MC-202
Árvores Binárias

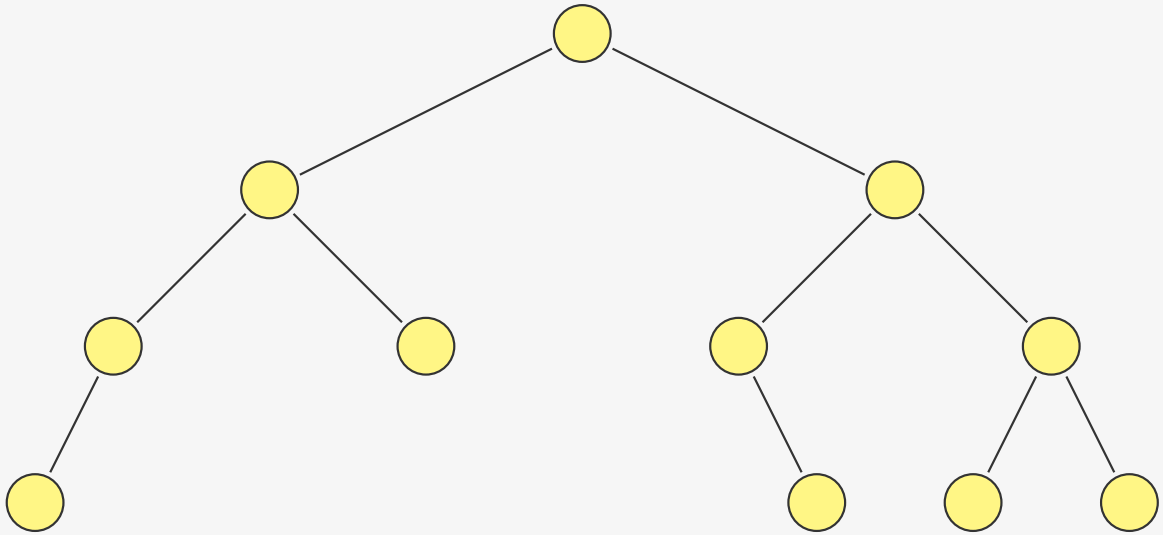
Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-20 07:48

Árvores Binárias

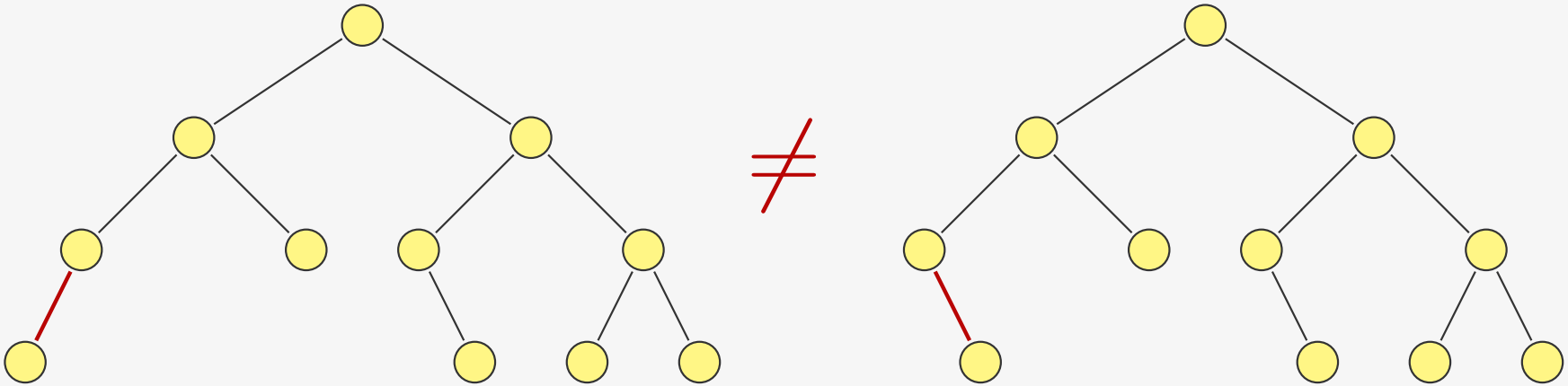
Exemplo de uma árvore binária:



Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou um nó conectado a duas árvores binárias

Comparando com atenção

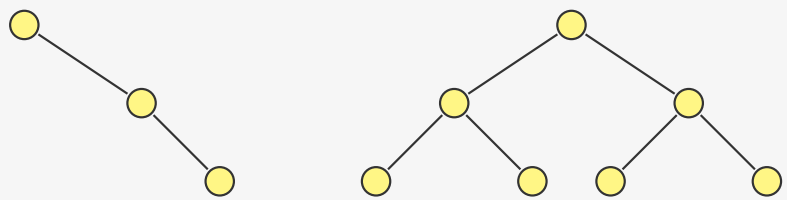


Ordem dos filhos é relevante!

