

# Combinatória Poliédrica

## Poliedro dos Emparelhamentos

Rafael C. S. Schouery  
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-13 10:41

# Problema de Steiner

**Problema de Steiner em Grafos:** Dado um grafo  $G = (V, A)$ , um conjunto de vértices  $Z \subseteq V$  chamados terminais e uma função de custo  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , encontrar  $S \subseteq A$  tal que  $G[S]$  conecta todos os terminais e  $c(S)$  seja mínimo.

$S \subseteq A$  tal que  $G[S]$  conecta todos os terminais é chamado de uma **solução de Steiner**

Politopo:

$$P_{\text{Ste}}(G, Z) = \text{conv}\{\chi^S : S \text{ é uma solução de Steiner}\}$$

## Dimensão

Uma aresta em  $G$  é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Uma aresta em  $G$  é uma ponte de Steiner se é uma ponte que separa dois terminais de  $G$

**Lema.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo conexo,  $Z$  um conjunto de terminais e  $B(G)$  o conjunto de pontes de Steiner de  $G$ . Então

$$\dim(P_{\text{Ste}}(G, Z)) = |A| - |B(G)|$$

Caso o grafo tenha ponte de Steiner podemos dividir o problema em problemas menores

- Sem perda de generalidade, vamos supor que  $G$  é conexo e não tem pontes de Steiner

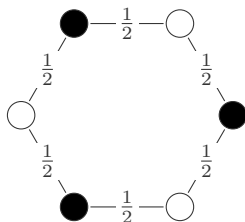
# Formulação

$$P(G, Z) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^A : \begin{array}{l} x(\delta(W)) \geq 1, \quad \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z \\ 0 \leq x_e \leq 1, \quad \forall e \in A \end{array} \right\}$$

Corte de Steiner:  $\delta(W)$  tal que  $W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z$

- Já a inequação é chamada de **inequação de corte de Steiner**

Note que  $P(G, Z)$  pode ser diferente de  $P_{\text{Ste}}(G, Z)$



## Alguns resultados

Lembrando que consideramos  $G$  conexo e sem pontes de Steiner

**Lema.** A inequação  $x_e \geq 0$  define uma faceta de  $P_{\text{Ste}}(G, Z)$  se e somente se  $G - e$  não tem pontes de Steiner.

**Exercício.** Mostre que a inequação  $x_e \leq 1$  define faceta de  $P_{\text{Ste}}(G, Z)$  para todo  $e \in A$ .

**Exercício.** Mostre que para todo corte de Steiner  $\delta(W)$ , a inequação  $x(\delta(W)) \geq 1$  define uma faceta de  $P_{\text{Ste}}(G, Z)$ .

**Exercício.** Mostre que o problema da separação para as inequações de corte de Steiner pode ser resolvido em tempo polinomial.

## Partição de Steiner

Uma partição  $\mathcal{P} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $V$  tal que  $V_i \cap Z \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n$  é chamada de partição de Steiner

- Definimos  $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A : u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

**Teorema.** Seja  $G$  conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner  $\mathcal{P} = (V_1, \dots, V_n)$  de  $V$ . Então, a inequação  $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$  define uma faceta de  $P_{\text{Ste}}(G, Z)$  se e somente se

- $G[V_i]$  é conexo
- $G[V_i]$  não contém pontes de Steiner com relação a  $Z_i = Z \cap V_i$  e
- $\hat{G}$  obtido de  $G$  contraindo-se cada um dos conjuntos  $V_i$  a um único vértice é 2-conexo.

Generalizam as inequações de corte de Steiner

- Mas são NP-difíceis de separar...
- Podemos tentar separar com heurísticas