

MO758/MC758
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2018

Complexidade computacional para TJA

Recap. de complexidade computacional

Recap. de complexidade computacional

No fim de 1960

Recap. de complexidade computacional

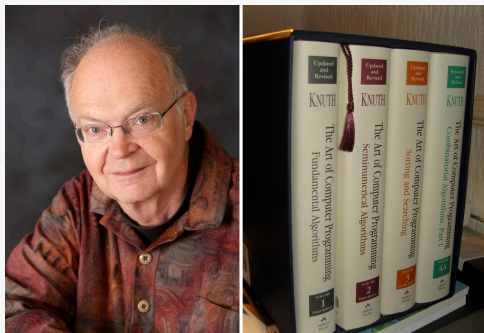
No fim de 1960

- Já era popular a análise formal de algoritmos

Recap. de complexidade computacional

No fim de 1960

- Já era popular a análise formal de algoritmos
- Popularizado pelo trabalho de **Don Knuth** (The Art of Computer Programming, 68, 69, 73)



Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

- com complexidade de tempo $O(n^k)$ para alguma constante k (polinomial)

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

- com complexidade de tempo $O(n^k)$ para alguma constante k (polinomial)

Um algoritmo $O(n^{100})$ pode não ser rápido na prática...

Recap. de complexidade computacional

Será que poderemos achar algoritmos rápidos para vários problemas práticos que pertencem a uma classe especial chamada **NP**?

Recap. de complexidade computacional

Será que poderemos achar algoritmos rápidos para vários problemas práticos que pertencem a uma classe especial chamada **NP**?

- **Cook** em 1971 e **Levin** em 1973 (independentemente) nos deram uma pista



Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe **NP** podem ser reduzidos em tempo **polinomial** para o problema de **Satisfatibilidade Booleana** (SAT)

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe **NP** podem ser reduzidos em tempo **polinomial** para o problema de **Satisfatibilidade Booleana** (SAT)
- Ou seja, se tivermos um algoritmo polinomial para o **SAT** teremos um algoritmo polinomial para **todos** os problemas em **NP**

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe **NP** podem ser reduzidos em tempo **polinomial** para o problema de **Satisfatibilidade Booleana** (SAT)
- Ou seja, se tivermos um algoritmo polinomial para o **SAT** teremos um algoritmo polinomial para **todos** os problemas em **NP**
- Este é o primeiro problema **NP-Completo**

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 **Richard Karp** mostrou como reduzir em tempo polinomial o **SAT** para outros 21 problemas importantes

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 **Richard Karp** mostrou como reduzir em tempo polinomial o **SAT** para outros 21 problemas importantes

Até hoje ninguém conseguiu encontrar um algoritmo **polinomial** para qualquer um dos problemas em **NP-Completo**

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 **Richard Karp** mostrou como reduzir em tempo polinomial o **SAT** para outros 21 problemas importantes

Até hoje ninguém conseguiu encontrar um algoritmo **polinomial** para qualquer um dos problemas em **NP-Completo**

Conjectura: **P = NP** ?

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Exemplos:

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Tarefas em Computadores

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Tarefas em Computadores
- Problema de Empacotamento

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas **NP-completos** são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático que são **NP-difíceis**

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Tarefas em Computadores
- Problema de Empacotamento
- Vários e vários outros problemas práticos...

Representações sucintas de jogos

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é **exponencial**

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é **exponencial**

- É “fácil” criar algoritmos polinomiais em ns^n

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é **exponencial**

- É “fácil” criar algoritmos polinomiais em ns^n
- Mas ainda podem ser exponenciais em n

Relembrando o Jogo da Poluição

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira **sucinta**:

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira **sucinta**:

- Custo do jogador depende de **quantos** jogadores poluem

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira **sucinta**:

- Custo do jogador depende de **quantos** jogadores poluem
- Ao invés de depender de **quais** jogadores poluem

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se **poluem** ou **não poluem**
- Não poluir custa **3**
- Cada país paga **1** por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira **sucinta**:

- Custo do jogador depende de **quantos** jogadores poluem
- Ao invés de depender de **quais** jogadores poluem
- Podemos representar esse tipo de jogo com $2n$ números

Jogos com representações sucintas

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparcos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparcos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparcos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
 - ▶ Podemos representar com $s \binom{n+s-1}{s-1}$ números

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
 - ▶ Podemos representar com $s \binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos **anônimos**

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
 - ▶ Podemos representar com $s \binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos **anônimos**
 - ▶ Os jogadores não distinguem os outros jogadores

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparcos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
 - ▶ Podemos representar com $s \binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos **anônimos**
 - ▶ Os jogadores não distinguem os outros jogadores
 - ▶ Podemos representar com $ns \binom{n+s-1}{s-1}$ números

Jogos com representações sucintas

- Jogos **esparsos**
 - ▶ Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos **gráficos**
 - ▶ A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
 - ▶ ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos **simétricos**
 - ▶ Todos os jogadores são idênticos
 - ▶ A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
 - ▶ Podemos representar com $s \binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos **anônimos**
 - ▶ Os jogadores não distinguem os outros jogadores
 - ▶ Podemos representar com $ns \binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Entre outros...

