow 2n$
4 $m' \leftarrow n$

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)

1 $A' \leftarrow AA$ ▷ concatena duas cópias de A
2 $B' \leftarrow B$
3 $n' \leftarrow 2n$
4 $m' \leftarrow n$
5 **devolva** $\text{ALG}_{\text{SM}}(A', n', B', m')$

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

```
REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)
1  A' ← AA          ▷ concatena duas cópias de A
2  B' ← B
3  n' ← 2n
4  m' ← n
5  devolva ALG_SM(A', n', B', m')
```

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

```
REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)
1  A' ← AA          ▷ concatena duas cópias de A
2  B' ← B
3  n' ← 2n
4  m' ← n
5  devolva ALG_SM(A', n', B', m')
```

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

CSM $\preccurlyeq$ SM

```
REDUÇÃO-CSM-SM(A, B, n)
1  A' ← AA          ▷ concatena duas cópias de A
2  B' ← B
3  n' ← 2n
4  m' ← n
5  devolva ALG_SM(A', n', B', m')
```

- **Tempo da redução:** $O(n)$
- **Correção:** basta mostrar que se k é a solução de SM, então k também é solução de CSM.

Exemplo:

- $I_{CSM} = (acgtact, gtactac, 7)$
- $I_{SM} = (acgtactacgtact, 14, gtactac, 7)$
- $S_{SM} = S_{CSM} = (\text{TRUE}, 2)$

Exemplos de reduções

- Existência de Triângulo para Multiplicação de Matrizes Quadradas

Problema de origem

Problema da existência de triângulo (PET)

Entrada:

- grafo conexo $G = (V, E)$ sem laços com $n = |V|$ e $m = |E|$

Saída:

- decidir se G contém um triângulo

Problema de origem

Problema da existência de triângulo (PET)

Entrada:

- grafo conexo $G = (V, E)$ sem laços com $n = |V|$ e $m = |E|$

Saída:

- decidir se G contém um triângulo

Problema de origem

Problema da existência de triângulo (PET)

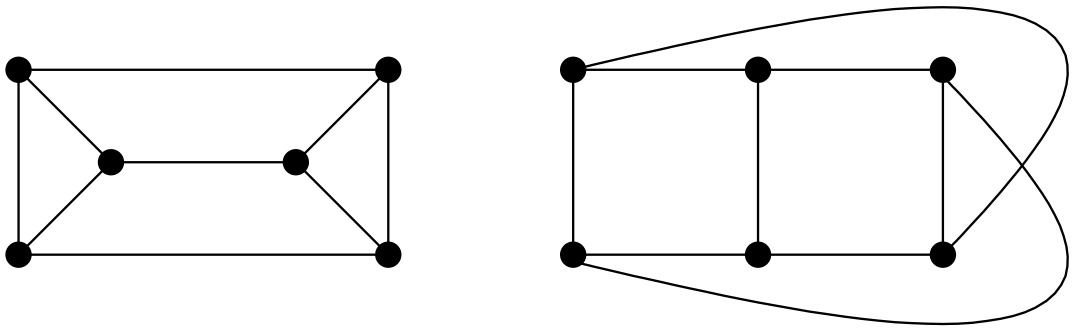
Entrada:

- grafo conexo $G = (V, E)$ sem laços com $n = |V|$ e $m = |E|$

Saída:

- decidir se G contém um triângulo

Exemplo:



SIM NÃO

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Observações sobre o PET

Alguns algoritmos conhecidos:

- um algoritmo trivial de tempo $O(n^3)$:
  - verificar todas as triplas de vértices
- um algoritmo $O(mn)$ que
  - é muito bom se o grafo é esparso

Vamos supor que o grafo é denso:

- G será representado por uma matriz de adjacência A

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in E \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, *ou seja,* $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ *se e somente se existe caminho de tamanho* 2 *saindo de* i *e chegando em* j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, *ou seja,* $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ *se e somente se existe caminho de tamanho* 2 *saindo de* i *e chegando em* j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Um lema útil

Lema

Seja $A^2 = A \times A$, ou seja, $a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.
Então $a_{ij}^2 > 0$ se e somente se existe caminho de tamanho 2 saindo de i e chegando em j.

Demonstração:

($\Rightarrow$)
- se $a_{ij}^2 > 0$, então algum termo $a_{ik} a_{kj}$ é positivo
- segue que $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- ou seja, há arestas (i, k) e (k, j)

($\Leftarrow$)
- seja um caminho (i, k, j) de i até j
- então $a_{ik} = 1$ e $a_{kj} = 1$
- daí $a_{ik} a_{kj} > 0$ e, portanto, $a_{ij}^2 > 0$

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

Problema destino

Problema da Multiplicação de Matrizes Quadradas (MMQ)

Entrada:

- matriz quadrada A de ordem n.
- matriz quadrada B de ordem n.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Observações:

- há um algoritmo óbvio de complexidade $O(n^3)$
- MMQ pode ser resolvida mais rapidamente
  - em tempo $O(n^{2,807})$ pelo algoritmo de Strassen (1969)
  - em tempo $O(n^{2,3728639})$ pelo de François Le Gall (2014)

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

- **Tempo da redução:** $O(n^2)$
- **Tempo total:** $O(n^{2,3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2,3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2,3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2,3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)
1 $\quad A^2 \leftarrow \text{ALG}_{\text{MMQ}}(A, A, n)$

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2{,}3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i,j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i,j)

```
REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)
1   A² ← ALG_MMQ(A, A, n)
2   para i = 1 até n faça
3       para j = 1 até n faça
4           se a²_ij > 0 e a_ij = 1 então
5               devolva SIM
```

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2{,}3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i, j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i, j)

```
REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)
1  A² ← ALG_MMQ(A, A, n)
2  para i = 1 até n faça
3      para j = 1 até n faça
4          se a²_ij > 0 e a_ij = 1 então
5              devolva SIM
6  devolva NÃO
```

- Tempo da redução: $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2{,}3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

Observe que só existe triângulo com aresta (i,j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i,j)

```
REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)
1   A² ← ALG_MMQ(A, A, n)
2   para i = 1 até n faça
3       para j = 1 até n faça
4           se a²_ij > 0 e a_ij = 1 então
5               devolva SIM
6   devolva NÃO
```

- **Tempo da redução:** $O(n^2)$
- Tempo total: $O(n^{2{,}3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ

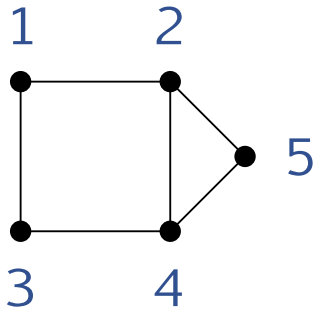
Observe que só existe triângulo com aresta (i,j) se

1. existir caminho de tamanho 2 de i a j
2. existir aresta (i,j)

```
REDUÇÃO-PET-MMQ(A, n)
1   A² ← ALG_MMQ(A, A, n)
2   para i = 1 até n faça
3       para j = 1 até n faça
4           se a²_ij > 0 e a_ij = 1 então
5               devolva SIM
6   devolva NÃO
```

- **Tempo da redução:** $O(n^2)$
- **Tempo total:** $O(n^{2{,}3728639})$

PET $\preccurlyeq$ MMQ



$A(G)$

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0

$A^2 = A(G) \times A(G)$

	1	2	3	4	5
1	2	0	0	2	1
2	0	3	2	1	1
3	0	2	2	0	1
4	2	1	0	3	1
5	1	1	1	1	2

Exemplos de reduções

- Multiplicação de Matrizes para Multiplicação de Matrizes Simétric

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS)

Entrada:

- matriz simétrica quadrada A de ordem m.
- matriz simétrica quadrada B de ordem m.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Claro que MMS $\leqslant_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS)

Entrada:

- matriz simétrica quadrada A de ordem m.
- matriz simétrica quadrada B de ordem m.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Claro que MMS $\leqslant_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS)

Entrada:

- matriz simétrica quadrada A de ordem m.
- matriz simétrica quadrada B de ordem m.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Claro que MMS $\leqslant_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS)

Entrada:

- matriz simétrica quadrada A de ordem m.
- matriz simétrica quadrada B de ordem m.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Claro que MMS $\leqslant_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

Considerando o caso particular

Considere um caso particular de MMQ:

Multiplicação de Matrizes Simétricas (MMS)

Entrada:

- matriz simétrica quadrada A de ordem m.
- matriz simétrica quadrada B de ordem m.

Saída:

- produto $P = A \times B$.

Claro que MMS $\leqslant_{m^2}$ MMQ.

- Portanto, MMQ é pelo menos tão difícil quanto MMS
- Será que MMS também é pelo menos tão difícil quanto MMQ?

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

MMQ $\preccurlyeq$ MMS

Reduzindo MMQ $\preccurlyeq_{n^2}$ *MMS*:

1. Considere uma instância de MMQ, $I_{MMQ} = (A, B, n)$.
2. Construa uma instância de MMS, $I_{MMS} = (A', B', 2n)$, em que

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

3. A solução de MMS é:

$$P' = A'B' = \begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & A^T B^T \end{bmatrix}.$$

4. Devolva o primeiro bloco da matriz P'.

Tempo da redução: $O(n^2)$.

- construir I_{MMQ} leva tempo $O(n^2)$
- copiar o bloco e P' leva tempo $O(n^2)$

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Interpretando os fatos

- suponha que exista um algoritmo para MMS de tempo $O(T(m))$ para algum polinômio $T(m)$
  - relembre que m é a ordem das matrizes A' e B'
- quão pequeno pode ser $T(m)$?
  - é claro que $T(m) = \Omega(m^2)$, pois é preciso ler a entrada
  - será que pode ser mais rápido que $o(m^{2,3728639})$?

