Combinatória Poliédrica
Poliedro dos Caminhos e Poliedro dos Cortes

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-27 20:48

Caminho Mínimo

Caminho Mínimo: Dado um grafo orientado $D = (V, A)$, dois vértices distintos s, t em V e um função de custo $c \colon A \to \mathbb{R}$, achar um caminho P de s a t em D tal que $c(P)$ seja mínimo.

Podemos considerar o seguinte poliedro:

$$P_{\text{Cam}}(G) = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^P \in \mathbb{R}^A \colon P \text{ é um } (s,t)\text{-caminho em } D\}$$

O problema é NP-difícil quando c pode ser negativo

Dificilmente $P_{\text{Cam}}(G)$ tem uma descrição que possa ser separada em tempo polinomial

Caminho Mínimo sem Custo Negativo

Quando os custos são não negativos, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial

- Ex: Algoritmo de Dijkstra
- Na verdade, basta não ter ciclo de custo negativo

Vamos considerar então o seguinte politopo:

$P_{\text{Cam}+}(G) = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^P \in \mathbb{R}^A \colon P$ contém um (s,t)-caminho em $D\}$

Note que soluções ótimas de $P_{\text{Cam}+}(G)$ para custos não negativos são, sem perda de generalidade, caminhos mínimos

Teorema

Seja $W \subseteq V$:

- $\delta^+(W)$ é o conjunto de arcos com origem em W e extremidade em $V \setminus W$
- $\delta^+(W)$ é um corte do digrafo
- Se $s \in W$ e $t \notin W$, é um (s,t)-corte

Teorema. Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e s, t vértices distintos de V. Então o politopo $P_{\text{Cam}+}(G)$ é descrito pelo seguinte sistema de inequações:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_a \leq 1 & \qquad \forall a \in A \\ x(\delta^+(W)) \geq 1 & \qquad \forall W \subseteq V, s \in W, t \notin W \end{aligned}$$

Como separar a desigualdade $x(\delta^+(W)) \geq 1$?

Separação

Como separar a desigualdade $x(\delta^+(W)) \geq 1$?

(s,t)-**Corte Mínimo**: Dado um grafo orientado $D = (V, A)$, dois vértices distintos s, t em V e um função de capacidade $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um (s,t)-corte S tal que $c(S)$ seja mínimo.

Basta considerar x como capacidades nos arcos e encontrar um (s,t)-Corte Mínimo

- Se o valor for menor que 1, então a desigualdade é violada
- Caso contrário, a desigualdade é válida para todo corte
- Pode ser resolvido em tempo polinomial

Poliedro dos Cortes

$$P_{\mathrm{Cor}+}(G) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^F \in \mathbb{R}^A \colon F \text{ contém um } (s,t)\text{-corte em } D\}$$

Teorema. Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado e s, t vértices distintos de V. Então o politopo $P_{\mathrm{Cor}+}(G)$ é descrito pelo seguinte sistema de inequações:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_a \leq 1, & \qquad \forall a \in A \\ x(P) \geq 1, & \qquad \forall (s,t)\text{-caminho } P \text{ em } D \end{aligned}$$

Como separar a desigualdade $x(P) \geq 1$?

- Caminho mínimo...

Problema do Fluxo Máximo

Fluxo Máximo: Dado um grafo orientado $D = (V, A)$, dois vértices distintos s, t em V, uma função capacidade $c\colon A \to \mathbb{R}_+$, encontrar em D um (s,t)-fluxo de valor máximo.

Mas o que é um fluxo? E qual é o valor de um fluxo?

- Mais fácil apresentar o PL

$$\begin{aligned} &\max x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) & \\ &x(\delta^+(v)) = x(\delta^-(v)) & \forall v \in V \setminus \{s,t\}, \\ &0 \le x_a \le c_a & \forall a \in A \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^A$ que satisfaz as restrições acima é chamado de (s,t)-fluxo

- Seu valor é $x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s))$

Fluxo Máximo pode ser resolvido em tempo polinomial

- Ex: Algoritmo de Ford e Fulkerson

Fluxo Inteiro

Algoritmo de Ford e Fulkerson resolve Fluxo Máximo

- Em tempo polinomial
- E se c for inteiro, encontra um fluxo inteiro

Mais que isso, o poliedro é inteiro quando c é inteiro

- De fato, a matriz de restrições é TU!

Dual do Fluxo Máximo

Se calcularmos o dual de

$$\begin{aligned} &\max x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) \\ &x(\delta^+(v)) = x(\delta^-(v)) \qquad && \forall v \in V \setminus \{s,t\}, \\ &\quad 0 \le x_a \le c_a && \forall a \in A \end{aligned}$$

obtemos um PL cuja interpreção é exatamente a do problema do (s,t)-corte mínimo.

Teorema. Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, s, t vértices distintos de V, e $c\colon A \to \mathbb{R}_+$ uma função de capacidade. Então, o valor máximo de um (s,t)-fluxo é igual à capacidade mínima de um (s,t)-corte.

Voltando a Capacidades Inteiras

Considere $c_a \in \mathbb{Z}_+$ para todo $a \in A$

Se $\boldsymbol{x}$ é um (s,t)-fluxo inteiro de valor k,

- então existem k (s,t)-caminhos em D
- tal que o número de vezes que um arco a aparece nesses caminhos é igual a x_a
- ou seja, menor ou igual a c_a

Teorema. Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, s, t dois vértices distintos de D, e $c\colon A \to \mathbb{Z}_+$ uma função de capacidade. Então, a capacidade mínima de um (s,t)-corte é igual ao número máximo de (s,t)-caminhos, tais que, cada arco a está contido em no máximo c_a desses caminhos.

Teorema

Teorema. Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, s, t dois vértices distintos de D, e $c\colon A \to \mathbb{Z}_+$ uma função de capacidade. Então, a capacidade mínima de um (s, t)-corte é igual ao número máximo de (s, t)-caminhos, tais que, cada arco a está contido em no máximo c_a desses caminhos.

No caso particular em que $c_a = 1$ para todo $a \in A$, temos o seguinte teorema

Teorema (Teorema de Menger). Seja $D = (V, A)$ um grafo orientado, s, t dois vértices distintos de D, e $c\colon A \to \mathbb{Z}_+$ uma função de capacidade. Então, a cardinalidade mínima de um (s, t)-corte é igual ao número máximo de (s, t)-caminhos dois a dois disjuntos nos arcos.