Projeto e Análise de Algoritmos*

Programação dinâmica

Segundo Semestre de 2019

*Criado por C. de Souza, C. da Silva, O. Lee, F. Miyazawa et al.

A maior parte deste conjunto de slides foi inicialmente preparada por Cid Carvalho de Souza e Cândida Nunes da Silva para cursos de Análise de Algoritmos. Além desse material, diversos conteúdos foram adicionados ou incorporados por outros professores, em especial por Orlando Lee e por Flávio Keidi Miyazawa. Os slides usados nessa disciplina são uma junção dos materiais didáticos gentilmente cedidos por esses professores e contêm algumas modificações, que podem ter introduzido erros.

O conjunto de slides de cada unidade do curso será disponibilizado como guia de estudos e deve ser usado unicamente para revisar as aulas. Para estudar e praticar, leia o livro-texto indicado e resolva os exercícios sugeridos.

Lehilton

Agradecimentos (Cid e Cândida)

- Várias pessoas contribuíram direta ou indiretamente com a preparação deste material.
- Algumas destas pessoas cederam gentilmente seus arquivos digitais enquanto outras cederam gentilmente o seu tempo fazendo correções e dando sugestões.
- Uma lista destes "colaboradores" (em ordem alfabética) é dada abaixo:
  - Célia Picinin de Mello
  - Flávio Keidi Miyazawa
  - José Coelho de Pina
  - Orlando Lee
  - Paulo Feofiloff
  - Pedro Rezende
  - Ricardo Dahab
  - Zanoni Dias

Programação Dinâmica

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos

- Tipicamente o paradigma de programação dinâmica aplica-se a problemas de **otimização**.
- Podemos utilizar programação dinâmica em problemas onde há:
  - **Subestrutura Ótima:** As soluções ótimas do problema incluem soluções ótimas de subproblemas.
  - **Sobreposição de Subproblemas:** O cálculo da solução através de recursão implica no recálculo de subproblemas.

Programação Dinâmica: Conceitos Básicos (Cont.)

- A técnica de programação dinâmica visa evitar o recálculo desnecessário das soluções dos subproblemas.
- Para isso, soluções de subproblemas são armazenadas em tabelas.
- Logo, para que o algoritmo de programação dinâmica seja eficiente, é preciso que o número total de subproblemas que devem ser resolvidos seja pequeno (polinomial no tamanho da entrada).

Multiplicação de Cadeias de Matrizes

Problema: Multiplicação de Matrizes

Calcular o número mínimo de operações de multiplicação (escalar) necessários para computar a matriz M dada por:

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots M_i \ldots \times M_n$$

onde M_i é uma matriz de b_{i-1} linhas e b_i colunas, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Matrizes são multiplicadas aos pares sempre. Então, é preciso encontrar uma parentização (agrupamento) ótimo para a cadeia de matrizes.
- Para calcular a matriz M' dada por $M_i \times M_{i+1}$ são necessárias $b_{i-1} * b_i * b_{i+1}$ multiplicações entre os elementos de M_i e M_{i+1}.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- **Exemplo:** Qual é o mínimo de multiplicações escalares necessárias para computar $M = M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ com $b = \{200, 2, 30, 20, 5\}$?
- As possibilidades de parentização são:

$$
\begin{array}{lcl}
M = (M_1 \times (M_2 \times (M_3 \times M_4))) & \rightarrow & 5.300 \text{ multiplicações} \\
M = (M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4)) & \rightarrow & 3.400 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4)) & \rightarrow & 4.500 \text{ multiplicações} \\
M = ((M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4) & \rightarrow & 29.200 \text{ multiplicações} \\
M = (((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4) & \rightarrow & 152.000 \text{ multiplicações}
\end{array}
$$

- A ordem das multiplicações faz **muita** diferença!

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Poderíamos calcular o número de multiplicações para todas as possíveis parentizações.
- O número de possíveis parentizações é dado pela recorrência:

$$P(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k) \cdot P(n-k) & n > 1, \end{cases}$$

- Mas $P(n) \in \Omega(4^n/n^{\frac{3}{2}})$, a estratégia de força bruta é impraticável!