Para responder isso, usamos a redução MMQ $\leqslant_{n^2}$ MMS:

- ela implica em um algoritmo de tempo total $O(T(m) + n^2)$
- como $m = 2n$, tempo é $O(T(2n) + n^2) = O(T(n) + n^2)$
- como $T(n)$ domina n^2, o tempo é simplesmente $O(T(n))$

Ou seja:

$\Rightarrow$ algoritmo $T(m)$ para MMS implica algoritmo $T(n)$ para MMQ!

Reduções para obtenção de cota inferior

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Uma redução $A \preccurlyeq_{f(n)} B$

```
REDUÇÃO(I_A)
1  I_B ← τ_I(I_A)
2  S_B ← ALG_B(I_B)
3  S_A ← τ_S(I_A, S_B)
4  devolva S_A
```

Suponha que

- A tem cota inferior $h(n)$
- ALG_B resolve B em tempo $g(n)$
- a redução gasta tempo $f(n) \leq \frac{h(n)}{2}$

REDUCAO é um algoritmo para A de tempo

$$f(n) + g(n) \geq h(n) \Rightarrow g(n) \geq h(n) - f(n) \geq h(n) - \frac{h(n)}{2} = \frac{h(n)}{2}$$

Conclusão: $g(n) \geq \Omega(h(n))$

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Transferindo cotas inferiores

Teorema

Considere dois problemas A e B e suponha que

1. *$h(n)$ é cota inferior para A e*
2. *$A \leqslant_{f(n)} B$,*
3. *$f(n) = o(h(n))$.*

Então $h(n)$ é cota inferior para B.

Observação:

- a cota inferior depende do modelo de computação
- supomos o mesmo modelo para ambos problemas

Reduções para obtenção de cota inferior

- Ordenação para Envoltória Convexa

Problema de origem

Problema da Ordenação (ORD)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- permutação X cujos elementos estejam ordenados

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Problema de origem

Problema da Ordenação (ORD)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- permutação X cujos elementos estejam ordenados

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Problema de origem

Problema da Ordenação (ORD)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- permutação X cujos elementos estejam ordenados

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Problema de origem

Problema da Ordenação (ORD)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- permutação X cujos elementos estejam ordenados

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$

Problema de destino

Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos

Observações:

- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos

Observações:

- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

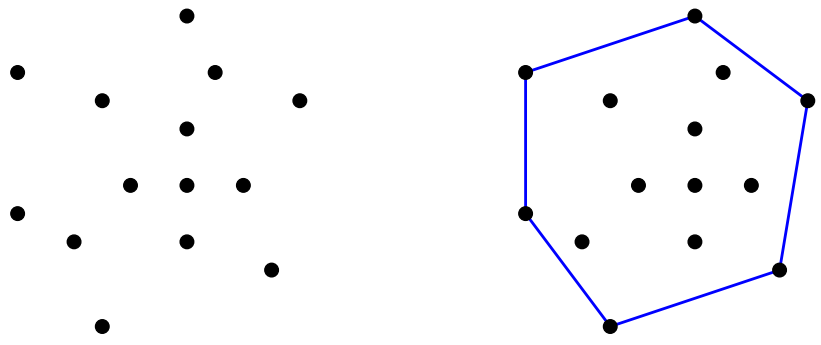
Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos



Observações:

- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

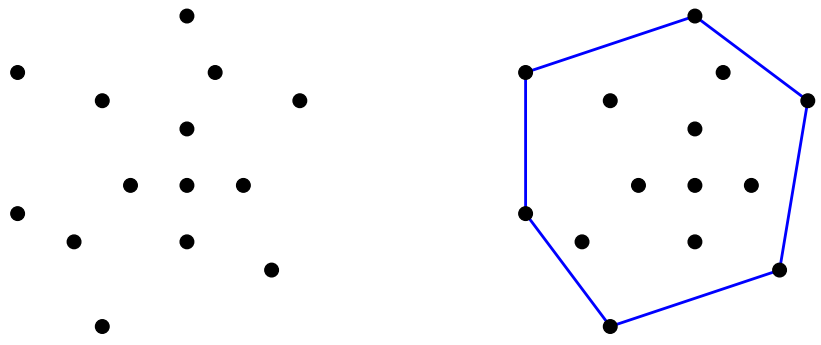
Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos



Observações:

- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

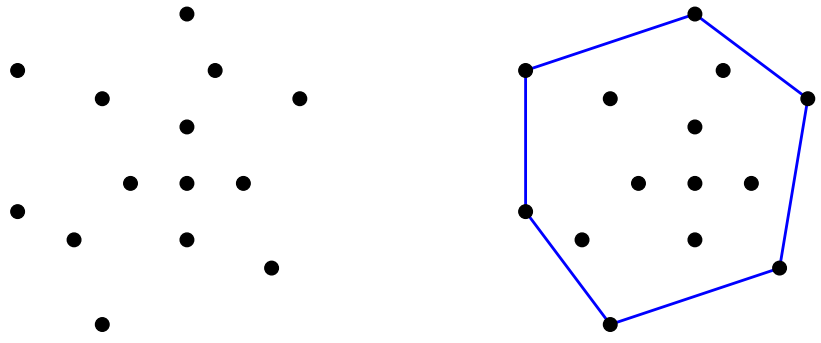
Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos



Observações:

- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

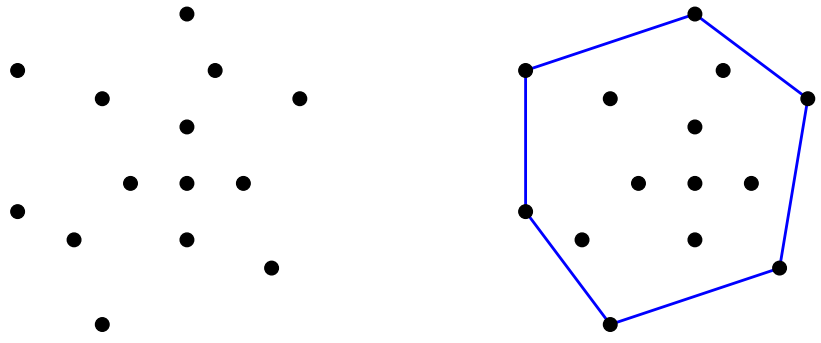
Problema da Envoltória Convexa (EC)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- **menor polígono convexo** que contém os n pontos



Observações:

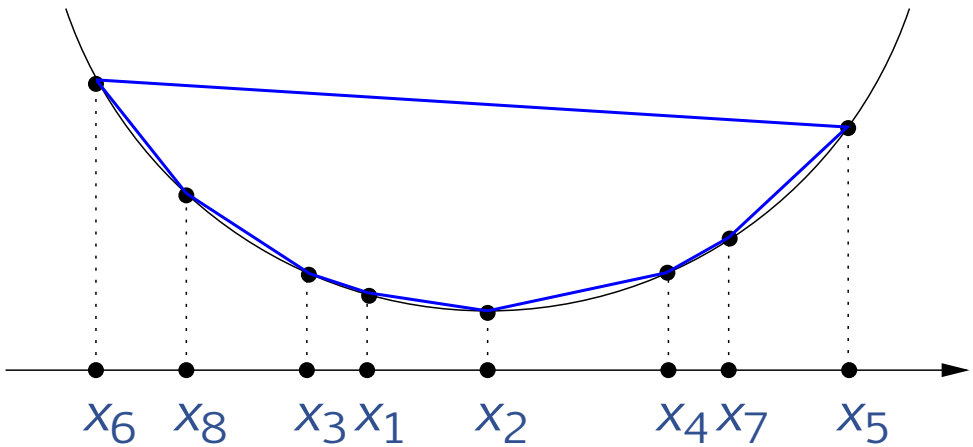
- os vértices são representados em ordem anti-horária
- problema clássico de Geometria Computacional
- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

ORD $\preccurlyeq_n$ EC

Reduzindo ORD $\preccurlyeq_n$ EC:

1. Considere uma instância de $I_{ORD} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{EC} = \{(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \ldots, (x_n, x_n^2)\}.$$



ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

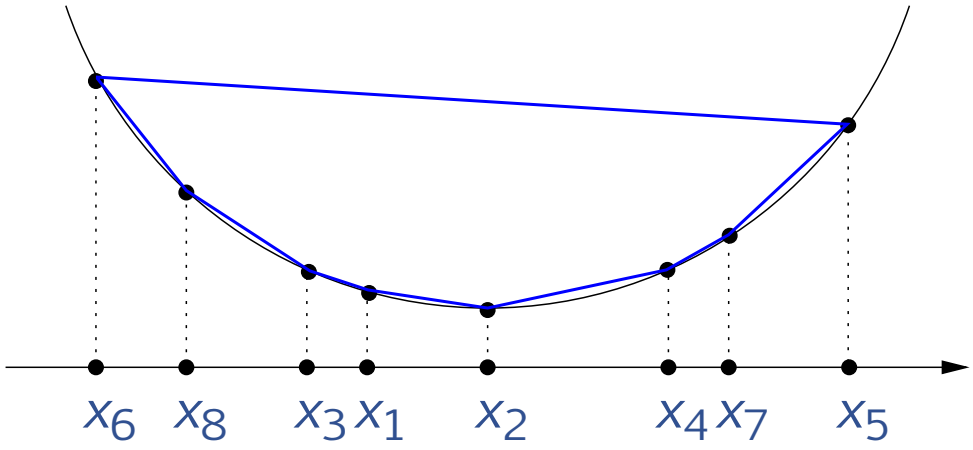
3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.

4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.