Estrutura de um equilíbrio misto

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Uma resposta ótima mista é uma aleatorização de estratégias puras, cada uma também sendo uma resposta ótima

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Uma resposta ótima mista é uma aleatorização de estratégias puras, cada uma também sendo uma resposta ótima

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Uma resposta ótima mista é uma aleatorização de estratégias puras, cada uma também sendo uma resposta ótima

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista
- Aleatorizar (de qualquer forma) respostas ótimas puras leva a uma resposta ótima mista

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Uma resposta ótima mista é uma aleatorização de estratégias puras, cada uma também sendo uma resposta ótima

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista
- Aleatorizar (de qualquer forma) respostas ótimas puras leva a uma resposta ótima mista

Então por que jogar uma resposta ótima mista ao invés de uma pura?

Exercício

$\begin{matrix} & 2 \\ 1 & \end{matrix}$	Esquerda	Meio	Direita
Cima	$\begin{matrix} & 8 \\ 10 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 2 \\ 3 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 9 \\ 5 & \end{matrix}$
Meio	$\begin{matrix} & 3 \\ 0 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 1 \\ 8 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 10 \\ 2 & \end{matrix}$
Baixo	$\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 0 \\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 3 \\ 4 & \end{matrix}$

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

Exercício

$\begin{matrix} & 2 \\ 1 & \end{matrix}$	Esquerda	Meio	Direita
Cima	$\begin{matrix} & 8 \\ 10 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 2 \\ 3 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 9 \\ 5 & \end{matrix}$
Meio	$\begin{matrix} & 3 \\ 0 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 1 \\ 8 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 10 \\ 2 & \end{matrix}$
Baixo	$\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 0 \\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 3 \\ 4 & \end{matrix}$

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

- Quais são as respostas ótimas puras do jogador 1?

Exercício

$\begin{matrix} & 2 \\ 1 & \end{matrix}$	Esquerda	Meio	Direita
Cima	$\begin{matrix} & 8 \\ 10 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 2 \\ 3 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 9 \\ 5 & \end{matrix}$
Meio	$\begin{matrix} & 3 \\ 0 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 1 \\ 8 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 10 \\ 2 & \end{matrix}$
Baixo	$\begin{matrix} & 1 \\ 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 0 \\ 4 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} & 3 \\ 4 & \end{matrix}$

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

- Quais são as respostas ótimas puras do jogador 1?
- Quais são as respostas ótimas mistas do jogador 1?

Estrutura de um equilíbrio misto

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova:

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)]$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s)$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_i(\sigma)] &= \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})\end{aligned}$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia **mista** é uma **resposta ótima** se e somente todas as estratégias **puras** no seu **suporte** são **respostas ótimas**

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_i(\sigma)] &= \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]\end{aligned}$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então todo s_i' no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} :

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então todo s_i' no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} :

- Caso contrário, poderíamos:

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} :

- Caso contrário, poderíamos:
 - ▶ zerar $\sigma(s_{i'})$ e

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} :

- Caso contrário, poderíamos:
 - ▶ zerar $\sigma(s_{i'})$ e
 - ▶ para uma resposta ótima pura s_{i^*} para σ_{-i} , poderíamos aumentar $\sigma(s_{i^*})$ (em $\sigma(s_{i'})$)

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} :

- Caso contrário, poderíamos:
 - ▶ zerar $\sigma(s_{i'})$ e
 - ▶ para uma resposta ótima pura s_{i^*} para σ_{-i} , poderíamos aumentar $\sigma(s_{i^*})$ (em $\sigma(s_{i'})$)
 - ▶ Com isso, aumentaríamos a utilidade

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo s_i' no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se $s_{i'}$ e s_{i^*} são ambas respostas ótimas para σ_{-i} , então

$$\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i^*}, \sigma_{-i})]$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo s_i' no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} , então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se s_i' e s_i^* são ambas respostas ótimas para σ_{-i} , então $\mathbb{E}[u_i(s_i', \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_i^*, \sigma_{-i})]$
- Assim,

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_i', \sigma_{-i})] \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) = \mathbb{E}[u_i(s_i', \sigma_{-i})]$$

Como encontrar um equilíbrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		5	1
		2	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		2	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	
	$R1$	$R2$
$R1$	5	2
$R2$	1	6
	2	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
 - ▶ e temos um equilíbrio

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B		
		$R1$	$R2$
$R1$		5	2
		5	1
$R2$		1	6
		2	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
 - ▶ e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$

Como encontrar um equilíbrio misto?