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- Inicialmente, para todo (i, j) tal que $1 \leq i \leq j \leq n$, vamos definir as seguintes matrizes:

$$M_{i,j} = M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_j.$$

- Agora, dada uma parentização ótima, existem dois pares de parênteses que identificam o último par de matrizes que serão multiplicadas.
  Ou seja, existe k tal que $M = M_{1,k} \times M_{k+1,n}$.
- Como a parentização de M é ótima, as parentizações no cálculo de $M_{i,k}$ e $M_{k+1,n}$ devem ser ótimas também, caso contrário, seria possível obter uma parentização de M ainda melhor!
- Eis a subestrututra ótima do problema: a parentização ótima de M inclui a parentização ótima de $M_{i,k}$ e $M_{k+1,n}$.

Multiplicação de Cadeias de Matrizes (Cont.)

- De forma geral, se $m[i,j]$ é número mínimo de multiplicações que deve ser efetuado para computar $M_i \times M_{i+1} \times \ldots \times M_j$, então $m[i,j]$ é dado por:

$$m[i,j] := \min_{i \leq k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + b_{i-1} * b_k * b_j\}.$$

- Podemos então projetar um algoritmo recursivo (indutivo) para resolver o problema.

Multiplicação de Matrizes - Algoritmo Recursivo

MINIMO-MULTIPLICACOES-RECURSIVO(b, i, j)
▷ **Entrada:** Vetor b com as dimensões das matrizes e os índices i e j que delimitam o início e término da subcadeia.
▷ **Saída:** O número mínimo de multiplicações escalares necessário para computar a multiplicação da subcadeia. Esse valor é registrado em uma tabela ($m[i, j]$), bem como o índice da divisão em subcadeias ótimas ($s[i, j]$).

```
1   se i = j então devolva 0
2   m[i,j] := ∞
3   para k := i até j − 1 faça
4       q := MINIMO-MULTIPLICACOES-RECURSIVO(b, i, k)+
             MINIMO-MULTIPLICACOES-RECURSIVO(b, k + 1, j)+
             b[i − 1] ∗ b[k] ∗ b[j]
5       se m[i,j] > q então
6           m[i,j] := q ; s[i,j] := k
7   devolva m[i,j]
```

Efetuando a Multiplicação Ótima

- É muito fácil efetuar a multiplicação da cadeia de matrizes com o número mínimo de multiplicações escalares usando a tabela s, que registra os índices ótimos de divisão em subcadeias.

Multiplica-Matrizes(M, s, i, j)
▷ **Entrada:** Cadeia de matrizes M, a tabela s e os índices i e j que delimitam a subcadeia a ser multiplicada.
▷ **Saída:** A matriz resultante da multiplicação da subcadeia entre i e j, efetuando o mínimo de multiplicações escalares.

```
1  se i < j então
2      X := Multiplica-Matrizes(M, s, i, s[i, j])
3      Y := Multiplica-Matrizes(M, s, s[i, j] + 1, j)
4      devolva Multiplica(X, Y, b[i − 1], b[s[i, j]], b[j])
5  senão devolva M_i
```

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- O número mínimo de operações feita pelo algoritmo recursivo é dada pela recorrência:

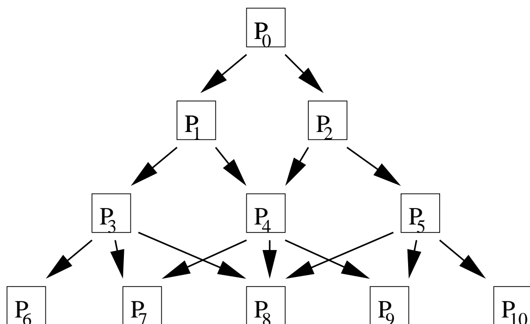
$$T(n) \geq \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} [T(k) + T(n-k) + 1] & n > 1, \end{cases}$$

- Portanto, $T(n) \geq 2\sum_{k=1}^{n-1} T(i) + n$, para $n > 1$.
- É possível provar (por substituição) que $T(n) \geq 2^{n-1}$, ou seja, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$, ainda impraticável!