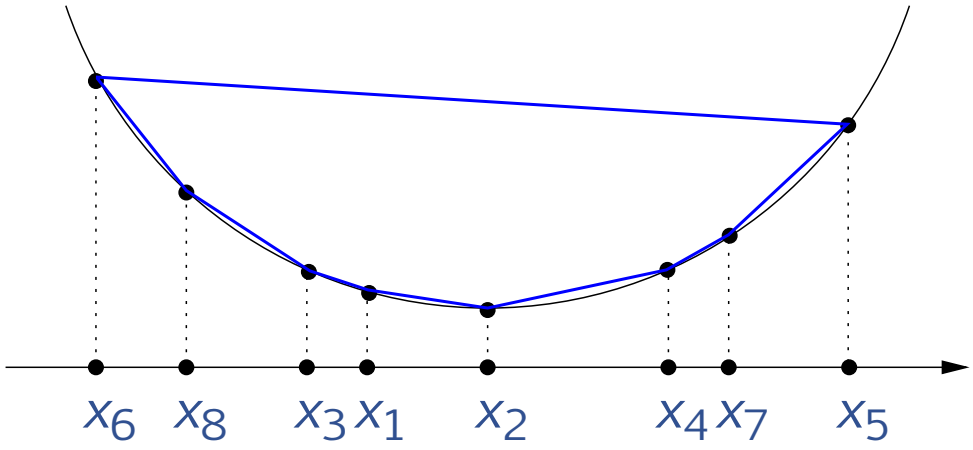


4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.

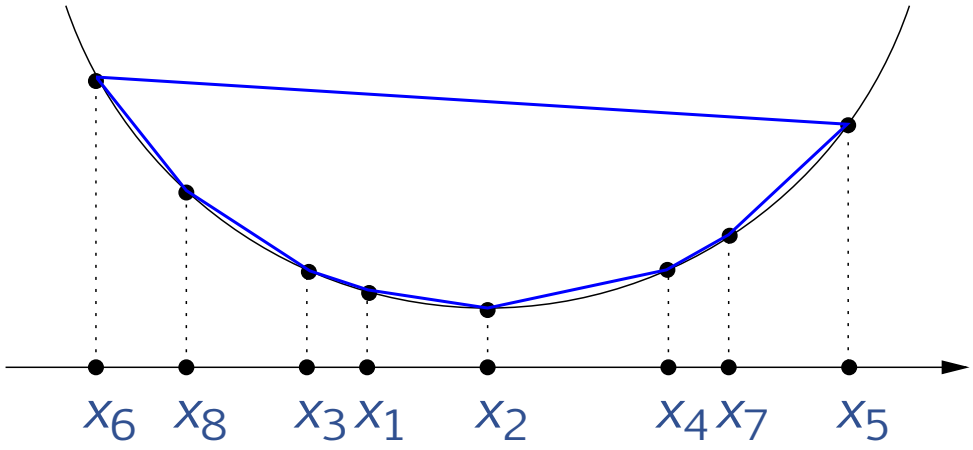


4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.

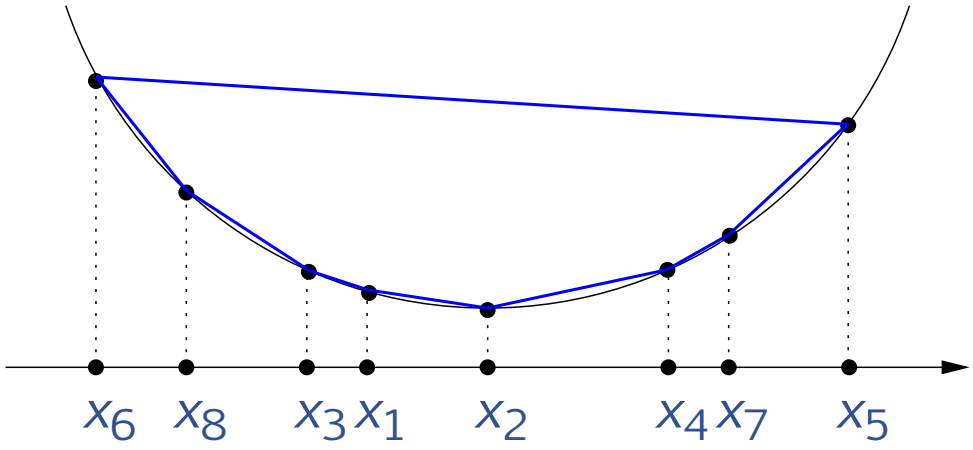


4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.

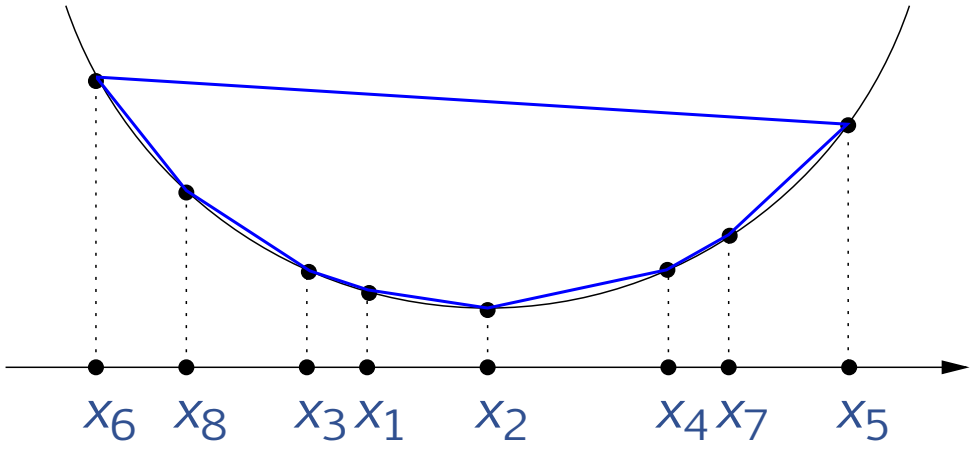


4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

ORD $\leqslant_n$ EC (cont)

3. Resolva I_{EC} e obtenha solução S_{EC}, que é uma lista cíclica dos vértices do polígono.



4. Determine índice i de S_{EC} do ponto com menor abcissa.
5. Liste os todos os índices a partir de i.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para EC.

Reduções para obtenção de cota inferior

- Unicidade de Elementos para Ponto Mais Próximo em 2D

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de origem

Problema da Unicidade de Elementos (UE)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos comparáveis

Saída:

- decidir se os elementos são todos distintos

Observações:

- só podemos comparar dois elementos por uma sub-rotina caixa-preta de tempo constante (chamada oráculo)
- esse problema tem cota inferior $\Omega(n \lg n)$
- o problema pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$. (Como?)

Problema de destino

Problema do Par Mais Próximo (PMP)

Entrada:

- coleção $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- par de pontos i e j que estejam a menor distância.

Observação:

- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

Problema do Par Mais Próximo (PMP)

Entrada:

- coleção $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- par de pontos i e j que estejam a menor distância.

Observação:

- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

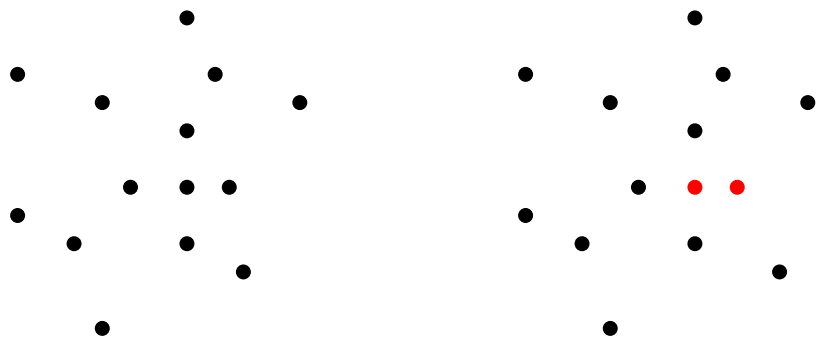
Problema do Par Mais Próximo (PMP)

Entrada:

- coleção $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- par de pontos i e j que estejam a menor distância.



Observação:

- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

Problema de destino

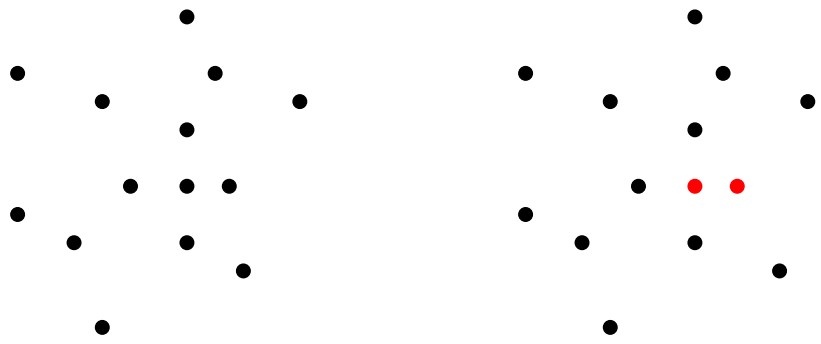
Problema do Par Mais Próximo (PMP)

Entrada:

- coleção $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- par de pontos i e j que estejam a menor distância.