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h, então a árvore:

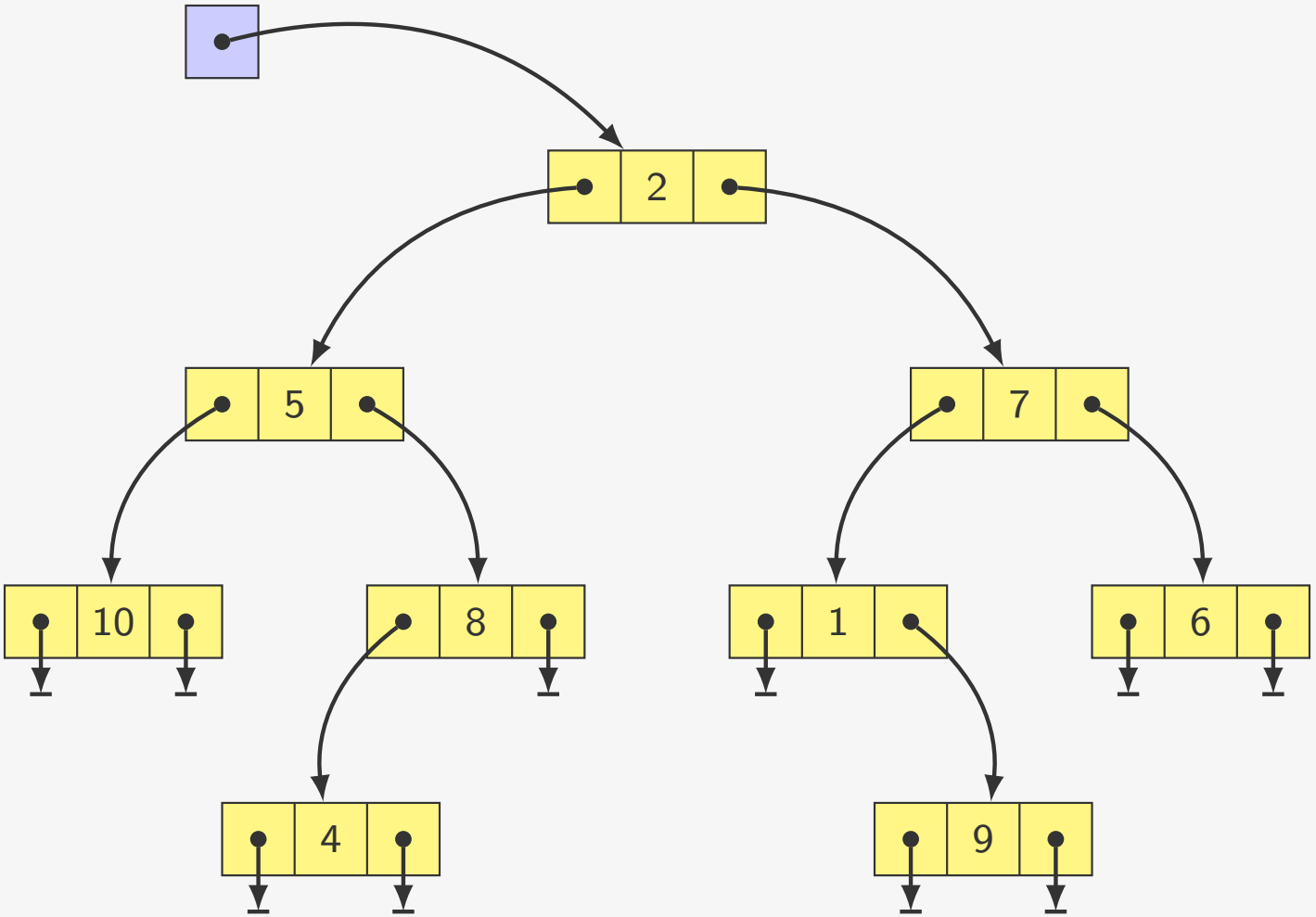
- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



