MO417 — Complexidade de Algoritmos I — 2s2019

Lista de Exercício 3

Além dos exercícios abaixo, recomendo que façam a maior quantidade possível de exercícios dos livros texto (CLRS e Manber) dos capítulos relacionados.

Questão 1. (Manber) Encontre uma expressão para a soma da i-ésima linha do seguinte triângulo, que é chamado de triângulo de Pascal, e prove que sua afirmação está correta usando indução. Os lados do triângulo são 1s e cada um dos outros itens tem valor igual à soma dos dois itens imediatamente acima.

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
```

Questão 2. (Manber) Considere a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 40, ..., que começa como uma progressão aritmética, mas após os cinco primeiros termos é progressão geométrica. Mostre que todo inteiro positivo pode ser escrito como a soma de números *distintos* dessa sequência.

Questão 3. Seja $f(x)$ uma função real contínua e suponha que ela tem uma ou mais raízes entre a,b (uma raiz é um número $r \in (a,b)$ com $f(r) = 0$). Dado $\varepsilon > 0$, uma ε-aproximação de uma raiz, é um número $x \in (a,b)$ tal que $x \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ em que r é uma raiz. O método de aproximação da raiz baseado em busca binária executa é descrito no algoritmo a seguir:

```
Bisect(a, b, ε)
    enquanto b−a > ε:
        se f((a+b)/2) ≤ 0:
            a ← (a+b)/2
        senão:
            b ← (a+b)/2
    devolva (a+b)/2
```

(a) Analise o tempo de execução desse algoritmo em termos $b-a$ e ε.

(b) Dê condições (suficientes) sobre o entrada para que o algoritmo termine com uma resposta correta. Depois demonstre que o algoritmo está correto (quando dada uma entrada válida).

Questão 4. Prove, usando indução, que:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

(c) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ para $q \neq 1$

Questão 5. Prove que $\frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a fórmula fechada da sequência de Fibbonacci: $1,1,2,3,5,8\ldots$, onde o termo geral é a soma dos dois anteriores.