	<i>B</i>	
<i>A</i>	<i>R1</i>	<i>R2</i>
<i>R1</i>	5	2
<i>R2</i>	1	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
 - ▶ e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$
 - ▶ e temos um equilíbrio

Como encontrar um equilíbrio misto?

	<i>B</i>	
<i>A</i>	<i>R1</i>	<i>R2</i>
<i>R1</i>	5	2
<i>R2</i>	1	6
	2	6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
 - ▶ e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$
 - ▶ e temos um equilíbrio
- E se o suporte do jogador 1 for $\{R1, R2\}$?

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
	$R1$	5	1
	$R2$	2	6

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
	$R1$	5	1
	$R2$	2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		5	1
		2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		5	1
		2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilíbrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidade precisam ser iguais

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
	$R1$	5	1
	$R2$	2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilíbrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidade precisam ser iguais

- Ou seja, $4p + 1 = -4p + 6$ e, portanto, $p = 5/8$

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
		5	1
		2	6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilíbrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidades precisam ser iguais

- Ou seja, $4p + 1 = -4p + 6$ e, portanto, $p = 5/8$

Isto é, descobrimos qual é a estratégia mista do jogador 2 se o jogador 1 estiver jogando uma resposta ótima com suporte $\{R1, R2\}$.

Como encontrar um equilíbrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	2, 1
$R2$	1, 2	6, 6

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
$R2$		1	6
	$R1$	5	1
	$R2$	2	6

Faça o mesmo para o jogador 2:

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
		5	1
$R2$		1	6
		2	6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluimos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
		5	1
$R2$		1	6
		2	6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluimos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga $R1$ com probabilidade q

Como encontrar um equilíbrio misto?

	<i>B</i>		
<i>A</i>		<i>R1</i>	<i>R2</i>
	<i>R1</i>	5	2
		5	1
	<i>R2</i>	1	6
		2	6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluimos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga *R1* com probabilidade q
- Igualamos as utilidade do jogador 2 para *R1* e *R2*

Como encontrar um equilíbrio misto?

A	B	$R1$	$R2$
$R1$		5	2
		5	1
$R2$		1	6
		2	6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluimos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga $R1$ com probabilidade q
- Igualamos as utilidade do jogador 2 para $R1$ e $R2$
- Achamos o valor de q

Jogos de soma zero

Jogos de soma zero

Em um jogo de **soma zero** com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^n u_i(s) = 0$$

Jogos de soma zero

Em um jogo de **soma zero** com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^n u_i(s) = 0$$

Trata-se de um conceito muito comum em economia

Jogos de soma zero

Em um jogo de **soma zero** com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^n u_i(s) = 0$$

Trata-se de um conceito muito comum em economia

Exemplos: Par-ou-Ímpar, Pedra-Papel-Tesoura, Xadrez, Poker, etc...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m : número de estratégias do jogador **1**

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m : número de estratégias do jogador **1**
- n : número de estratégias do jogador **2**

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m : número de estratégias do jogador **1**
- n : número de estratégias do jogador **2**

Pelo Teorema de Nash, **sempre** existe um equilíbrio

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar **uma** matriz, pois o ganho do jogador **1** é o custo do jogador **2** e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m : número de estratégias do jogador **1**
- n : número de estratégias do jogador **2**

Pelo Teorema de Nash, **sempre** existe um equilíbrio

Como podemos resolver esse problema?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$
- $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$
- $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$

tais que um é uma resposta ótima para o outro...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um **equilíbrio**?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p , com m entradas, e q , com n entradas,

- $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$
- $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, n$

tais que um é uma resposta ótima para o outro...

Se o jogador **1** usa a estratégia (mista) p e o **2** usa a q , qual é o valor esperado que o jogador **1** ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$$

Vimos que, se p é uma resposta ótima para q , então para toda estratégia i' no suporte de p temos que $\sum_{j=1}^n a_{i'j} q_j = v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q , qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j = \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i$$

Vimos que, se p é uma resposta ótima para q , então para toda estratégia i' no suporte de p temos que $\sum_{j=1}^n a_{i'j} q_j = v$

E se q é uma resposta ótima para p , então para toda estratégia pura j' no suporte de q temos que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'}) p_i = -v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize v