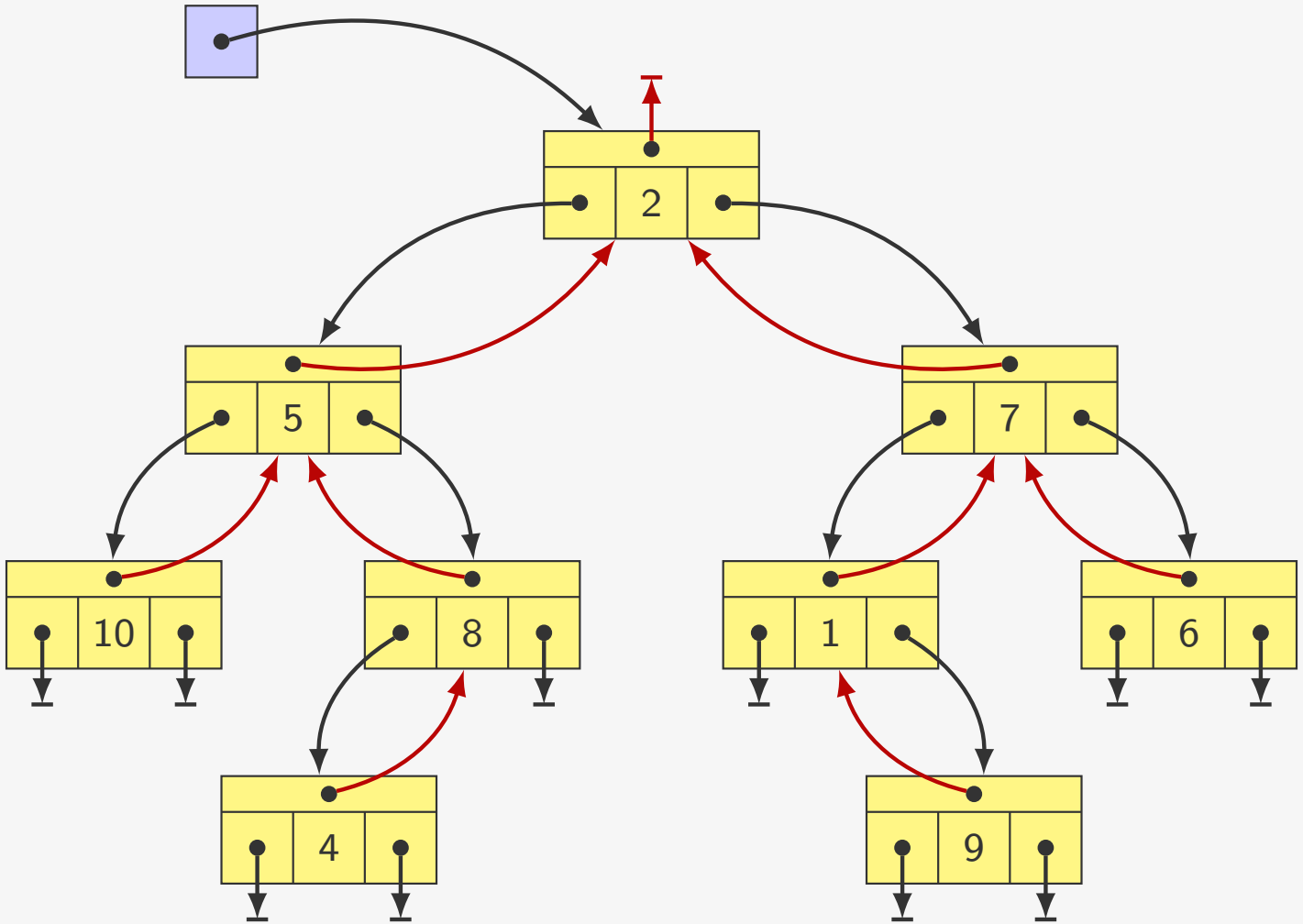
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n+1) \rceil$
  - quando a árvore é completa
- a altura é no máximo n
  - quando cada nó não-terminal tem apenas um filho

Implementação



Implementação com ponteiro para pai



Implementação em C

```c
typedef struct no *p_no;

struct no {
    int dado;
    p_no esq, dir; /* pai */
};

p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir);

p_no procurar_no(p_no raiz, int x);

int numero_nos(p_no raiz);

int altura(p_no raiz);
```

Criando uma árvore e buscando

```c
p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir) {
  p_no r = malloc(sizeof(struct no));
  r->dado = x;
  r->esq = esq;
  r->dir = dir;
  return r;
}
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`
- faremos muitos algoritmos recursivos

```c
p_no procurar_no(p_no raiz, int x) {
  p_no esq;
  if (raiz == NULL || raiz->dado == x)
    return raiz;
  esq = procurar_no(raiz->esq, x);
  if (esq != NULL)
    return esq;
  return procurar_no(raiz->dir, x);
}
```

Número de nós e altura

Como calcular o número de nós da árvore?