Observação:

- pode ser resolvido em tempo $O(n \lg n)$

UE $\preccurlyeq_n$ PMP

Reduzindo UE $\preccurlyeq_n$ PMP:

1. Considere instância $I_{UE} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{PMP} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)\}.$$

UE $\leqslant_n$ PMP

Reduzindo UE $\leqslant_n$ PMP:

1. Considere instância $I_{UE} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

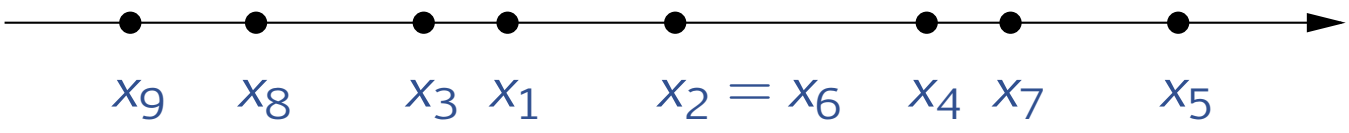
$$I_{PMP} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)\}.$$

UE $\preccurlyeq_n$ PMP

Reduzindo UE $\preccurlyeq_n$ PMP:

1. Considere instância $I_{UE} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{PMP} = \{(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)\}.$$



UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

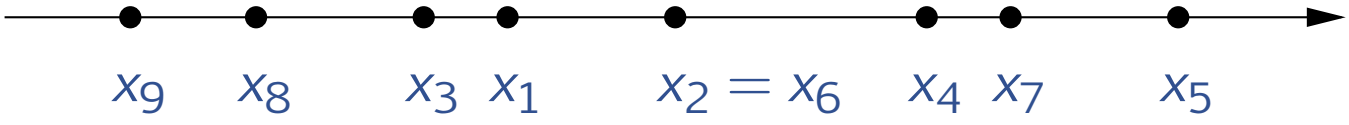
UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.

- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

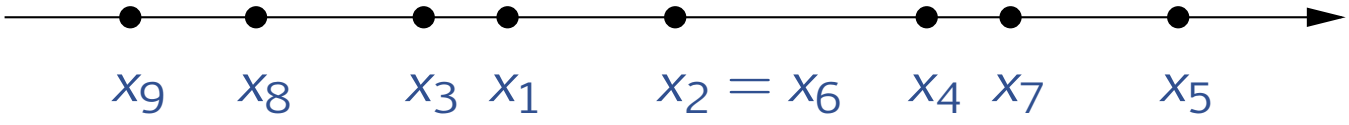
3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.



- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

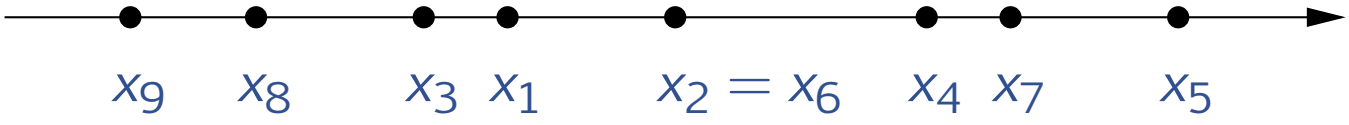
3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.



- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

UE $\leqslant_n$ PMP (cont)

3. Resolva I_{PMP} e obtenha par de pontos $(x_i, 0), (x_j, 0)$.
4. Calcule a distância d entre os pontos:
   (a) Se $d = 0$, então devolva NÃO.
   (b) Se $d > 0$, devolva SIM.



- O tempo da redução é $O(n)$.
- Portanto $\Omega(n \lg n)$ também é cota inferior para PMP.

Reduções para obtenção de cota inferior

- 3-Soma para Colinearidade

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$
- solução $i = 1, j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$
- solução $i = 1, j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$
- solução $i = 1, j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1, j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de origem

Problema da 3-Soma (3SUM)

Entrada:

- sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n reais

Saída:

- determinar se existem índices distintos i,j e k tais que:

$$x_i + x_j + x_k = 0$$

Exemplo:

- instância $X = (\underline{4}, -6, \underline{1}, 8, 7, \underline{-5})$
- solução $i = 1$, $j = 3$ e $k = 6$

Observações:

- pode ser resolvido em $O(n^2)$ (Como?)
- acreditava-se que $\Omega(n^2)$ era cota inferior
- pode ser resolvido em $o(n^2)$ (Grønlund e Pettie, 2014)
- ainda se acredita que não dá pra fazer melhor que $n^{2-\Omega(1)}$

Problema de destino

Problema da Colinearidade Não Horizontal (COL)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- determinar se três pontos estão em alguma reta não horizontal

Problema de destino

Problema da Colinearidade Não Horizontal (COL)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- determinar se três pontos estão em alguma reta não horizontal

Problema de destino

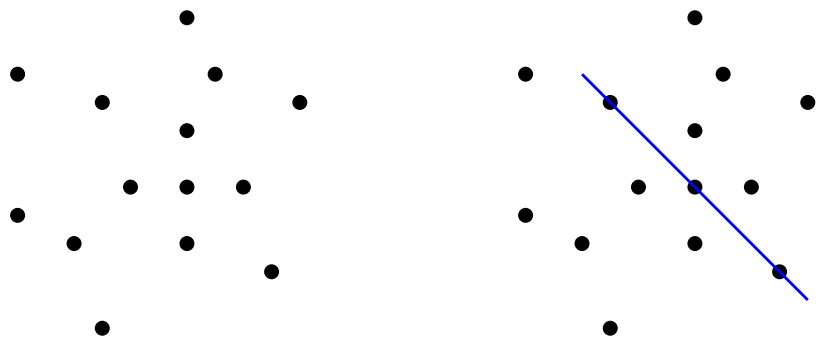
Problema da Colinearidade Não Horizontal (COL)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- determinar se três pontos estão em alguma reta não horizontal



Problema de destino

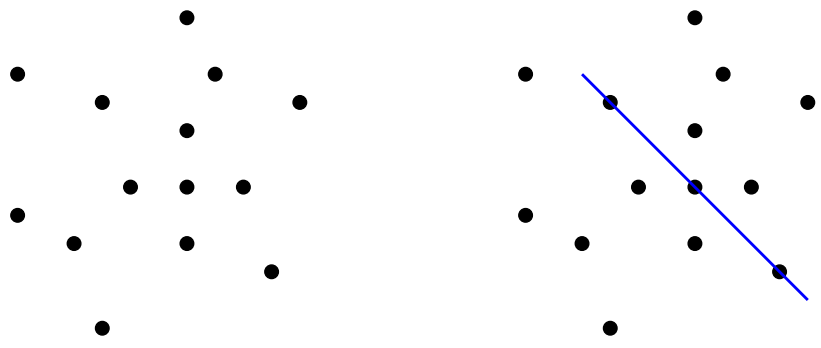
Problema da Colinearidade Não Horizontal (COL)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- determinar se três pontos estão em alguma reta não horizontal



Observações:

- pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$

Problema de destino

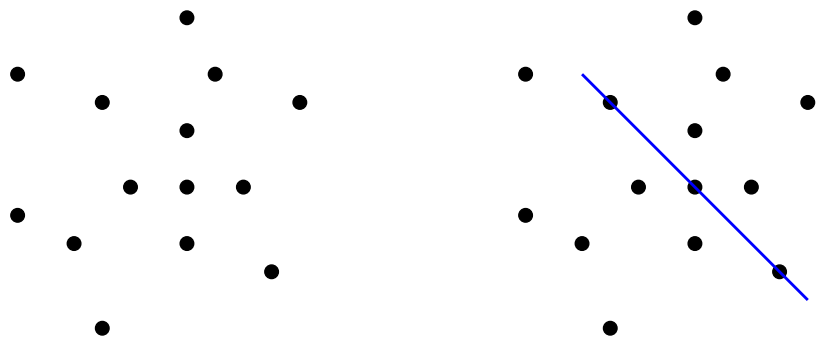
Problema da Colinearidade Não Horizontal (COL)

Entrada:

- conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ de n pontos no plano

Saída:

- determinar se três pontos estão em alguma reta não horizontal



Observações:

- pode ser resolvido em tempo $O(n^2)$
- acredita-se que $\Omega(n^2)$ é cota inferior

3SUM $\leqslant_n$ COL

Reduzindo 3SUM $\leqslant_n$ COL:

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

$3SUM \leqslant_n COL$

Reduzindo $3SUM \leqslant_n COL$:

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

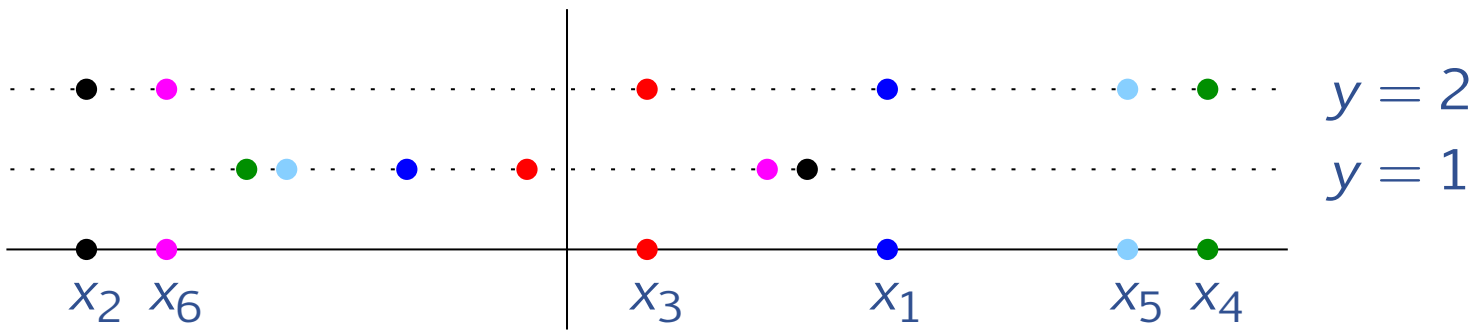
$$I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

3SUM $\leqslant_n$ COL

Reduzindo 3SUM $\leqslant_n$ COL:

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$



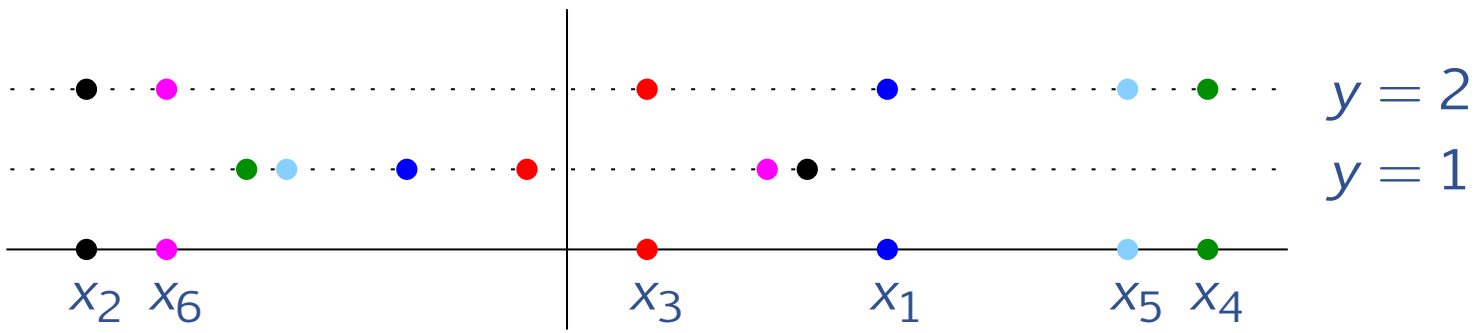
Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$

3SUM $\leqslant_n$ COL

Reduzindo 3SUM $\leqslant_n$ COL:

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$



Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$

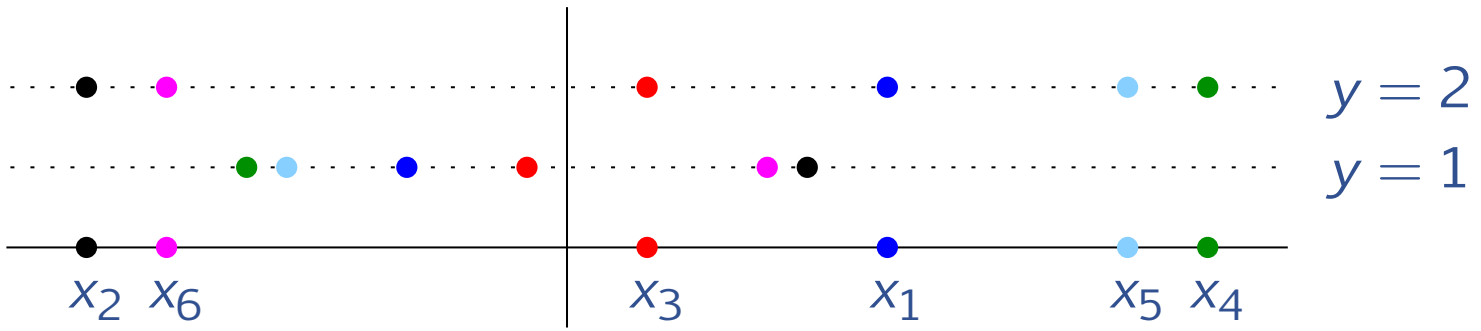
3. Resolva I_{COL} e obtenha S_{COL}.

$3SUM \leqslant_n COL$

Reduzindo $3SUM \leqslant_n COL$:

1. Considere instância $I_{3SUM} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Construa instância

$$I_{COL} = \{(x_i, 0), (-x_i/2, 1), (x_i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$



Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$

3. Resolva I_{COL} e obtenha S_{COL}.
4. Se a resposta S_{COL} for SIM, responda SIM;
   mas se a resposta S_{COL} for NÃO, responda NÃO.

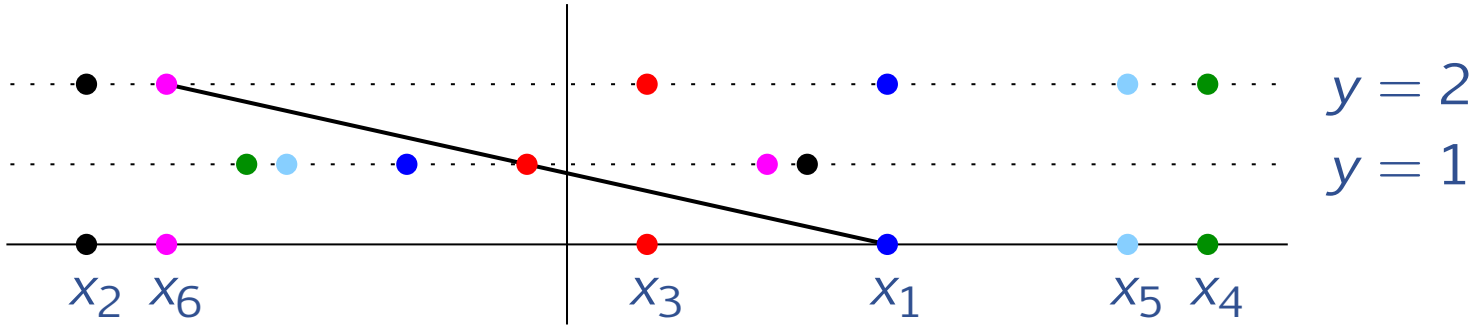
3SUM $\leqslant_n$ COL (cont)

- A solução de I_{COL} (se houver) é uma tripla de pontos colineares. Claramente, cada um desses pontos deve estar em um dos eixos horizontais. Ou seja, tem a forma:

$$(x_i, 0), (-x_j/2, 1), (x_k, 2).$$

  Portanto, $x_i + x_j + x_k = 0$.

- De modo análogo, se $x_i + x_j + x_k = 0$, então os pontos citados são colineares.



Exemplo: $X = (4, -6, 1, 8, 7, -5)$

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

3SUM $\leqslant_n$ COL

- É claro que $\Omega(n)$ é uma cota inferior para 3SUM.
- E se houver cota inferior $\Omega(h(n))$ maior para 3SUM?
  - a redução gasta tempo $f(n) = O(n)$
  - nesse caso, $f(n) = o(h(n))$
  - então $\Omega(h(n))$ seria cota inferior para COL
- Mas só conhecemos a cota trivial $\Omega(n)$ para 3SUM.

Exercício

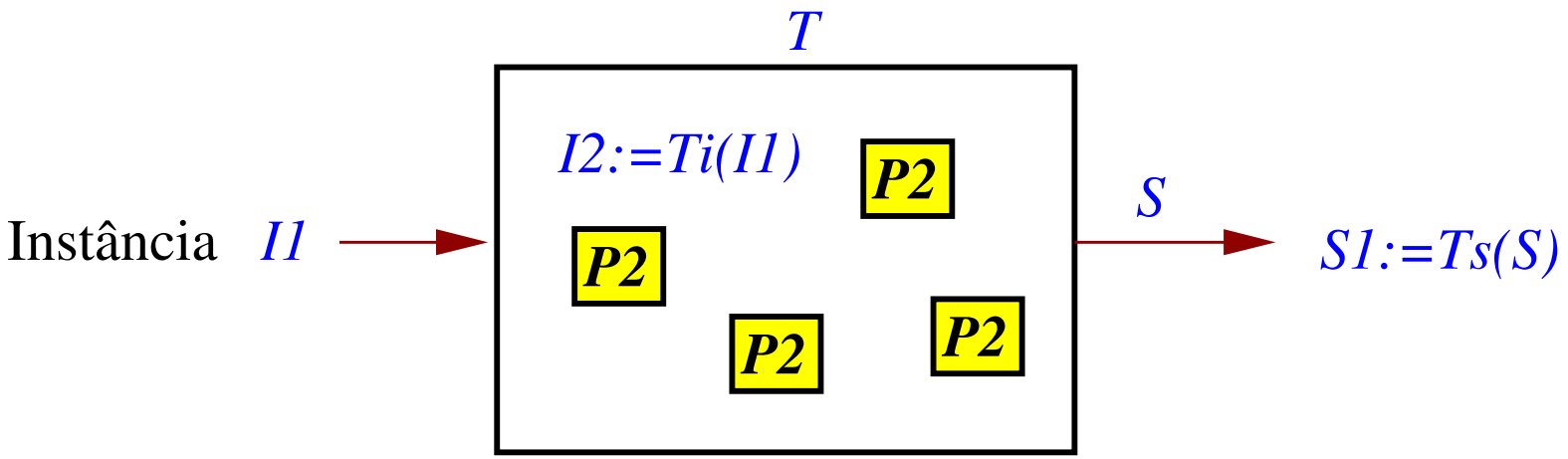
O problema 3SUMplus consiste em: dados uma sequência $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de reais e um valor real b, determinar se existem três índices distintos i, j e k tais que $x_i + x_j + x_k = b$.

1. Mostre que 3SUM $\leqslant_n$ 3SUMplus.
2. Mostre que 3SUMplus $\leqslant_n$ 3SUM.
3. Suponha que o Professor Sabit Udo descobriu uma cota inferior de $\Omega(n^{1,9})$ para 3SUMplus. Nesse caso, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?
   - (i) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUMplus.
   - (ii) Não existe algoritmo $O(n^{1,5})$ para 3SUM.
   - (iii) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUMplus.
   - (iv) Existe um algoritmo $O(n^{1,9})$ para 3SUM.

Outros exemplos de reduções

Redução de Turing

Existem reduções de P_1 para P_2, fazendo várias aplicações de P_2.



Exemplo de Redução de Turing

Problema de Multiplicação de Inteiros

Dados inteiros a e b, calcular $a \cdot b$.

Problema do Quadrado

Dados inteiro x, calcular x^2.

Proposição: Se pudermos fazer número constante de somas, subtrações e divisão por 2 então podemos reduzir Multiplicação de Inteiros para Quadrado.
Prova: Note que

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

Sistema de Representantes Distintos

Dada coleção de conjuntos $S_1, \ldots, S_k$ temos que $R = \{r_1, \ldots, r_k\}$ é um Sistema de Representantes Distintos (SRD) se $r_i \in S_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$.

Problema do Sistema de Representantes Distintos

Dada coleção de conjuntos $S_1, \ldots, S_k$, encontrar um SRD.

