MO417 — Complexidade de Algoritmos I — 2s2019

Lista de Exercício 12

Além dos exercícios abaixo, recomendo que façam a maior quantidade possível de exercícios dos livros texto (CLRS e Manber) dos capítulos relacionados.

Questão 1. Uma matriz quadrada é dita ser **triangular inferior** (**superior**) se todos os seus elementos não nulos estiverem na diagonal principal ou abaixo (acima) dela.

Seja `MMIS` o problema de multiplicar uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior e `MMQ` o problema de multiplicar duas matrizes quadradas arbitrárias.

Seja $T(n)$ a complexidade de um algoritmo ótimo para resolver `MMIS` quando as matrizes passadas na entrada tem ordem n. Suponha que $T(cn) \in O(T(n))$ para toda constante $c > 0$.

Mostre que `MMIS` é pelo menos tão difícil quanto `MMQ` no sentido de que ambos têm a mesma cota inferior (supondo o modelo de computação usual).

Questão 2. Seja S um conjunto de n pontos distintos do plano e $G = (S, E)$ o grafo completo onde cada vértice de G corresponde a um ponto de S. Além disso, suponha que a cada aresta (u, v) está associado um custo $c(u, v)$ igual à distância euclidiana entre os pontos u e v.

Devido a problemas de precisão numérica, nós nunca calculamos a distância euclidiana diretamente; para saber se uma árvore é mais leve que outra, nós só podemos comparar pares de arestas: dados dois seguimentos de reta, utilizamos uma sub-rotina que verifica se o primeiro seguimento tem comprimento menor do que a segunda.

Mostre que o problema de encontrar uma árvore geradora mínima em um grafo G desse tipo tem cota inferior $\Omega(n \log n)$.

Questão 3. O objetivo deste exercício é entender porque alguma vezes é fácil reduzir (Turing) um problema de otimização para sua versão de decisão. Considere o Problema do Caixeiro Viajante (TSP): Dado um grafo completo $G = (V, E)$ com custos $w : V \to \mathbb{N}$, encontre um caminho hamiltoniano peso mínimo de G.

- ***(a)*** Defina a versão de decisão do problema, TSP-Dec com parâmetro k.
- ***(b)*** Suponha que você tem à disposição um algoritmo polinomial A que dados (G, w) e k decide TSP-dec, i.e., responde sim se e somente se há uma solução de custo até k. Mostre, usando A, como determinar o peso do caminho hamiltoniano mínimo de G em tempo polinomial.
- ***(c)*** Mostre, usando A e o peso do caminho hamiltoniano mínimo determinado no item anterior, como **encontrar** um caminho hamiltoniano mínimo em G em tempo polinomial.
- ***(d)*** Conclua que TSP $\prec_p$ TSP-dec.

Questão 4. Prove que se existe problema $L \in NP$ tal que $L \notin NPC$, então para todo $L' \in NPC$, não existe redução $L' \prec_p L$.

Questão 5. (CLRS) (34.2-5) Mostre que qualquer linguagem pertencente a NP pode ser decidida por um algoritmo em tempo $2^{O(n^k)}$, para alguma constante k.

Questão 6. (CLRS) (34.2-6) Um caminho hamiltoniano em um grafo não direcionado, é um caminho que passa exatamente uma vez por todos os vértices do grafo. O problema do caminho hamiltoniano (HAM-PATH) consiste em decidir se um grafo possui ou não um caminho hamiltoniano. Apresente um algoritmo verificador polinomial para a linguagem HAM-PATH e conclua que HAM-PATH pertence a NP.

Questão 7. (CLRS) (34.2-7) Mostre que o problema do caminho hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos direcionados acíclicos. Dê um algoritmo eficiente para o problema.

Questão 8. (CLRS) (34.2-9) Mostre que $P \subseteq NP$ e $P \subseteq$ co-NP.

Questão 9. (CLRS) (34.2-10) Mostre que se $NP \neq$ co-NP então $P \neq NP$.

Questão 10. Considere o problema para decidir se um número p é primo. Mostre que esse problema está em co-NP. Atente-se para o tamanho da codificação de um número p.

Questão 11. (CLRS) (34.3-2) Mostre que se $L_1 \prec_p L_2$ e $L_2 \prec_p L_3$ então $L_1 \prec_p L_3$.

Questão 12. Mostre que $L \prec_p \overline{L}$ se e somente se $\overline{L} \prec_p L$.

Questão 13. Dado um conjunto de elementos $E = \{1, 2, ..., n\}$ e uma família de conjuntos $\mathscr{S} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, onde $S_i \subseteq E$, uma cobertura de conjuntos é uma subfamília $F \subseteq \mathscr{S}$ tal que $\bigcup_{S \in F} S = E$. O problema da cobertura por conjuntos é: dados E, $\mathscr{S}$ e k, existe uma cobertura de conjuntos F de tamanho $|F| \leq k$? Mostre que cobertura por conjuntos é NP-completo. Dica: você pode supor que cobertura por vértices é NP-completo.

Questão 14. (CLRS) (34.5-5) O problema da bipartição tem como entrada um conjunto S de números. A questão é se os números podem ser particionados em dois conjuntos A e $\bar{A} = S - A$ tal que $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in \bar{A}} x$. Mostre que tal problema é NP-completo.

Questão 15. Considere o problema do empacotamento (BIN). Dado um conjunto finito de n objetos com pesos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ inteiros positivos e dois valores inteiros positivos W e k, é possível colocar todos os objetos em k caixas cujo limite máximo de peso é W? Mostre que este problema é NP-Completo.

Questão 16. Prove que o problema a seguir é NP-completo: dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k, determine se G contém uma árvore geradora T tal que todo vértice em T tenha grau no máximo k.