```
1 int numero_nos(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL)
3     return 0;
4   return numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir) + 1;
5 }
```

Como calcular a altura da árvore?

```
1 int altura(p_no raiz) {
2   int h_esq, h_dir;
3   if (raiz == NULL)
4     return 0;
5   h_esq = altura(raiz->esq);
6   h_dir = altura(raiz->dir);
7   return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
8 }
```

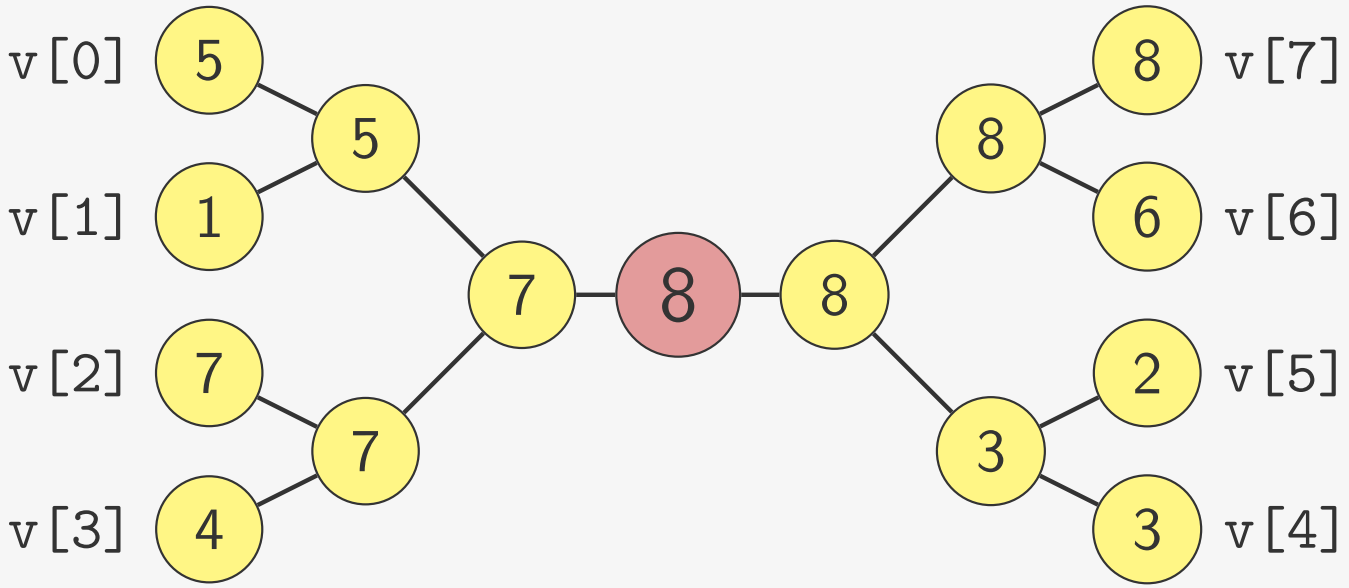
Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima

- você vai precisar de uma pilha...

Exemplo: Criando um torneio

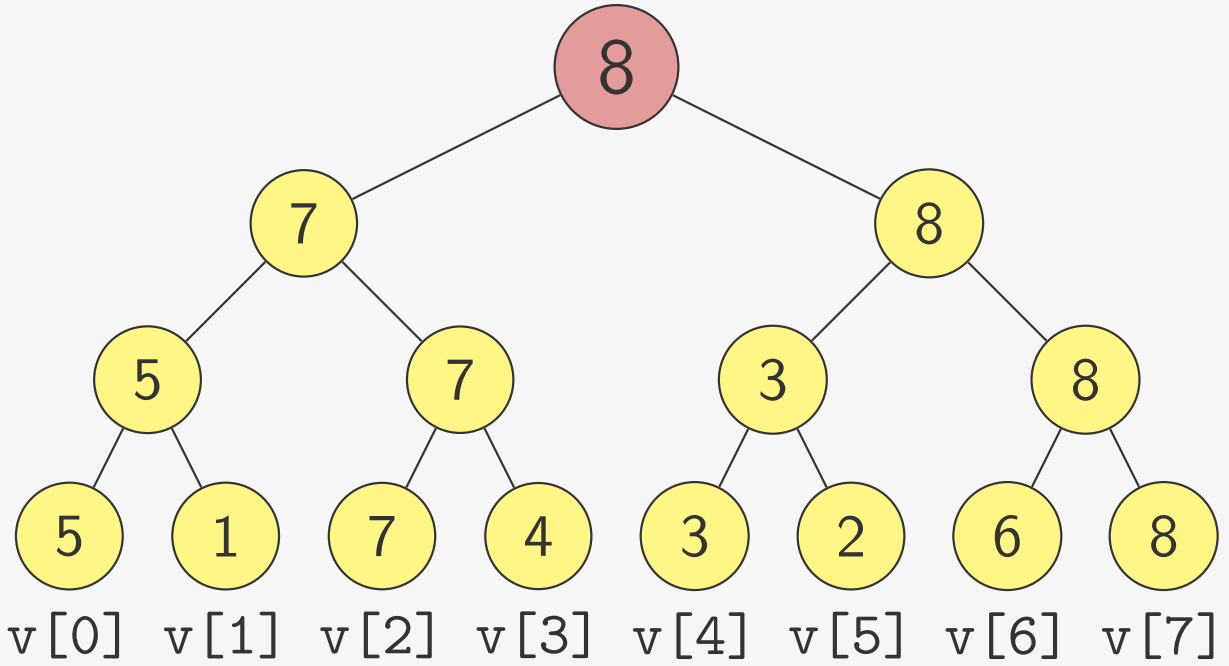
Dado um vetor `v` com `n` números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
  - Ex.: para `n = 8`, temos quartas de final, semifinal e final



É uma árvore binária, onde o valor do pai é o maior valor dos seus filhos

Exemplo: Criando um torneio

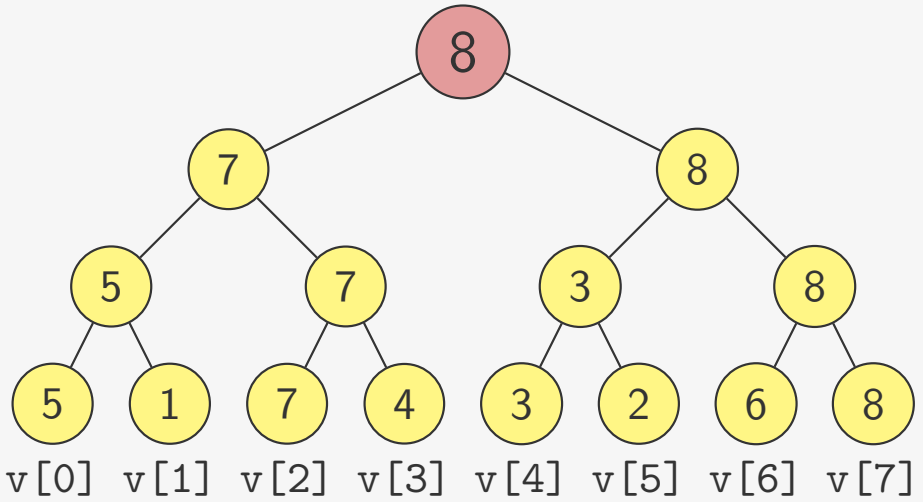


Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente
- decida o vencedor

Exemplo: Criando um torneio

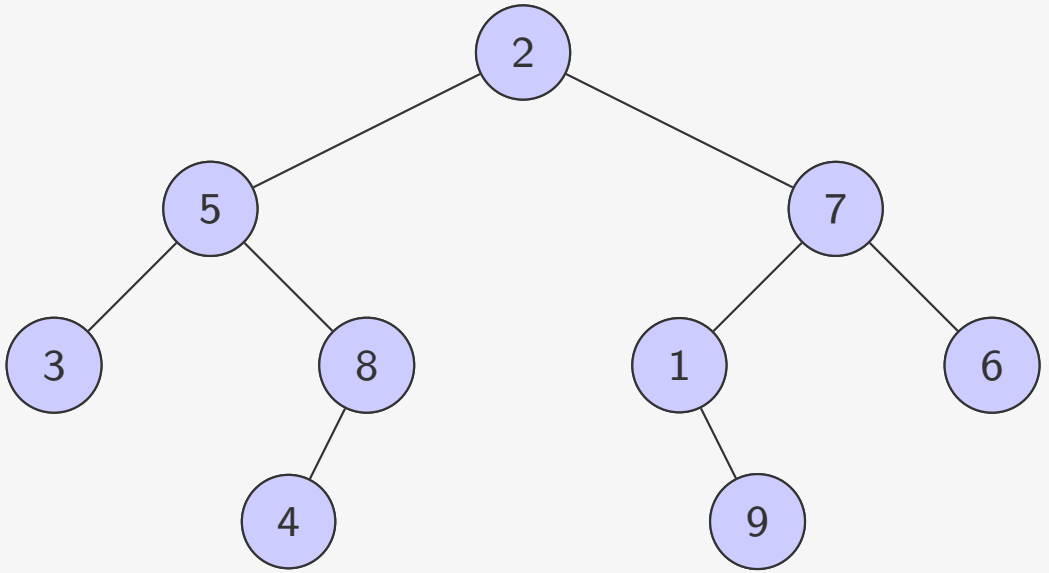
```
1  p_no torneio(int *v, int l, int r) {
2    p_no esq, dir;
3    int valor, m = (l + r) / 2;
4    if (l == r)
5      return criar_arvore(v[l], NULL, NULL);
6    esq = torneio(v, l, m);
7    dir = torneio(v, m + 1, r);
8    valor = esq->dado > dir->dado ? esq->dado : dir->dado;
9    return criar_arvore(valor, esq, dir);
10 }
```



Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

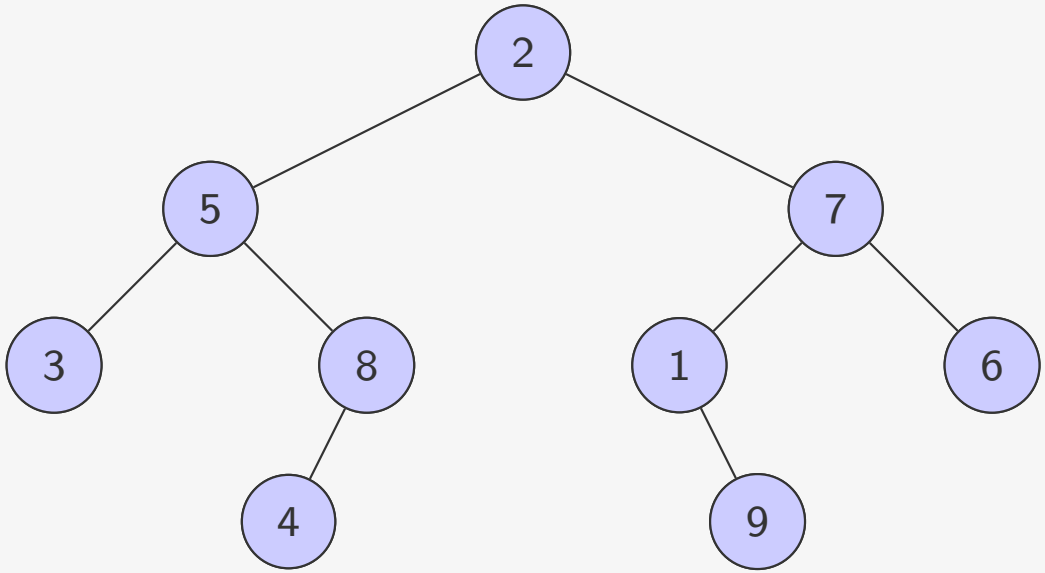


