Combinatória Poliédrica
Poliedro do Caixeiro Viajante

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-08 08:53

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão
- Quando G é um digrafo, temos a versão assimétrica

Vamos considerar também que G é um grafo completo

- Não há perda de generalidade nisso
- Considere que aresta não existentes têm custo muito grande

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n :$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\text{Ham}} = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

- Mas podemos mesmo considerar ele?
- Se eu otimizar, posso não ter um ciclo como resposta...
- Ou será que dá para lidar com isso de alguma forma?

Lema. $\dim(P^n_{\text{Ham}}) = |A_n| = n(n-1)/2$ para $n \geq 3$.

Teoremas

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \leq 1$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teorema. Para todo vértice v em K_n, $n \geq 4$, a inequação $x(\delta(v)) \leq 2$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Ou seja, essas inequações são válidas para P^n_{Ham}:

$$x(A_n(S)) \leq |S|-1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

Essas inequações são chamadas de restrições de eliminação de subciclos

Teorema. Para todo $n \geq 4$, a inequação

$$x(A_n(S)) \leq |S|-1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

define uma faceta de P^n_{Ham}.

Separação

As restrições de eliminação de subclicos podem ser separadas em tempo polinomial

Então dá para resolver Caixeiro Viajante em tempo polinomial?

Não! Sabemos algumas das facetas do poliedro...

- Não todas...
- Sabemos algumas outras, mas não sabemos separar em tempo polinomial