Algoritmo Recursivo - Complexidade

- A ineficiência do algoritmo recursivo deve-se à sobreposição de subproblemas: o cálculo do mesmo $m[i,j]$ pode ser requerido em vários subproblemas.
- Por exemplo, para $n = 4$, $m[1,2]$, $m[2,3]$ e $m[3,4]$ são computados duas vezes.
- O número total de $m[i,j]$'s calculados é $O(n^2)$ apenas!
- Portanto, podemos obter um algoritmo mais eficiente se evitarmos recálculos de subproblemas.

Um subproblema pode aparecer várias vezes



Divisão e Conquista com Recursão simples:

P_4 resolvido 2 vezes (uma por P_1 e uma por P_2);

P_7 resolvido 3 vezes (uma por P_3 e duas por P_4);

P_8 resolvido 4 vezes (uma por P_3, duas por P_4 e uma por P_5);

P_9 resolvido 3 vezes (uma por P_3 e duas por P_4);

Memorização x Programação Dinâmica

- Existem duas técnicas para evitar o recálculo de subproblemas:
  - **Memorização:** Consiste em manter a estrutura recursiva do algoritmo, registrando em uma tabela o valor ótimo para subproblemas já computados e verificando, antes de cada chamada recursiva, se o subproblema a ser resolvido já foi computado.
  - **Programação Dinâmica:** Consiste em preencher uma tabela que registra o valor ótimo para cada subproblema de forma apropriada, isto é, a computação do valor ótimo de cada subproblema depende somente de subproblemas já previamente computados. Elimina completamente a recursão.

Algoritmo de Memorização

```
Minimo-Multiplicacoes-Memorizado(b, n)
1    para i := 1 até n faça
2        para j := 1 até n faça
3            m[i, j] := ∞
4    devolva Memorizacao(b, 1, n)
```

```
Memorizacao(b, i, j)
1    se m[i, j] < ∞ então devolva m[i, j]
2    se i = j então m[i, j] := 0
3    senão
4        para k := i até j − 1 faça
5            q := Memorizacao(b, i, k)+
                  Memorizacao(b, k + 1, j) + b[i − 1] ∗ b[k] ∗ b[j]
6            se m[i, j] > q então m[i, j] := q; s[i, j] := k
7    devolva m[i, j]
```

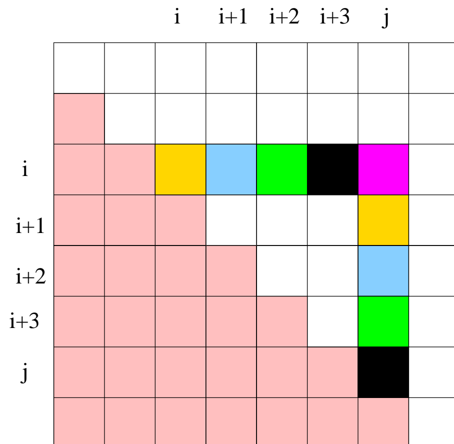
Algoritmo de Programação Dinâmica

- O uso de programação dinâmica é preferível pois elimina completamente o uso de recursão.
- O algoritmo de programação dinâmica para o problema da multiplicação de matrizes torna-se trivial se computarmos, para valores crescentes de u, o valor ótimo de todas as subcadeias de tamanho u.

Algoritmo de Programação Dinâmica

```
MINIMO-MULTIPLICACOES(b)
▷ Entrada: Vetor b com as dimensões das matrizes.
▷ Saída: As tabelas m e s preenchidas.
1   para i = 1 até n faça m[i,i] := 0
    ▷ calcula o mínimo de todas sub-cadeias de tamanho u + 1
2   para u = 1 até n − 1 faça
3       para i = 1 até n − u faça
4           j := i + u; m[i,j] := ∞
5           para k = i até j − 1 faça
6               q := m[i,k] + m[k+1,j] + b[i−1] * b[k] * b[j]
7               se q < m[i,j] então
8                   m[i,j] := q; s[i,j] := k
9   devolva (m,s)
```

Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo



Algoritmo de Programação Dinâmica - Exemplo

Algoritmo de Programação Dinâmica - Complexidade

- A complexidade de tempo do algoritmo é dada por:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} \sum_{k=i}^{i+u-1} \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} u\, \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} u(n-u)\, \Theta(1) \\
&= \sum_{u=1}^{n-1} (nu - u^2)\, \Theta(1).
\end{aligned}
$$

Algoritmo de Programação Dinâmica - Complexidade

- Como
$$\sum_{u=1}^{n-1} nu = n^3/2 - n^2/2$$
e
$$\sum_{u=1}^{n-1} u^2 = n^3/3 - n^2/2 + n/6.$$
Então,
$$T(n) = (n^3/6 - n/6)\,\Theta(1).$$

- A complexidade de tempo do algoritmo é $\Theta(n^3)$.
- A complexidade de espaço é $\Theta(n^2)$, já que é necessário armazenar a matriz com os valores ótimos dos subproblemas.

O Problema Binário da Mochila

O Problema da Mochila

Dada uma mochila de capacidade W (inteiro) e um conjunto de n itens com tamanho w_i (inteiro) e valor c_i associado a cada item i, queremos determinar quais itens devem ser colocados na mochila de modo a **maximizar** o valor total transportado, respeitando sua capacidade.

- Podemos fazer as seguintes suposições:
  - $\sum_{i=1}^{n} w_i > W$;
  - $0 < w_i \leq W$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

O Problema Binário da Mochila

- Podemos formular o problema da mochila com Programação Linear Inteira:
  - Criamos uma variável x_i para cada item: $x_i = 1$ se o item i estiver na solução ótima e $x_i = 0$ caso contrário.
  - A modelagem do problema é simples:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W \qquad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \qquad (3)$$

- (1) é a função objetivo e (2-3) o conjunto de restrições.

O Problema Binário da Mochila

- Como podemos projetar um algoritmo para resolver o problema?
- Existem 2^n possíveis subconjuntos de itens: um algoritmo de força bruta é impraticável!
- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- Se o item n estiver na solução ótima, o valor desta solução será c_n mais o valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade $W - w_n$ considerando-se só os $n - 1$ primeiros itens.
- Se o item n não estiver na solução ótima, o valor ótimo será dado pelo valor da melhor solução do problema da mochila com capacidade W considerando-se só os $n - 1$ primeiros itens.

O Problema Binário da Mochila

- Seja $z[k, d]$ o valor ótimo do problema da mochila considerando-se uma capacidade d para a mochila que contém um subconjunto dos k primeiros itens da instância original.
- A fórmula de recorrência para computar $z[k, d]$ para todo valor de d e k é:

$$z[0, d] = 0$$

$$z[k, 0] = 0$$

$$z[k, d] = \begin{cases} z[k-1, d], & \text{se } w_k > d \\ \max\{z[k-1, d], z[k-1, d-w_k] + c_k\}, & \text{se } w_k \leq d \end{cases}$$

O Problema Binário da Mochila - Complexidade
Recursão

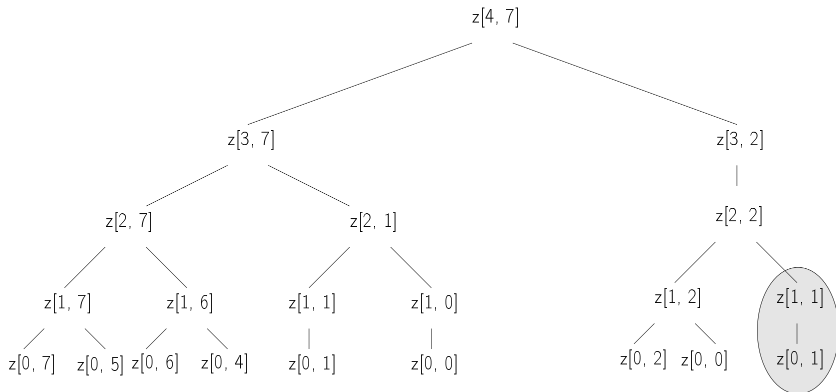
- A complexidade do algoritmo recursivo para este problema no pior caso é dada pela recorrência:

$$T(k,d) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ ou } d = 0 \\ T(k-1,d) + T(k-1,d-w_k) + 1 & k > 0 \text{ e } d > 0. \end{cases}$$

