MO417 — Complexidade de Algoritmos I — 2s2019

Teste 6 — 28/11/2019

Peso: 6

Duração: 7 dias

Entregue em **PDF** (preferencialmente feito em LaTeX) no email **rafael@ic.unicamp.br** até **23:59** do dia **28/11**. Capriche na escrita, mas seja sucinto nas suas respostas.

As questões podem ser discutidas com os colegas, mas a escrita deve ser individual. Plágio não será tolerado!

Questão 1. Projete um algoritmo eficiente que dados uma rede de comunicação representada por um grafo direcionado $G = (V, E)$, onde cada aresta $(u, v) \in E$ tem um probabilidade independente $p(u, v) \in [0, 1]$ de falhar, e dois vértices s e t de G, encontra o caminho com menor probabilidade de falha entre s e t na rede. Note que a probabilidade de um caminho falhar é

$$1 - \prod_{(u,v)\in P} (1 - p(u, v)).$$

Explique brevemente porque o seu algoritmo está correto.

Questão 2. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não-orientado com pesos $\omega(u, v)$ associados a cada aresta $(u, v) \in E$. Considere o problema de encontrar uma árvore geradora mínima de (G, ω). Professor B. Smart propôs o seguinte algoritmo para encontrar uma árvore geradora mínima de (G, ω) onde $G = (V, E)$.

SMART-AGM(G, ω)
1. Ordene E em ordem não crescente de pesos
2. $H \leftarrow G$
3. Para cada $e \in E$ em ordem não crescente de pesos, faça
4.   Se $H - e$ é conexo,
5.   então $H \leftarrow H - e$
6. Devolva H

(a) Argumente sucintamente (em poucas linhas) que o grafo obtido é conexo e acíclico.

(b) Mostre que se e é uma aresta de G com peso máximo e $G - e$ é conexo, então existe árvore geradora mínima de G que não contém e.

(c) Conclua mostrando que o algoritmo está correto.

Questão 3. Dado um conjunto de elementos $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ e uma família de conjuntos $\mathscr{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, onde $S_i \subseteq E$, uma cobertura de conjuntos é uma subfamília $F \subseteq \mathscr{S}$ tal que $\bigcup_{S\in F} S = E$. O problema da cobertura por conjuntos é: dados E, $\mathscr{S}$ e k, existe uma cobertura de conjuntos F de tamanho $|F| \leq k$? Mostre que cobertura por conjuntos é NP-completo. Dica: você pode supor que cobertura por vértices é NP-completo.