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

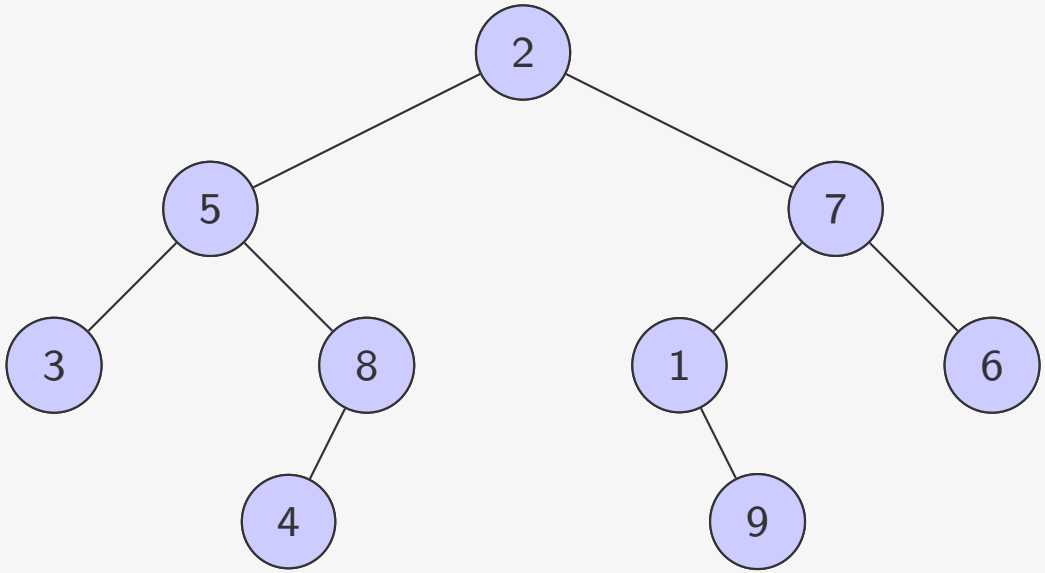


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7, 2

Percorrendo os nós - Inordem

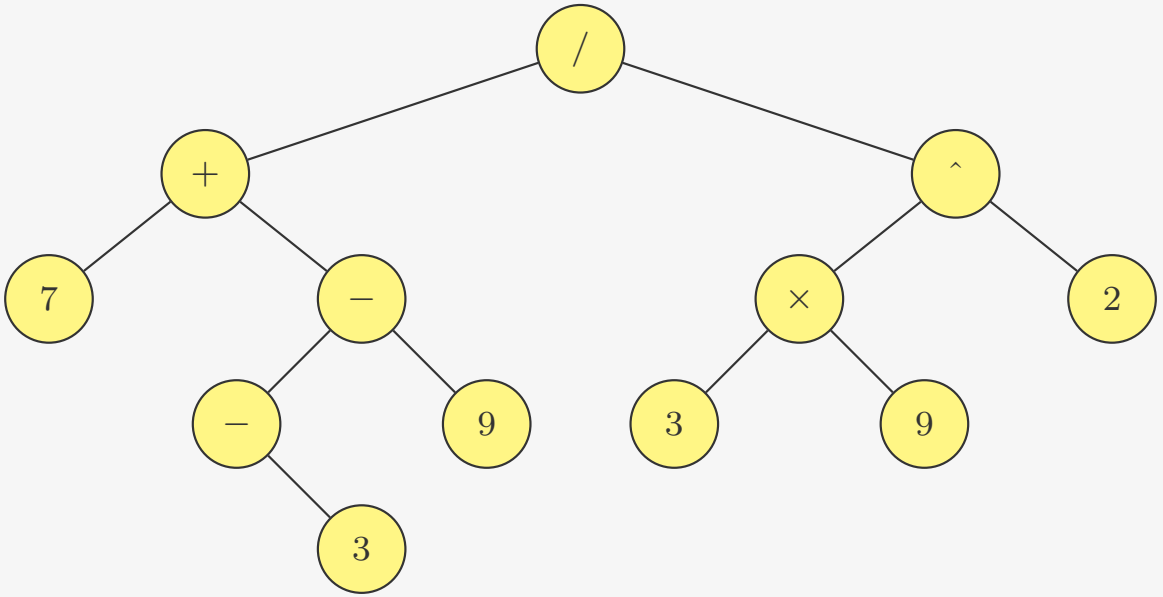
A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percurso em profundidade e expressões



Notação

- Pré-fixa: / + 7 - - 3 9 ^ × 3 9 2
- Pós-fixa: 7 3 - 9 - + 3 9 × 2 ^ /
- Infixa: 7 + - 3 - 9 / 3 × 9 ^ 2

Implementação de percurso em profundidade