- Portanto, no pior caso, o algoritmo recursivo tem complexidade $\Omega(2^n)$. É impraticável!
- Mas há sobreposição de subproblemas: o recálculo de subproblemas pode ser evitado!

Mochila - Sobreposição de Subproblemas

- Considere vetor de tamanhos $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e capacidade da mochila $W = 7$. A árvore de recursão seria:

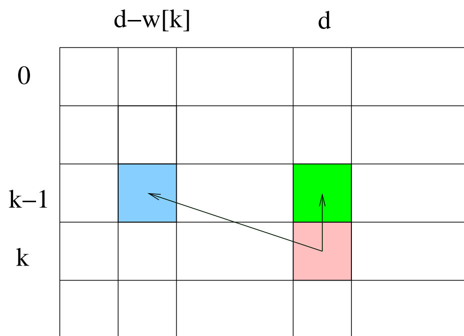


- O subproblema $z[1, 1]$ é computado duas vezes.

Mochila - Programação Dinâmica

- O número total máximo de subproblemas a serem computados é nW.
- Isso porque tanto o tamanho dos itens quanto a capacidade da mochila são inteiros!
- Podemos então usar programação dinâmica para evitar o recálculo de subproblemas.
- Como o cálculo de $z[k, d]$ depende de $z[k-1, d]$ e $z[k-1, d-w_k]$, preenchemos a tabela linha a linha.

Mochila



$$z[k,d] = \max \{ z[k-1,d] \; , \; z[k-1,d-w[k]] + c[k]$$

O Problema Binário da Mochila - Algoritmo

Mochila(c, w, W, n)

▷ **Entrada:** Vetores c e w com valor e tamanho de cada item, capacidade W da mochila e número de itens n.

▷ **Saída:** O valor máximo do total de itens colocados na mochila.

1 **para** $d := 0$ **até** W **faça** $z[0, d] := 0$
2 **para** $k := 1$ **até** n **faça** $z[k, 0] := 0$
3 **para** $k := 1$ **até** n **faça**
4   **para** $d := 1$ **até** W **faça**
5         $z[k, d] := z[k-1, d]$
6   **se** $w_k \leq d$ **e** $c_k + z[k-1, d-w_k] > z[k, d]$ **então**
7             $z[k, d] := c_k + z[k-1, d-w_k]$
8 **devolva** $(z[n, W])$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

Mochila - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É um algoritmo pseudo-polinomial: sua complexidade depende do valor de W, parte da entrada do problema.
- O algoritmo não devolve o subconjunto de valor total máximo, apenas o valor máximo.
- É fácil recuperar o subconjunto a partir da tabela z preenchida.

Mochila - Recuperação da Solução

MOCHILA-SOLUCAO(z, n, W)
▷ **Entrada:** Tabela z preenchida, capacidade W da mochila e número de itens n.
▷ **Saída:** O vetor x que indica os itens colocados na mochila.
  para $i := 1$ **até** n **faça** $x[i] := 0$
  MOCHILA-SOLUCAO-AUX(x, z, n, W)
  devolva (x)

MOCHILA-SOLUCAO-AUX(x, z, k, d)
se $k \neq 0$ **então**
  se $z[k, d] = z[k-1, d]$ **então**
    $x[k] := 0$; MOCHILA-SOLUCAO-AUX$(x, z, k-1, d)$
  senão
    $x[k] := 1$; MOCHILA-SOLUCAO-AUX$(x, z, k-1, d-w_k)$

Mochila - Exemplo

- Exemplo: $c = \{10, 7, 25, 24\}$, $w = \{2, 1, 6, 5\}$ e $W = 7$.

