Combinatória Poliédrica
Poliedro dos Emparelhamentos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-13 10:41

Problema de Steiner

Problema de Steiner em Grafos: Dado um grafo $G = (V, A)$, um conjunto de vértices $Z \subseteq V$ chamados terminais e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar $S \subseteq A$ tal que $G[S]$ conecta todos os terminais e $c(S)$ seja mínimo.

Problema de Steiner

Problema de Steiner em Grafos: Dado um grafo $G = (V, A)$, um conjunto de vértices $Z \subseteq V$ chamados terminais e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar $S \subseteq A$ tal que $G[S]$ conecta todos os terminais e $c(S)$ seja mínimo.

$S \subseteq V$ tal que $G[S]$ conecta todos os terminais é chamado de uma solução de Steiner

Problema de Steiner

Problema de Steiner em Grafos: Dado um grafo $G = (V, A)$, um conjunto de vértices $Z \subseteq V$ chamados terminais e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar $S \subseteq A$ tal que $G[S]$ conecta todos os terminais e $c(S)$ seja mínimo.

$S \subseteq V$ tal que $G[S]$ conecta todos os terminais é chamado de uma solução de Steiner

Politopo:

$$P_{\mathrm{Ste}}(G, Z) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^S \colon S \text{ é uma solução de Steiner}\}$$

Dimensão

Uma aresta em G é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Dimensão

Uma aresta em G é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Uma aresta em G é uma ponte de Steiner se é uma ponte que separa dois terminais de G

Dimensão

Uma aresta em G é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Uma aresta em G é uma ponte de Steiner se é uma ponte que separa dois terminais de G

Lema. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, Z um conjunto de terminais e $B(G)$ o conjunto de pontes de Steiner de G. Então

$$\dim(P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)) = |A| - |B(G)|$$

Dimensão

Uma aresta em G é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Uma aresta em G é uma ponte de Steiner se é uma ponte que separa dois terminais de G

Lema. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, Z um conjunto de terminais e $B(G)$ o conjunto de pontes de Steiner de G. Então

$$\dim(P_{\text{Ste}}(G, Z)) = |A| - |B(G)|$$

Caso o grafo tenha ponte de Steiner podemos dividir o problema em problemas menores

Dimensão

Uma aresta em G é uma ponte se a sua remoção desconecta o grafo

Uma aresta em G é uma ponte de Steiner se é uma ponte que separa dois terminais de G

Lema. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, Z um conjunto de terminais e $B(G)$ o conjunto de pontes de Steiner de G. Então

$$\dim(P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)) = |A| - |B(G)|$$

Caso o grafo tenha ponte de Steiner podemos dividir o problema em problemas menores

- Sem perda de generalidade, vamos supor que G é conexo e não tem pontes de Steiner

Formulação

$$P(G,Z) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^A : \begin{array}{rl} x(\delta(W)) \geq 1, & \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z \\ 0 \leq x_e \leq 1, & \forall e \in A \end{array} \right\}$$

Formulação

$$P(G,Z) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^A : \begin{array}{rl} x(\delta(W)) \geq 1, & \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z \\ 0 \leq x_e \leq 1, & \forall e \in A \end{array} \right\}$$

Corte de Steiner: $\delta(W)$ tal que $W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z$

Formulação

$$P(G,Z) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^A \colon \begin{array}{rl} x(\delta(W)) \geq 1, & \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z \\ 0 \leq x_e \leq 1, & \forall e \in A \end{array} \right\}$$

Corte de Steiner: $\delta(W)$ tal que $W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z$

- Já a inequação é chamada de inequação de corte de Steiner

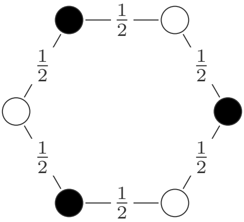
Formulação

$$P(G,Z) = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^A \colon \begin{array}{rl} x(\delta(W)) \geq 1, & \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z \\ 0 \leq x_e \leq 1, & \forall e \in A \end{array} \right\}$$

Corte de Steiner: $\delta(W)$ tal que $W \subseteq V, \emptyset \neq W \cap Z \neq Z$

- Já a inequação é chamada de inequação de corte de Steiner

Note que $P(G,Z)$ pode ser diferente de $P_{\mathrm{Ste}}(G,Z)$



Alguns resultados

Lembrando que consideramos G conexo e sem pontes de Steiner

Alguns resultados

Lembrando que consideramos G conexo e sem pontes de Steiner

Lema. A inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se $G - e$ não tem pontes de Steiner.

Alguns resultados

Lembrando que consideramos G conexo e sem pontes de Steiner

Lema. A inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se $G - e$ não tem pontes de Steiner.

Exercício. Mostre que a inequação $x_e \leq 1$ define faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ para todo $e \in A$.

Alguns resultados

Lembrando que consideramos G conexo e sem pontes de Steiner

Lema. A inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se $G - e$ não tem pontes de Steiner.

Exercício. Mostre que a inequação $x_e \leq 1$ define faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ para todo $e \in A$.

Exercício. Mostre que para todo corte de Steiner $\delta(W)$, a inequação $x(\delta(W)) \geq 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$.

Alguns resultados

Lembrando que consideramos G conexo e sem pontes de Steiner

Lema. A inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se $G - e$ não tem pontes de Steiner.

Exercício. Mostre que a inequação $x_e \leq 1$ define faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ para todo $e \in A$.

Exercício. Mostre que para todo corte de Steiner $\delta(W)$, a inequação $x(\delta(W)) \geq 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$.

Exercício. Mostre que o problema da separação para as inequações de corte de Steiner pode ser resolvido em tempo polinomial.

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

(b) $G[V_i]$ não contém pontes de Steiner com relação a $Z_i = Z \cap V_i$ e

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

(b) $G[V_i]$ não contém pontes de Steiner com relação a $Z_i = Z \cap V_i$ e

(c) $\hat{G}$ obtido de G contraindo-se cada um dos conjuntos V_i a um único vértice é 2-conexo.

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

(b) $G[V_i]$ não contém pontes de Steiner com relação a $Z_i = Z \cap V_i$ e

(c) $\hat{G}$ obtido de G contraindo-se cada um dos conjuntos V_i a um único vértice é 2-conexo.

Generalizam as inequações de corte de Steiner

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

(b) $G[V_i]$ não contém pontes de Steiner com relação a $Z_i = Z \cap V_i$ e

(c) $\hat{G}$ obtido de G contraindo-se cada um dos conjuntos V_i a um único vértice é 2-conexo.

Generalizam as inequações de corte de Steiner

- Mas são NP-difíceis de separar...

Partição de Steiner

Uma partição $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V tal que $V_i \cap Z \neq \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$ é chamada de partição de Steiner

- Definimos $\Delta(\mathcal{P}) = \{\{u, v\} \in A \colon u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$

Teorema. Seja G conexo e sem pontes de Steiner e tome uma partição de Steiner $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_n)$ de V. Então, a inequação $x(\Delta(\mathcal{P})) \geq k - 1$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Ste}}(G, Z)$ se e somente se

(a) $G[V_i]$ é conexo

(b) $G[V_i]$ não contém pontes de Steiner com relação a $Z_i = Z \cap V_i$ e

(c) $\hat{G}$ obtido de G contraindo-se cada um dos conjuntos V_i a um único vértice é 2-conexo.

Generalizam as inequações de corte de Steiner

- Mas são NP-difíceis de separar...
- Podemos tentar separar com heurísticas