Combinatória Poliédrica
Vértices e Extremais

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:14

Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e F uma face de P

Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e F uma face de P

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ para algum $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então F é um vértice de P

Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e F uma face de P

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ para algum $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então F é um vértice de P

Se existem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tais que

Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e F uma face de P

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ para algum $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então F é um vértice de P

Se existem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tais que

- $F = \boldsymbol{x} + \mathrm{lin}(\{\boldsymbol{z}\})$, então F é uma reta extremal de P

Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e F uma face de P

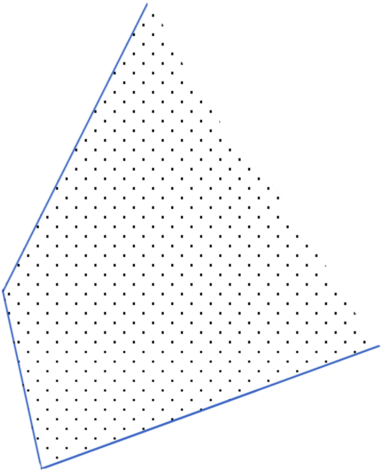
Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ para algum $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então F é um vértice de P

Se existem $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tais que

- $F = \boldsymbol{x} + \mathrm{lin}(\{\boldsymbol{z}\})$, então F é uma reta extremal de P
- $F = \boldsymbol{x} + \mathrm{cone}(\{\boldsymbol{z}\})$, então F é um raio extremal de P

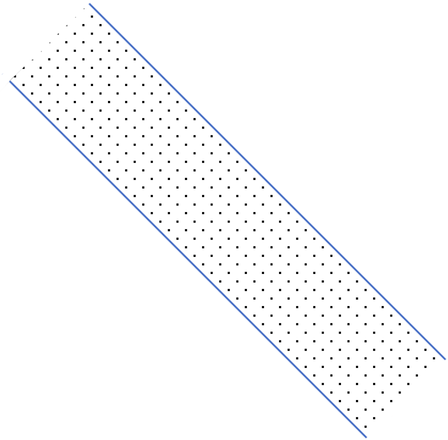
Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Exemplo de Vértices e Raios Extremais



Vértice, Reta Extremal e Raio Extremal

Exemplo de Retas Extremais



Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

- Vértices são faces de dimensão 0

Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

- Vértices são faces de dimensão 0

Retas e raios extremais são faces de dimensão 1

Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

- Vértices são faces de dimensão 0

Retas e raios extremais são faces de dimensão 1

Faces de dimensão 1 são chamadas de arestas

Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

- Vértices são faces de dimensão 0

Retas e raios extremais são faces de dimensão 1

Faces de dimensão 1 são chamadas de arestas

- Além de retas e raios extremais

Dimensões

Se $F = \{\boldsymbol{x}\}$ é um vértice de P, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é um vértice de P

- Vértices são faces de dimensão 0

Retas e raios extremais são faces de dimensão 1

Faces de dimensão 1 são chamadas de arestas

- Além de retas e raios extremais
- arestas podem ser segmentos de retas

Teorema

Teorema. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone poliédrico. Neste caso,

Teorema

Teorema. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone poliédrico. Neste caso,

(a) se $\boldsymbol{x}$ é um vértice de C, então $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

Teorema

Teorema. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um cone poliédrico. Neste caso,

(a) se $\boldsymbol{x}$ é um vértice de C, então $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

(b) F é um raio extremal de C se e só se existe $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n\{0\}$ tal que $F = \operatorname{cone}(\{\boldsymbol{z}\})$ é face de C.

Lema

Lema. Seja F uma face não-vazia de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, $I = \mathrm{ig}(F)$ e $B = \{\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^k\}$ uma base do núcleo de $\boldsymbol{A}_I$. Então, para cada ponto interior $\boldsymbol{x} \in F$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{y}^j$ e $\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}^j \in P$ para $j = 1, \ldots, k$.

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

(b) $\{\boldsymbol{x}\}$ é uma face de P de dimensão 0;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

(b) $\{\boldsymbol{x}\}$ é uma face de P de dimensão 0;

(c) $\boldsymbol{x}$ não é combinação convexa própria de elementos de P, ou seja, para quaisquer $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$, $0 < \lambda < 1$, então $\boldsymbol{x} \neq \lambda \boldsymbol{y} + (1 - \lambda)\boldsymbol{z}$;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

(b) $\{\boldsymbol{x}\}$ é uma face de P de dimensão 0;

(c) $\boldsymbol{x}$ não é combinação convexa própria de elementos de P, ou seja, para quaisquer $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$, $0 < \lambda < 1$, então $\boldsymbol{x} \neq \lambda \boldsymbol{y} + (1 - \lambda)\boldsymbol{z}$;

(d) $P \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ é convexo;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