Mochila - Complexidade

- O algoritmo de recuperação da solução tem complexidade $O(n)$.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da mochila é $O(nW)$.
- É possível economizar memória, registrando duas linhas: a que está sendo preenchida e a anterior. Mas isso inviabiliza a recuperação da solução.

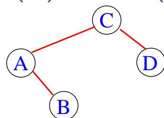
Problema da Árvore de Busca Ótima

Problema da Árvore de Busca

Dados elementos $(e_1 < e_2 < \ldots < e_n)$, onde cada item e_i é consultado $f(e_i)$ vezes, construir uma árvore de busca binária, tal que o total de nós consultados é mínimo.

Aplicações: Construção de dicionários estáticos, processadores de texto, verificadores de ortografia.

Exemplo: Considere quatro chaves: $A \leq B \leq C \leq D$
e frequências $f(A) = 45$, $f(B) = 25$, $f(C) = 18$ e $f(D) = 12$.

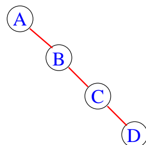


Total de nós acessados nesta árvore = 207

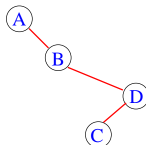
Podemos construir todas as árvores e escolher a melhor?

Listando as árvores

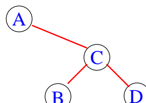
Não! Número de árvores de busca pode ser muito grande!!



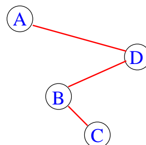
45+50+54+48=197



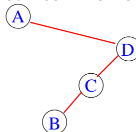
45+50+72+36=203



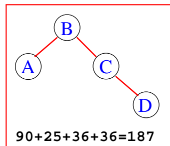
45+75+36+36=192

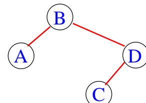


45+75+72+24=216

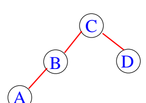


45+100+54+24=223

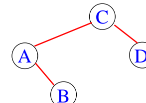




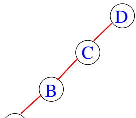
90+25+54+24=193



135+50+18+24=227



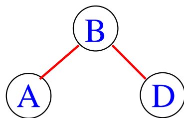
90+75+18+24=207



Propriedades da árvore de busca ótima

Definicao Se T é uma árvore binária de busca e v é um vértice, denotamos por $T(v)$ a subárvore enraizada em v contendo todos os vértices abaixo de v.

No exemplo anterior temos $A \leq B \leq C \leq D$.
Pergunta: Em uma árvore de busca T, podemos ter $T(B)$ nesta forma ?

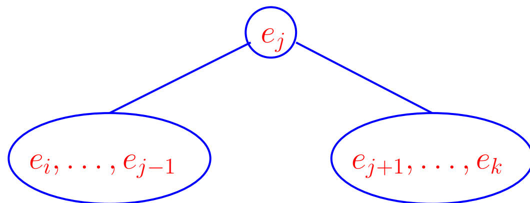


Não: Pois C deveria estar em $T(B)$.
Conclusão: Se T é uma árvore de busca, e v é um vértice de T, então $T(v)$ contém apenas elementos consecutivos.

Propriedades da árvore de busca ótima (Cont.)

Seja T uma árvore de busca, e_j um vértice de T e $T(e_j) = \{e_i, \dots, e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \dots, e_k\}$. Então

- no ramo esquerdo deve haver os elementos $e_i, \dots, e_{j-1}$.
- no ramo direito deve haver os elementos $e_{j+1}, \dots, e_k$.
- Sub-árvores de $\{e_i, \dots, e_{j-1}\}$ e $\{e_{j+1}, \dots, e_k\}$ devem ser ótimas.



- Frequência de acessos à raiz em uma árvore de busca é a soma das frequências dos elementos na árvore
- Qualquer elemento de $\{e_i, \dots, e_k\}$ é candidato a ser raiz

Definição recursiva da solução ótima

Idéia: Gerar árvores de busca a partir de árvores de busca de tamanhos menores
Estratégia: Bottom-Up

Seja $A(e_i, \ldots, e_k)$:=número de nós acessados em árvore ótima contendo $\{e_i, \ldots, e_k\}$.