```
1 void pre_ordem(p_no raiz) {
2   if (raiz != NULL) {
3     printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
4     pre_ordem(raiz->esq);
5     pre_ordem(raiz->dir);
6   }
7 }
```

```
1 void pos_ordem(p_no raiz) {
2   if (raiz != NULL) {
3     pos_ordem(raiz->esq);
4     pos_ordem(raiz->dir);
5     printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
6   }
7 }
```

```
1 void inordem(p_no raiz) {
2   if (raiz != NULL) {
3     inordem(raiz->esq);
4     printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
5     inordem(raiz->dir);
6   }
7 }
```

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1  void pre_ordem(p_no raiz) {
2    p_pilha p; /* pilha de p_no */
3    p = criar_pilha();
4    empilhar(p, raiz);
5    while(!pilha_vazia(p)) {
6      raiz = desempilhar(p);
7      if (raiz != NULL) {
8        empilhar(p, raiz->dir);
9        empilhar(p, raiz->esq);
10       printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_pilha(p);
14 }
```

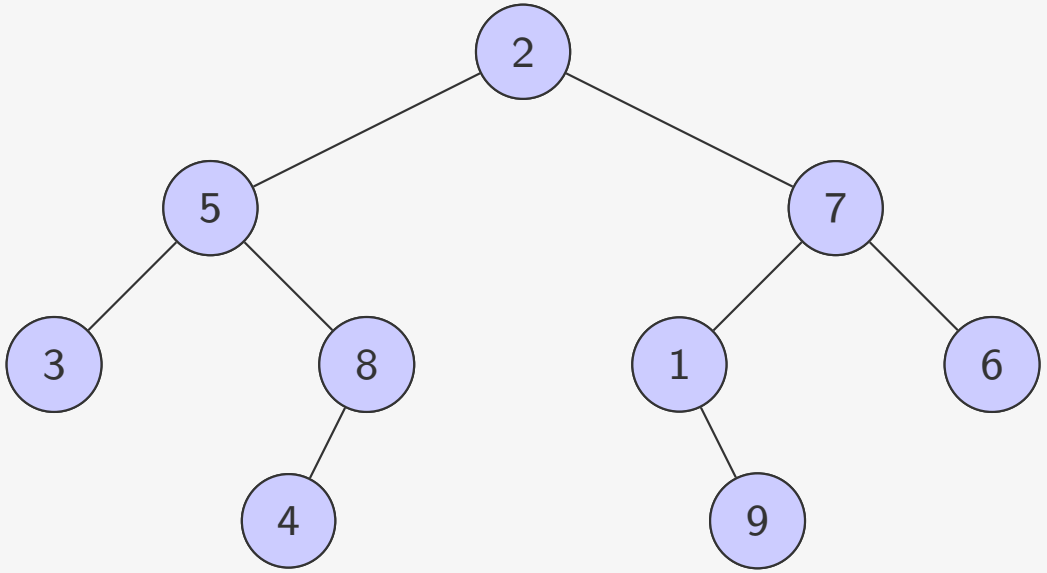
Por que empilhamos `raiz->dir` primeiro?

- E se fosse o contrário?

Percorrendo os nós — em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

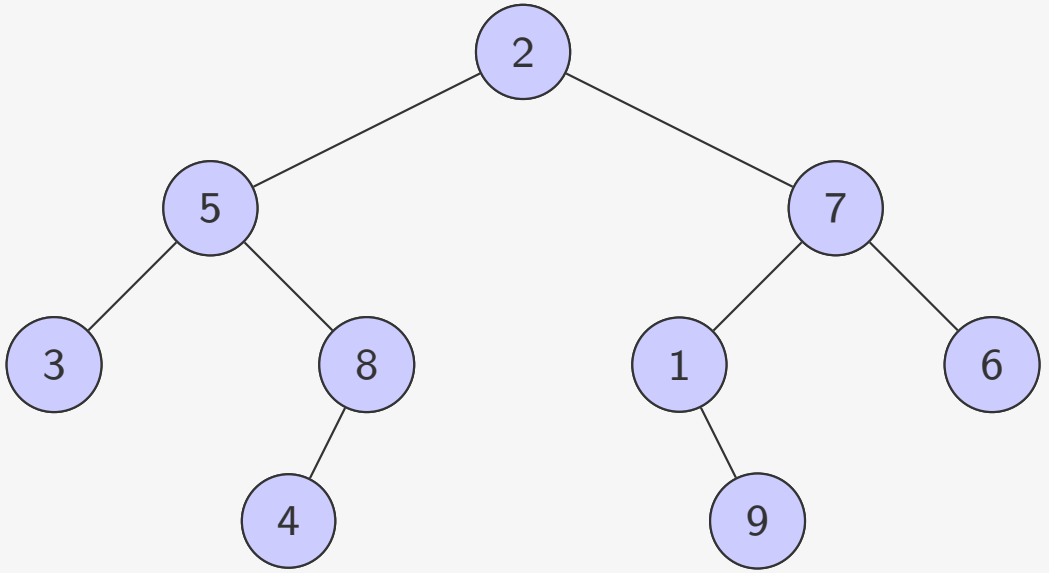


Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4, 9

Implementação do percurso em largura

Como implementar o percurso em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



Fila

Percurso em largura

```
1  void percurso_em_largura(p_no raiz) {
2    p_fila f;
3    f = criar_fila();
4    enfileirar(f, raiz);
5    while(!fila_vazia(f)) {
6      raiz = desenfileirar(f);
7      if (raiz != NULL) {
8        enfileirar(f, raiz->esq);
9        enfileirar(f, raiz->dir);
10       printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11     }
12   }
13   destruir_fila(f);
14 }
```

Agora enfileiramos `raiz->esq` primeiro

- E se fosse o contrário?

Exercício

Escreva uma função que calcula o número de folhas em uma árvore dada.

Exercício

Escreva uma função recursiva que apaga todas as folhas de uma árvore que tenham a chave igual a um valor dado.

Exercício

Escreva uma função que compara se duas árvores binárias são iguais.