(b) $\{\boldsymbol{x}\}$ é uma face de P de dimensão 0;

(c) $\boldsymbol{x}$ não é combinação convexa própria de elementos de P, ou seja, para quaisquer $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$, $0 < \lambda < 1$, então $\boldsymbol{x} \neq \lambda \boldsymbol{y} + (1 - \lambda)\boldsymbol{z}$;

(d) $P \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ é convexo;

(e) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ig}(\{\boldsymbol{x}\})*}) = n$;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro e $\boldsymbol{x} \in P$. São equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é vértice de P;

(b) $\{\boldsymbol{x}\}$ é uma face de P de dimensão 0;

(c) $\boldsymbol{x}$ não é combinação convexa própria de elementos de P, ou seja, para quaisquer $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$, $0 < \lambda < 1$, então $\boldsymbol{x} \neq \lambda \boldsymbol{y} + (1 - \lambda)\boldsymbol{z}$;

(d) $P \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ é convexo;

(e) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ig}(\{\boldsymbol{x}\})^*}) = n$;

(f) existe $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $\boldsymbol{x}$ é a única solução ótima do problema $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{y} \in P\}$.

Suporte

Se $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, então o suporte de $\boldsymbol{x}$, denotado por $\sup(\boldsymbol{x})$ é

$$\sup(\boldsymbol{x}) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \neq 0\}$$

Teorema

Teorema. Para $\boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema

Teorema. Para $\boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é um vértice de $P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

Teorema

Teorema. Para $\boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é um vértice de $P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{*\,\mathrm{sup}(\boldsymbol{x})}) = |\,\mathrm{sup}(\boldsymbol{x})|$;

Teorema

Teorema. Para $\boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\boldsymbol{x}$ é um vértice de $P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{*\,\mathrm{sup}(\boldsymbol{x})}) = |\,\mathrm{sup}(\boldsymbol{x})|$;

(c) os vetores-coluna $\boldsymbol{A}_{*j}$, $j \in \mathrm{sup}(\boldsymbol{x})$, são linearmente independentes.

Poliedro pontudo

Nem todo poliedro possue vértice

Poliedro pontudo

Nem todo poliedro possue vértice

- Por exemplo, pegue a interseção de menos do que n semi-espaços do $\mathbb{R}^n$

Poliedro pontudo

Nem todo poliedro possue vértice

- Por exemplo, pegue a interseção de menos do que n semi-espaços do $\mathbb{R}^n$

Um poliedro é pontudo se possui pelo menos um vértice

Cone recessional

Se um poliedro P não é limitado, ele contém alguma semi-reta.

Cone recessional

Se um poliedro P não é limitado, ele contém alguma semi-reta. O conjunto de todas as direções de semi-retas contidas em P formam um cone, chamado de cone recessional de P.

Cone recessional

Se um poliedro P não é limitado, ele contém alguma semi-reta.
O conjunto de todas as direções de semi-retas contidas em P formam um cone, chamado de cone recessional de P.

$$\operatorname{rec}(P) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} \in P \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P, \lambda \geq 0\}$$

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\text{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

(c) toda face não-vazia de P é um poliedro pontudo;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

(c) toda face não-vazia de P é um poliedro pontudo;

(d) P não contém nenhuma reta;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

(c) toda face não-vazia de P é um poliedro pontudo;

(d) P não contém nenhuma reta;

(e) $\mathrm{rec}(P)$ é pontudo, isto é, 0 é vértice de $\mathrm{rec}(P)$;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

(c) toda face não-vazia de P é um poliedro pontudo;

(d) P não contém nenhuma reta;

(e) $\mathrm{rec}(P)$ é pontudo, isto é, 0 é vértice de $\mathrm{rec}(P)$;

(f) $\mathrm{rec}(P)$ não contém nenhuma reta;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. São equivalentes:

(a) P é pontudo;

(b) $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A}) = n$;

(c) toda face não-vazia de P é um poliedro pontudo;

(d) P não contém nenhuma reta;

(e) $\mathrm{rec}(P)$ é pontudo, isto é, 0 é vértice de $\mathrm{rec}(P)$;

(f) $\mathrm{rec}(P)$ não contém nenhuma reta;

Prova. Exercício.

Corolários

Corolário. Se $P = P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolários

Corolário. Se $P = P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolário. Se P é um politopo, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolários

Corolário. Se $P = P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolário. Se P é um politopo, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolário. Se P é pontudo e $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}$ tem uma solução ótima, então existe um vértice de P que é solução ótima.

Corolários

Corolário. Se $P = P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolário. Se P é um politopo, então $P \neq \emptyset$ se e só se P é pontudo.

Corolário. Se P é pontudo e $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ tem uma solução ótima, então existe um vértice de P que é solução ótima.

Esses Corolários são essenciais para explicar o método simplex!