Então

- $A(\emptyset) = 0$
- $A(e_i, \ldots, e_k) =$
  $$\min_{i \leq j \leq k} \left\{ A(e_i, \ldots, e_{j-1}) + A(e_{j+1}, \ldots, e_k) + \sum_{t=i}^{k} f(e_t) \right\}$$

Tabela

Item \ Tam.Seq.	0	1	...	t	...	n
e_1	0	$f(e_1)$	...		...	$M(1,n)$
e_2	0	$f(e_2)$	...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...		...	
e_i	0	$f(e_i)$	...	$M(i,t) := A(e_i,\ldots,e_k)$	...	
$\vdots$	0	$\vdots$	...		...	
$(k{=}i{+}t{-}1)$ e_k	0	$f(e_k)$	...			
$\vdots$	0	$\vdots$	...		...	
e_n	0	$f(e_n)$	...		...	

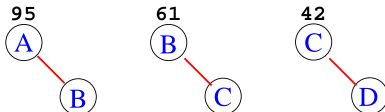
$A(\emptyset) = 0$

$A(e_i) = f(e_i)$

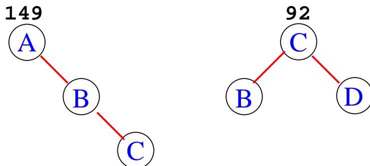
$$A(e_i,\ldots,e_k) = \min_{i \le j \le k} \left\{ A(e_i,\ldots,e_{j-1}) + A(e_{j+1},\ldots,e_k) + \sum_{t=i}^{k} f(e_t) \right\}$$

Árvores ótimas de tamanho 1

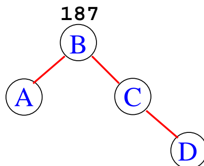
Árvores ótimas de tamanho 2



Árvores ótimas de tamanho 3



Árvores ótimas de tamanho 4



Algoritmo

ÁRVORE-BUSCA$(e_1, \ldots, e_n, f)$
1 para $i \leftarrow 0$ até $n+1$ faça $M(i,0) \leftarrow 0$
2 para $t \leftarrow 1$ até n faça
3   para $i \leftarrow 1$ até $n-t+1$ faça
5      $S \leftarrow f(e_i) + f(e_{i+1}) + \cdots + f(e_{i+t-1})$
6      $M(i,t) \leftarrow \min_{0 \le t' \le t-1} \left\{ M(i,t') + M(i+t'+1, t-t'-1) + S \right\}$

Solução em: $M(1,n)$

Teorema

O algoritmo ÁRVORE-BUSCA *encontra o valor da árvore de busca ótima em tempo* $O(n^3)$.

Exercícios:

- O algoritmo apresentado para resolver o problema da árvore ótima apenas apresenta o valor esperado de consultas de nós para todos os itens. Faça uma implementação do algoritmo de maneira que ele apresente a árvore de busca ótima.

Subcadeia comum máxima

Definição: Subcadeia

Dada uma cadeia $S = a_1 \dots a_n$, dizemos que $S' = b_1 \dots b_p$ é uma *subcadeia* de S se existem p índices $i(j)$ satisfazendo:

(a) $i(j) \in \{1, \dots, n\}$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$;

(b) $i(j) < i(j+1)$ para todo $j \in \{1, \dots, p-1\}$;

(c) $b_j = a_{i(j)}$ para todo $j \in \{1, \dots, p\}$.

- **Exemplo:** $S = ABCDEFG$ e $S' = ADFG$.

Problema da Subcadeia Comum Máxima

Dadas duas cadeias de caracteres X e Y de um alfabeto Σ, determinar a maior subcadeia comum de X e Y

Subcadeia comum máxima (cont.)