Sistema de Representantes Distintos

Considere os seguintes conjuntos:

Ecológicos: Ana, Alberto

Ruralistas: João, Alberto

Feministas: Ana, Maria

Então, {Ana, João, Maria} formam um SRD.

Não há SRD para a coleção abaixo:

- $S_1 = \{1, 2\}$
- $S_2 = \{3, 4\}$
- $S_3 = \{3, 4\}$
- $S_4 = \{1, 2, 4\}$
- $S_5 = \{2, 4\}$

Sistema de Representantes Distintos

Teorema de Hall

$S_1, \ldots, S_k$ tem um SRD se e somente se

$$\left| \left\{ S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \ldots \cup S_{i_m} \right\} \right| \geq m$$

para $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ e $1 \leq m \leq k$.

Isso é, qualquer subcoleção de m conjuntos tem pelo menos m itens distintos.

- Podemos usar o Teorema de Hall, de maneira direta, para testar todas possíveis subcoleções de conjuntos.
- Mas o número de possíveis subcoleções é $O(2^k)$.

Sistema de Representantes Distintos

Problema do Emparelhamento Máximo - EM

Dado grafo bipartido $G = (X, Y, E)$, onde X e Y são conjuntos de vértices e E é o conjunto de arestas, encontrar um emparelhamento (conjunto de arestas sem extremos em comum) de cardinalidade máxima.

Proposição: Problema do SRD $\preccurlyeq$ Problema do EM.

Dada coleção $S_1, \ldots, S_k$, instância de um SRD, sobre conjunto A,

defina grafo $G = (X, Y, E)$ onde

- $X = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$
- $Y = \{1, 2, \ldots, k\}$
- $E = \{(a, j) | \, a \in S_j \text{ e } 1 \leq j \leq k\}$.

Note que o SRD tem solução sse G tem emparelhamento de tamanho k. □

Sistema de Representantes Distintos

Problema do Emparelhamento Máximo - EM

Dado grafo bipartido $G = (X, Y, E)$, onde X e Y são conjuntos de vértices e E é o conjunto de arestas, encontrar um emparelhamento (conjunto de arestas sem extremos em comum) de cardinalidade máxima.

Proposição: Problema do SRD $\preccurlyeq$ Problema do EM.
Dada coleção $S_1, \ldots, S_k$, instância de um SRD, sobre conjunto A,
defina grafo $G = (X, Y, E)$ onde

- $X = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$
- $Y = \{1, 2, \ldots, k\}$
- $E = \{(a, j) |\ a \in S_j \text{ e } 1 \leq j \leq k\}$.

Note que o SRD tem solução sse G tem emparelhamento de tamanho k. □

Edição de String

As seguintes operações são possíveis em strings:

- Inserção de um caracter
- Remoção de um caracter
- Troca de um caracter por outro

Problema de Edição de String - ES

Dadas strings A e B, transformar A em B com o menor número de operações.

Edição de String

Se $A = babb$ e $B = bbc$, transformamos A em B com duas operações:

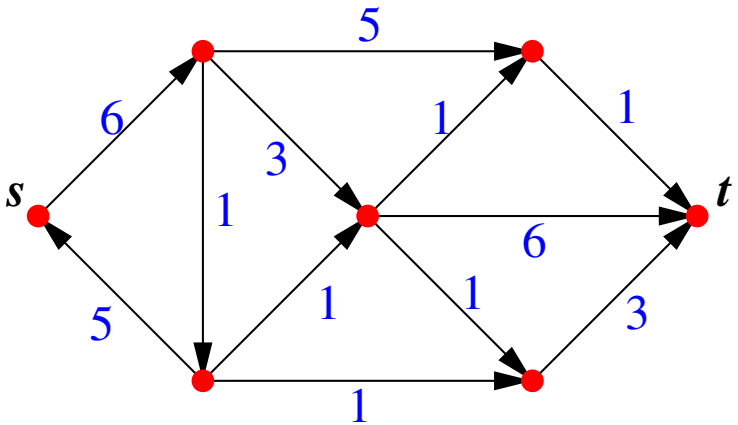
$$babb \Downarrow \text{ Remover } a$$
$$bbb \Downarrow \text{ Trocar último } b \text{ por } c$$
$$bbc$$

Exercicio: O Problema de Edição de String pode ser resolvido por programação dinâmica.

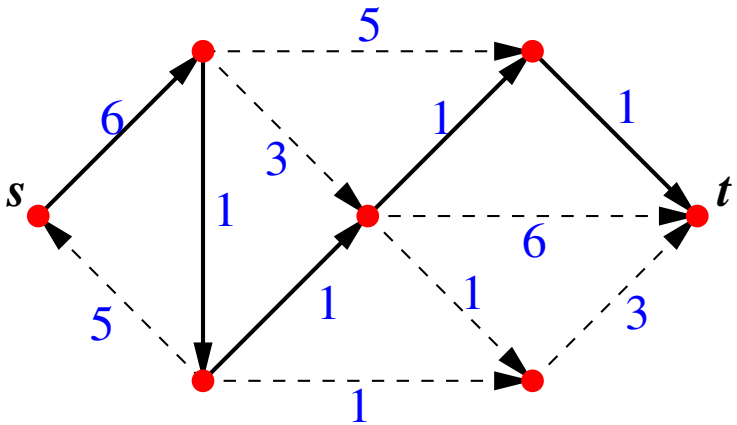
Edição de String

Problema do Caminho Mínimo em Grafo Orientado

Dado grafo orientado $G(V,E)$, onde cada aresta ij possui custo $c_{ij} > 0$, e vértices s e t, , encontrar um caminho de custo total mínimo de s a t em G.



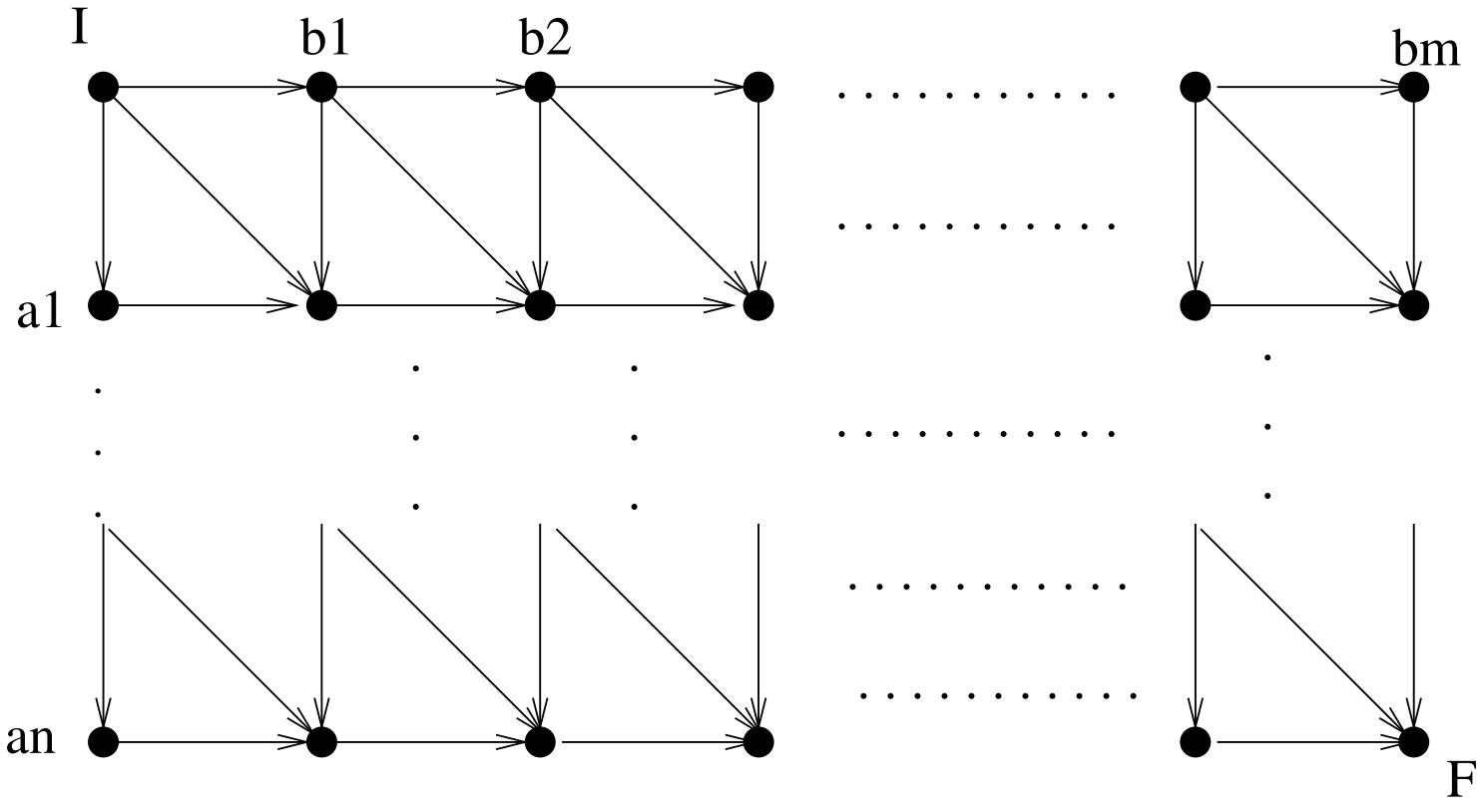
G(V,E,w)



Um caminho minimo de s para t

Edição de String

Proposição: Problema de Edição de String $\preccurlyeq$ Problema do Caminho Mínimo em grafos orientados.
Prova: Dadas strings $A = a_1 a_2 \ldots a_n$ e $B = b_1 b_2 \ldots b_m$ (instância do Problema ES) construímos um grafo da seguinte forma:



Edição de String

- Arestas horizontais correspondem a inserção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas verticais correspondem a remoção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas diagonais correspondem a uma troca e tem custo 1 caso os caracteres sejam diferentes, e 0 caso sejam iguais.
- O problema é encontrar um caminho mínimo do vértice I ao F.

