

Combinatória Poliédrica

Faces

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

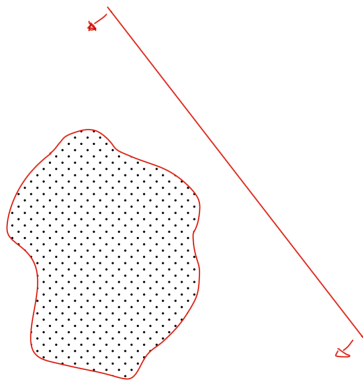
Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:15

Inequação válida

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

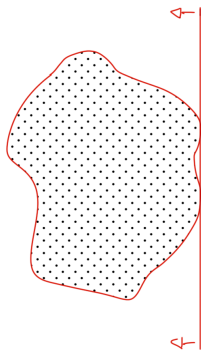
Se $S \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha\}$ então $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para S



Hiperplano de suporte

Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \alpha\}$

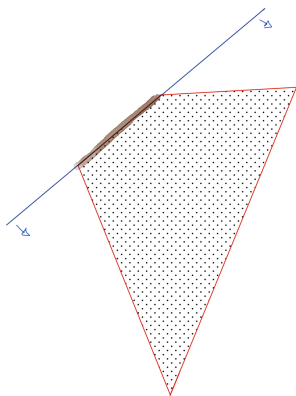
Se $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ para todo $\mathbf{x} \in S$ e $S \cap H \neq \emptyset$ então H é um hiperplano de suporte de S



Face

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro

Um conjunto $F \subseteq P$ é uma **face** de P se existe uma inequação válida $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ para P tal que $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \alpha\}$



Definições

F é

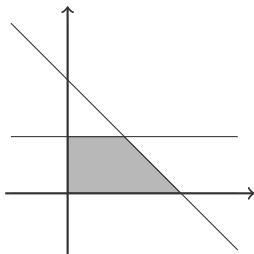
- face própria se $F \neq P$
- face não-trivial se $\emptyset \neq F \neq P$

Se $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para P então dizemos que $P \cap \{x: \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \alpha\}$ é uma face **induzida** ou **definda** por $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$

Exercício. Prove que faces de poliedros também são poliedros.

Exemplos de faces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

- (a) P é uma face de si mesmo;
- (b) \emptyset é uma face de P ;
- (c) Se $F = \{x \in P : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \alpha\}$ é uma face não-trivial de P , então $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$

Prova. Exercício.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

- (a) a inequação $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \gamma$ é válida para P se e somente se $\gamma \geq z^*$;
- (b) $z^* < +\infty$ implica que $F = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z^*\}$ é uma face não-vazia de P e $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z^*\}$ é um hiperplano de suporte de P (caso $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$);

Esse teorema é base para o Algoritmo Simplex!

- As soluções ótimas de um PL estão nas faces do poliedro

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, queremos determinar quais inequações de $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ definem uma face F

Seja $\text{ind}(\mathbf{A})$ o conjunto de índices das linhas de \mathbf{A}

Definimos o **conjunto igualdade** de F como sendo

$$\text{ig}(F) = \{i \in \text{ind}(\mathbf{A}) : \mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} = b_i \text{ para todo } \mathbf{x} \in F\}.$$

Para $I \subseteq \text{ind}(\mathbf{A})$, seja

$$\text{fa}(I) = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{A}_{I*}\mathbf{x} = \mathbf{b}_I\}.$$

O conjunto $\text{fa}(I)$ é chamado de **face induzida** por I

Exercício. Considere $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ e $I \subseteq \text{ind}(\mathbf{A})$. Prove que $\text{fa}(I)$ é uma face de P .

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) F é uma face de P ;
- (b) existe $I \subseteq \text{ind}(\mathbf{A})$ tal que $F = \text{fa}(I)$;
- (c) $F = \text{fa}(\text{ig}(F))$.

Ou seja, para obter uma face de um poliedro basta escolher algumas inequações de $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ e exigir que satisfaçam com igualdade.

Corolário. Se $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, então P tem no máximo $2^m + 1$ faces.