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize v

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize v

sujeito a
$$\sum_{i=1}^m p_i = 1$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize v

sujeito a $\sum_{i=1}^m p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i \geq v \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
 - ▶ aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^m (-a_{ij'})p_i$ é máximo
 - ▶ j está no suporte sse $\sum_{i=1}^m a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
 - ▶ maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize v

sujeito a $\sum_{i=1}^m p_i = 1$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i \geq v \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$p_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w

sujeito a
$$\sum_{j=1}^n q_j = 1$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w

sujeito a $\sum_{j=1}^n q_j = 1$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq w \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w

sujeito a $\sum_{j=1}^n q_j = 1$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq w \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize w

sujeito a $\sum_{j=1}^n q_j = 1$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq w \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$q_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Forma padrão dos LPs

Forma padrão dos LPs

Dados:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa primal:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa primal:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa **primal**:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa **primal**:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$
$$x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa dual:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa **dual**:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^m b_j y_j$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa **dual**:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^m b_j y_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A : matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c : vetor do \mathbb{Q}^n
- b : vetor do \mathbb{Q}^m

Programa **dual**:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^m b_j y_j$$

$$\text{sujeito a} \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq c_i \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$
$$y_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, m$$

Resultados de programação linear

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D ,
então:

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D , então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j^* = c_i$

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D , então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j^* = c_i$
- Se $y_j^* > 0$, então $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^* = b_j$

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D , então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j^* = c_i$
- Se $y_j^* > 0$, então $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i^* = b_j$
- $\sum_{i=1}^n c_i x_i^* = \sum_{j=1}^m b_j y_j^*$

Conclusão

Se

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = v^*$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* = v^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = v^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* = w^*$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* = v^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* = w^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* = v^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* = w^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$
- $v^* = w^*$ (a utilidade o jogador 1 é o custo do jogador 2)

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* = v^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* = w^*$
 - ▶ Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^n a_{ij}q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$
- $v^* = w^*$ (a utilidade o jogador 1 é o custo do jogador 2)

Tal par de soluções é um **equilíbrio misto** já que ambos os jogadores não podem melhorar

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Conclusão: Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear)

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Conclusão: Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear)

E para jogos mais gerais?

Encontrado equilibrios mistos

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:

“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:

“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:

“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:

“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?
- Qual é a sua complexidade?

Encontrado equilíbrios mistos

O **Teorema de Nash** garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:

“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?
- Qual é a sua complexidade?
- A versão de decisão (existe equilíbrio de Nash?) é trivial...

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades **inteiras**, e único equilíbrio envolvendo números **irracionais**

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades **inteiras**, e único equilíbrio envolvendo números **irracionais**

Porém, podemos encontrar um equilíbrio misto encontrando o **suporte** certo das estratégias mistas de cada jogador

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades **inteiras**, e único equilíbrio envolvendo números **irracionais**

Porém, podemos encontrar um equilíbrio misto encontrando o **suporte** certo das estratégias mistas de cada jogador

Dados os suportes, é possível utilizar um **sistema de equações polinomiais** para encontrar o equilíbrio

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é

PPAD-Completo:

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é

PPAD-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é **PPAD**-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é

PPAD-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é

PPAD-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é **PPAD**-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**
 - ▶ Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é **PPAD**-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**
 - ▶ Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
 - ▶ Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é **PPAD**-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**
 - ▶ Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
 - ▶ Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$
- Apesar de ser um conceito “**mais fraco**”, vários problemas interessantes estão em **PPAD**

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é **PPAD**-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**
 - ▶ Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
 - ▶ Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$
- Apesar de ser um conceito “**mais fraco**”, vários problemas interessantes estão em **PPAD**
 - ▶ Encontrar ponto fixo de Brouwer,

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é

PPAD-Completo:

- A classe **PPAD** é composta por problemas que a existência de uma solução é **garantida**
 - ▶ Porém o espaço de busca é **exponencial**
 - ▶ Apesar de ser bem estruturado
- A classe **PPAD** é um subconjunto da classe **NP**
 - ▶ Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
 - ▶ Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$
- Apesar de ser um conceito “**mais fraco**”, vários problemas interessantes estão em **PPAD**
 - ▶ Encontrar ponto fixo de Brouwer,
 - ▶ Achar equilíbrio de Arrow-Debreu em mercados, etc...

Os seguintes problemas são NP-completos

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador **1** com utilidade pelo menos k

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador **1** com utilidade pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador **1** com utilidade pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador **1** com utilidade pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte
- dado s , um equilíbrio de Nash com s no suporte

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos **dois** equilíbrios de Nash
- dado k , um equilíbrio de Nash para o jogador **1** com utilidade pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k , um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte
- dado s , um equilíbrio de Nash com s no suporte
- dado s , um equilíbrio de Nash sem s no suporte