Edição de String

- Arestas horizontais correspondem a inserção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas verticais correspondem a remoção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas diagonais correspondem a uma troca e tem custo 1 caso os caracteres sejam diferentes, e 0 caso sejam iguais.
- O problema é encontrar um caminho mínimo do vértice I ao F.

Edição de String

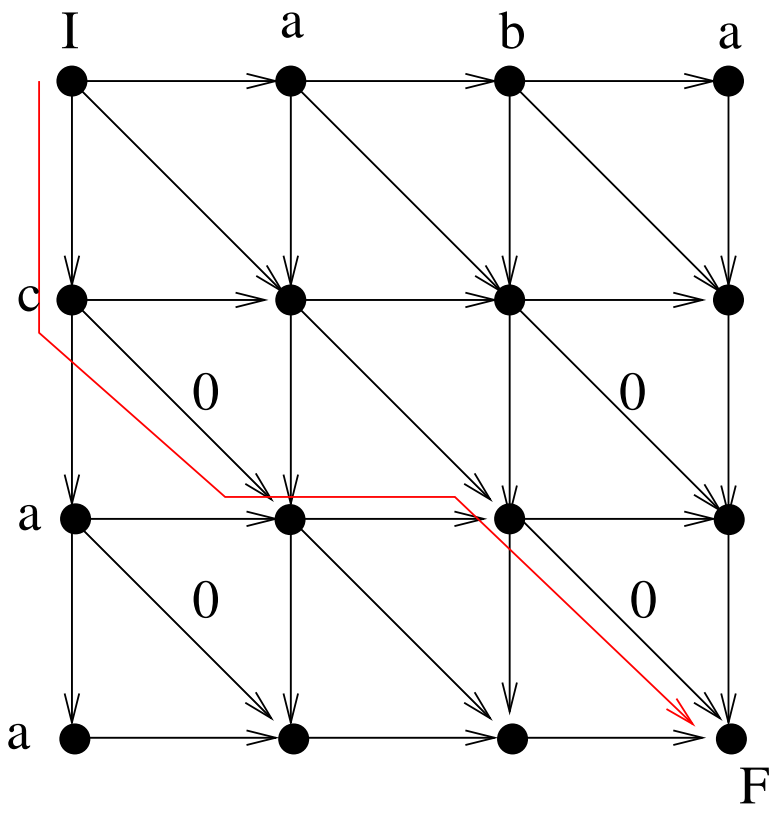
- Arestas horizontais correspondem a inserção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas verticais correspondem a remoção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas diagonais correspondem a uma troca e tem custo 1 caso os caracteres sejam diferentes, e 0 caso sejam iguais.
- O problema é encontrar um caminho mínimo do vértice I ao F.

Edição de String

- Arestas horizontais correspondem a inserção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas verticais correspondem a remoção de um caractere e possuem custo 1.
- Arestas diagonais correspondem a uma troca e tem custo 1 caso os caracteres sejam diferentes, e 0 caso sejam iguais.
- O problema é encontrar um caminho mínimo do vértice I ao F.

Edição de String

Dados strings $A = caa$ e $B = aba$ construa grafo G:



custo de edição é $2 = 1 + 0 + 1 + 0$

Edição de String

Temos que mostrar que um caminho mínimo em G de I até F corresponde a uma edição mínima.

- Dado uma edição mínima, a partir do caracter vazio temos 4 opções (inserir, remover, trocar/match) que correspondem as arestas no grafo.
- Uma edição de strings corresponde a um caminho e este por sua vez corresponde a uma edição.
- Portanto um caminho mínimo será uma edição mínima.

Edição de String

Temos que mostrar que um caminho mínimo em G de I até F corresponde a uma edição mínima.

- Dado uma edição mínima, a partir do caracter vazio temos 4 opções (inserir, remover, trocar/match) que correspondem as arestas no grafo.
- Uma edição de strings corresponde a um caminho e este por sua vez corresponde a uma edição.
- Portanto um caminho mínimo será uma edição mínima.

Edição de String

Temos que mostrar que um caminho mínimo em G de I até F corresponde a uma edição mínima.

- Dado uma edição mínima, a partir do caracter vazio temos 4 opções (inserir, remover, trocar/match) que correspondem as arestas no grafo.
- Uma edição de strings corresponde a um caminho e este por sua vez corresponde a uma edição.
- Portanto um caminho mínimo será uma edição mínima.

Código de Huffman: Compressão de dados

Relembrando:

- Codificação para compressão de dados
- Cada caractere deve ter representação binária única
- Há codificações com número de bits fixo e variável
- Codificação Prefixa: Codificação de um caracter não é prefixo de outro
- Exemplo de codificação prefixa:

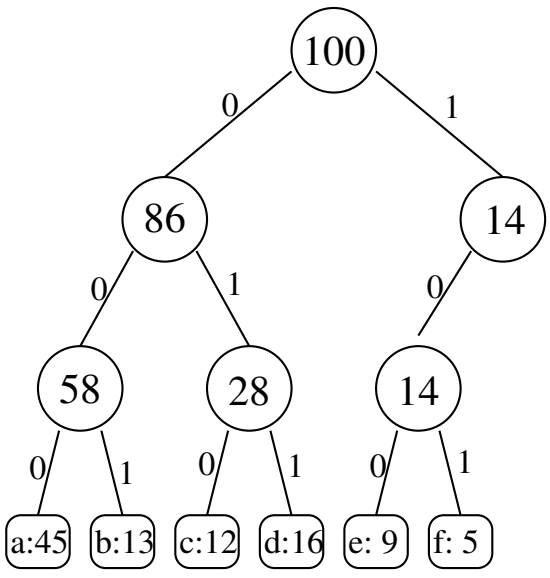
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
0	101	100	111	1101	1100

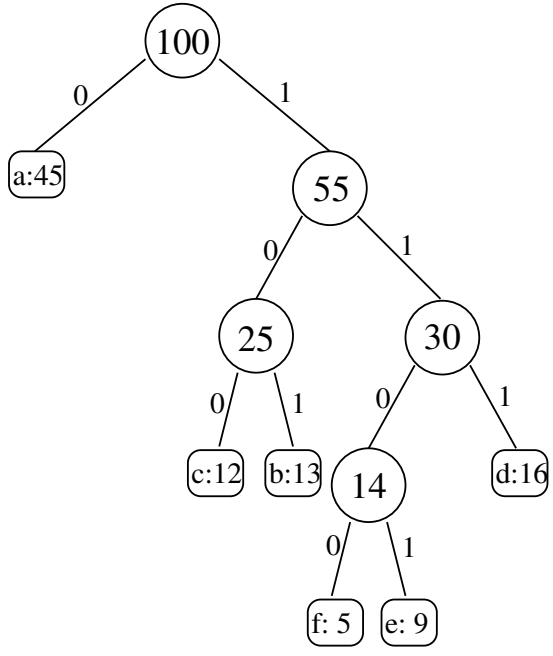
- Codificação prefixa pode ser representada por uma árvore de Huffman
- Caracteres são representados nas folhas

Exemplo

Considere 100.000 caracteres com frequências e codificações:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Frequência da letra	45	13	12	16	9	5
Codificação usando 3 bits	000	001	010	011	100	101
Codificação de tamanho variável	0	101	100	111	1101	110





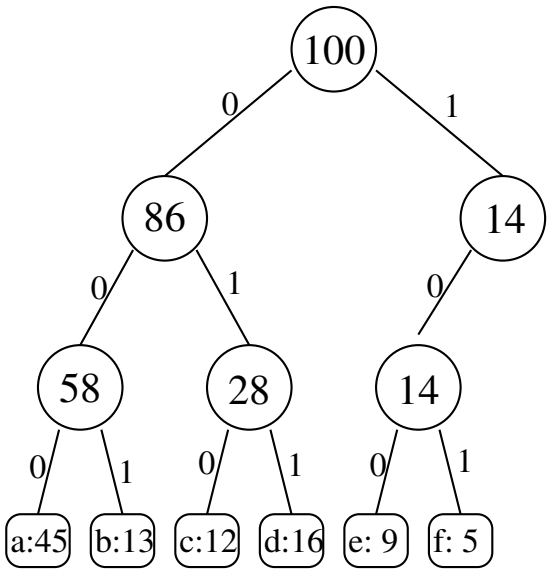
Codificação Fixa: $100.000 \times 3 = 300.000$ bits

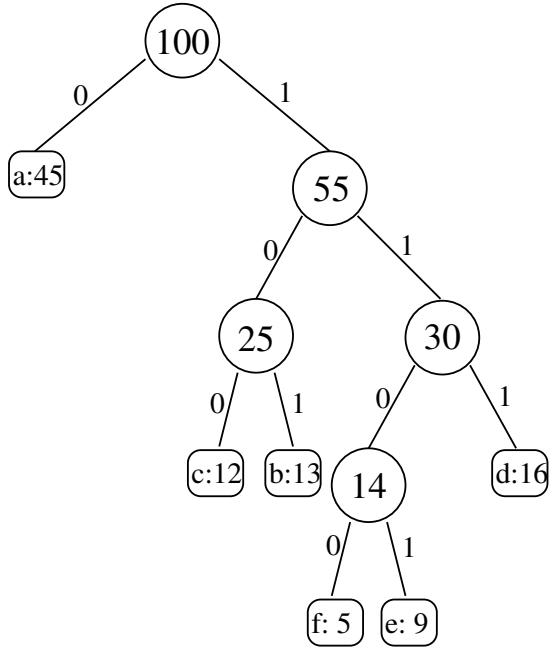
Codificação Variável: $\sum_{s \in A} freq(s) \cdot 100.000 \cdot |codigo(s)| = 224.000$ bits

Exemplo

Considere 100.000 caracteres com frequências e codificações:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
Frequência da letra	45	13	12	16	9	5
Codificação usando 3 bits	000	001	010	011	100	101
Codificação de tamanho variável	0	101	100	111	1101	110





Codificação Fixa: $100.000 \times 3 = 300.000$ bits

Codificação Variável: $\sum_{s \in \mathcal{A}} freq(s) \cdot 100.000 \cdot |codigo(s)| = 224.000$ bits

Código de Huffman

Dado texto com caracteres $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

- cada caractere C_i tem frequência f_i,
- obter código S_i para C_i, onde $s_i = |S_i|$ e
- minimizamos $c = \sum_{i=1}^{n} s_i f_i$
- Os códigos devem satisfazer a restrição de prefixo.
- Construa árvore de Huffman correspondente a codificação

Teorema: Existe um algoritmo que calcula a árvore ótima para um conjunto de caracteres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ com frequências $f_1, f_2, \ldots, f_n$ em tempo $O(n \log n)$.