- É um problema de otimização. Será que tem subestrutura ótima?
- **Notação:** Seja S uma cadeia de tamanho n. Para todo $i = 1, \ldots, n$, o prefixo de tamanho i de S será denotado por S_i.
- **Exemplo:** Para $S = ABCDEFG$, $S_2 = AB$ e $S_4 = ABCD$.
- **Definição:** $c[i,j]$ é o tamanho da subcadeia comum máxima dos prefixos X_i e Y_j. Logo, se $|X| = m$ e $|Y| = n$, $c[m,n]$ é o valor ótimo.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- **Teorema (subestrutura ótima):** Seja $Z = z_1 \ldots z_k$ a subcadeia comum máxima de $X = x_1 \ldots x_m$ e $Y = y_1 \ldots y_n$, denotado por $Z = \text{SCM}(X, Y)$.
  1. Se $x_m = y_n$ então $z_k = x_m = y_n$ e $Z_{k-1} = \text{SCM}(X_{m-1}, Y_{n-1})$.
  2. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq x_m$ implica que $Z = \text{SCM}(X_{m-1}, Y)$.
  3. Se $x_m \neq y_n$ então $z_k \neq y_n$ implica que $Z = \text{SCM}(X, Y_{n-1})$.

- **Fórmula de Recorrência:**

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max\{c[i-1, j], c[i, j-1]\} & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Subcadeia comum máxima (cont.)

```
SCM(X, m, Y, n, c, b)
 1   para i = 0 até m faça c[i,0] := 0
 2   para j = 1 até n faça c[0,j] := 0
 3   para i = 1 até m faça
 4       para j = 1 até n faça
 5           se x_i = y_j então
 6               c[i,j] := c[i−1, j−1] + 1 ; b[i,j] := "↖"
 7           senão
 8               se c[i, j−1] > c[i−1, j] então
 9                   c[i,j] := c[i, j−1] ; b[i,j] := "←"
10               senão
11                   c[i,j] := c[i−1, j]; b[i,j] := "↑";
12   devolva (c[m,n], b).
```

Subcadeia comum máxima - Exemplo

- **Exemplo:** $X = abcb$ e $Y = bdcab$, $m = 4$ e $n = 5$.

X	Y	0	1 (b)	2 (d)	3 (c)	4 (a)	5 (b)
	0	0	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	0	1	1
b	2	0	1	1	1	1	2
c	3	0	1	1	2	2	2
b	4	0	1	1	2	2	3

X	Y	0	1 (b)	2 (d)	3 (c)	4 (a)	5 (b)
	0						
a	1		↑	↑	↑	↖	←
b	2		↖	←	←	↑	↖
c	3		↑	↑	↖	←	↑
b	4		↖	↑	↑	↑	↖

Subcadeia comum máxima - Complexidade

- Claramente, a complexidade do algoritmo é $O(mn)$.
- O algoritmo não encontra a subcadeia comum de tamanho máximo, apenas seu tamanho.
- Com a tabela b preenchida, é fácil encontrar a subcadeia comum máxima.

Subcadeia comum máxima (cont.)

- Para recuperar a solução, basta chamar Recupera-SCM(b, X, m, n).

```
Recupera-SCM(b, X, i, j)
1  se i = 0 e j = 0 então devolva
2  se b[i, j] = "↖" então
3     Recupera-SCM(b, X, i − 1, j − 1); imprima x_i
4  senão
5     se b[i, j] = "↑" então
6        Recupera-SCM(b, X, i − 1, j)
7     senão
8        Recupera-SCM(b, X, i, j − 1)
```

Subcadeia comum máxima - Complexidade

- A determinação da subcadeia comum máxima é feita em tempo $O(m+n)$ no pior caso.
- Portanto, a complexidade de tempo e de espaço do algoritmo de programação dinâmica para o problema da subcadeia comum máxima é $O(mn)$.
- Note que a tabela b é dispensável, podemos economizar memória recuperando a solução a partir da tabela c. Ainda assim, o gasto de memória seria $O(mn)$.
- Caso não haja interesse em determinar a subcadeia comum máxima, mas apenas seu tamanho, é possível reduzir o gasto de memória para $O(\min\{n,m\})$: basta registrar apenas a linha da tabela sendo preenchida e a anterior.