Código de Huffman

Dado texto com caracteres $C_1, C_2, \ldots, C_n$,

- cada caractere C_i tem frequência f_i,
- obter código S_i para C_i, onde $s_i = |S_i|$ e
- minimizamos $c = \sum_{i=1}^{n} s_i f_i$
- Os códigos devem satisfazer a restrição de prefixo.
- Construa árvore de Huffman correspondente a codificação

Teorema: Existe um algoritmo que calcula a árvore ótima para um conjunto de caracteres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ com frequências $f_1, f_2, \ldots, f_n$ em tempo $O(n \log n)$.

Código de Huffman

Faremos uma redução do problema de ordenação de inteiros para o código de Huffman.
Proposicao: Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_n$ caracteres com frequências $f_1, f_2, \ldots, f_n$ onde

$$\sum_{i=1}^{j-1} f_i < f_j \text{ para cada } j = 2, \ldots, n.$$

Então a árvore de Huffman ótima terá C_n como folha no nível 1, C_{n-1} como folha no nível 2, e assim sucessivamente com C_1 e C_2 no nível $n-1$.

Código de Huffman

Prova: Seja T^* uma árvore ótima para uma instância como a enunciada. Suponha por absurdo que em T^* o caractere C_n não esteja no nível 1. Adicione uma nova raiz em T^* retirando C_n do seu lugar e colocando este como filho da nova raiz. T^* também é adicionada a esta nova raiz.

O custo da nova árvore diminuiu de pelo menos f_n e aumentou de

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i.$$

Portanto T^* não era ótima o que é um absurdo. Podemos repetir o mesmo raciocínio para os demais caracteres $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots$. □

Código de Huffman

Prova: Seja T^* uma árvore ótima para uma instância como a enunciada. Suponha por absurdo que em T^* o caractere C_n não esteja no nível 1. Adicione uma nova raiz em T^* retirando C_n do seu lugar e colocando este como filho da nova raiz. T^* também é adicionada a esta nova raiz.
O custo da nova árvore diminuiu de pelo menos f_n e aumentou de

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i.$$

Portanto T^* não era ótima o que é um absurdo. Podemos repetir o mesmo raciocínio para os demais caracteres $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots$. □

Código de Huffman

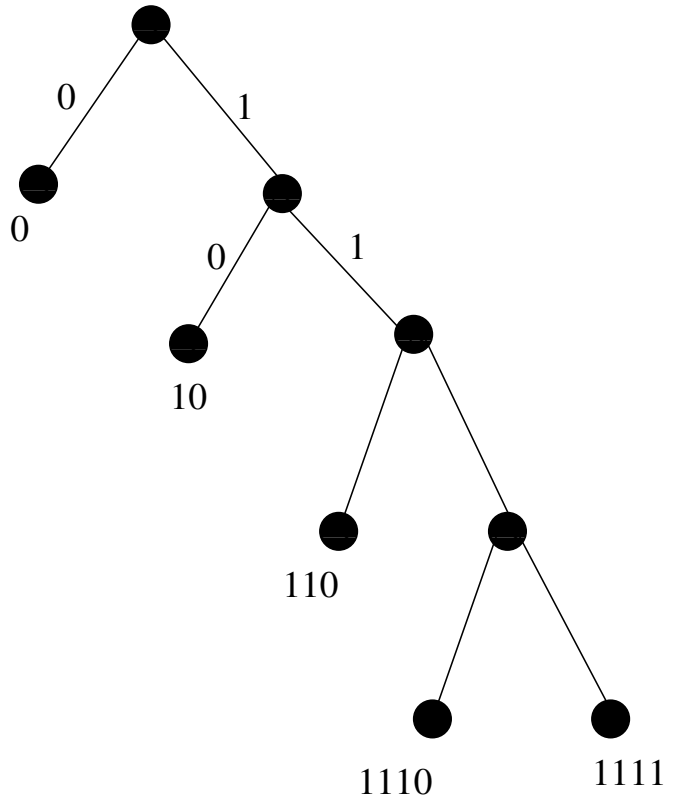
Prova: Seja T^* uma árvore ótima para uma instância como a enunciada. Suponha por absurdo que em T^* o caractere C_n não esteja no nível 1. Adicione uma nova raiz em T^* retirando C_n do seu lugar e colocando este como filho da nova raiz. T^* também é adicionada a esta nova raiz.
O custo da nova árvore diminuiu de pelo menos f_n e aumentou de

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i.$$

Portanto T^* não era ótima o que é um absurdo. Podemos repetir o mesmo raciocínio para os demais caracteres $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots$. □

Código de Huffman

- Instâncias baseadas no último teorema terão uma árvore de Huffman com a seguinte forma:



Código de Huffman

Tentativa:

- Considere uma instância para o problema de ordenação com números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com uma diferença grande de valores entre eles:

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i < x_j \text{ para } j = 2, \ldots, n$$

- Crie uma instância para o problema de códigos de Huffman com caracteres C_i e frequência x_i para $i = 1, \ldots, n$.
- Baseado no teorema, a solução será uma árvore onde podemos facilmente ordenar os números $x_1, \ldots, x_n$.

O que está faltando?

Código de Huffman

Tentativa:

- Considere uma instância para o problema de ordenação com números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com uma diferença grande de valores entre eles:

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i < x_j \text{ para } j = 2, \ldots, n$$

- Crie uma instância para o problema de códigos de Huffman com caracteres C_i e frequência x_i para $i = 1, \ldots, n$.
- Baseado no teorema, a solução será uma árvore onde podemos facilmente ordenar os números $x_1, \ldots, x_n$.

O que está faltando?

Código de Huffman

Tentativa:

- Considere uma instância para o problema de ordenação com números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com uma diferença grande de valores entre eles:

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i < x_j \text{ para } j = 2, \ldots, n$$

- Crie uma instância para o problema de códigos de Huffman com caracteres C_i e frequência x_i para $i = 1, \ldots, n$.
- Baseado no teorema, a solução será uma árvore onde podemos facilmente ordenar os números $x_1, \ldots, x_n$.

O que está faltando?

Código de Huffman

Tentativa:

- Considere uma instância para o problema de ordenação com números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com uma diferença grande de valores entre eles:

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i < x_j \text{ para } j = 2, \ldots, n$$

- Crie uma instância para o problema de códigos de Huffman com caracteres C_i e frequência x_i para $i = 1, \ldots, n$.
- Baseado no teorema, a solução será uma árvore onde podemos facilmente ordenar os números $x_1, \ldots, x_n$.

O que está faltando?

Código de Huffman

Caso geral:

- Ao fazer a redução $P_1 \leqslant P2$ devemos considerar uma instância genérica de P_1.
- Podemos salvar a nossa redução considerando uma entrada $x_1, \ldots, x_n$ qualquer para o problema de ordenação.
- Neste caso usamos frequências $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$.
- Note que para qualquer valor j temos

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2^i < 2^j$$

- Portanto a instância criada gera uma árvore como a desejada.

Código de Huffman

Caso geral:

- Ao fazer a redução $P_1 \leqslant P2$ devemos considerar uma instância genérica de P_1.
- Podemos salvar a nossa redução considerando uma entrada $x_1, \ldots, x_n$ qualquer para o problema de ordenação.
- Neste caso usamos frequências $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$.
- Note que para qualquer valor j temos

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2^i < 2^j$$

- Portanto a instância criada gera uma árvore como a desejada.

Código de Huffman

Caso geral:

- Ao fazer a redução $P_1 \leqslant P2$ devemos considerar uma instância genérica de P_1.
- Podemos salvar a nossa redução considerando uma entrada $x_1, \ldots, x_n$ qualquer para o problema de ordenação.
- Neste caso usamos frequências $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$.
- Note que para qualquer valor j temos

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2^i < 2^j$$

- Portanto a instância criada gera uma árvore como a desejada.

Código de Huffman

Caso geral:

- Ao fazer a redução $P_1 \leqslant P2$ devemos considerar uma instância genérica de P_1.
- Podemos salvar a nossa redução considerando uma entrada $x_1, \ldots, x_n$ qualquer para o problema de ordenação.
- Neste caso usamos frequências $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$.
- Note que para qualquer valor j temos

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2^i < 2^j$$

- Portanto a instância criada gera uma árvore como a desejada.

Código de Huffman

Caso geral:

- Ao fazer a redução $P_1 \leqslant P2$ devemos considerar uma instância genérica de P_1.
- Podemos salvar a nossa redução considerando uma entrada $x_1, \ldots, x_n$ qualquer para o problema de ordenação.
- Neste caso usamos frequências $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$.
- Note que para qualquer valor j temos

$$\sum_{i=1}^{j-1} 2^i < 2^j$$

- Portanto a instância criada gera uma árvore como a desejada.