Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação

Rafael C. S. Schouery   Orlando Lee   Flávio K. Miyazawa
Eduardo C. Xavier

Universidade Estadual de Campinas

De 27 a 31 de Julho de 2015

Leilões e Mecanismos

Leilões

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas
- Direitos de utilização de recursos naturais

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas
- Direitos de utilização de recursos naturais
- etc...

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

Leilão holandês:

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa
- O primeiro a manifestar interesse leva o item

Leilão de um item de carta fechada

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0
- O vencedor paga um preço p que depende apenas dos lances dos compradores

Modelando o leilão

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador b acredita que o item vale v_b

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador b acredita que o item vale v_b
- Um jogador b submete um lance ℓ_b ($\ell_b \in \mathbb{R}_+$)

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador b acredita que o item vale v_b
- Um jogador b submete um lance ℓ_b ($\ell_b \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador b acredita que o item vale v_b
- Um jogador b submete um lance ℓ_b ($\ell_b \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:
  - $v_b - p(\ell)$, se o jogador ganha o item

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador b acredita que o item vale v_b
- Um jogador b submete um lance ℓ_b ($\ell_b \in \mathbb{R}_+$)
- A utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:
  - $v_b - p(\ell)$, se o jogador ganha o item
  - 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

- $v_b - p(\ell) = v_b - \ell_b$, se o jogador ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

- $v_b - p(\ell) = v_b - \ell_b$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

- $v_b - p(\ell) = v_b - \ell_b$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_b < v_b$

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

- $v_b - p(\ell) = v_b - \ell_b$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_b < v_b$

- i. e., se ele der um lance menor do que o seu valor para o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_b(\ell)$ de um jogador b é igual a:

- $v_b - p(\ell) = v_b - \ell_b$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_b < v_b$

- i. e., se ele der um lance menor do que o seu valor para o item
- Não vale a pena relatar o real valor para o item

Leilão de segundo preço (Vickrey)

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$
- Se $v_b \leq p$, então, para qualquer lance ℓ_b, a utilidade de b é não-positiva

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$
- Se $v_b \leq p$, então, para qualquer lance ℓ_b, a utilidade de b é não-positiva
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade 0

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$
- Se $v_b \leq p$, então, para qualquer lance ℓ_b, a utilidade de b é não-positiva
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade 0
- Se $v_b > p$, a utilidade de b é no máximo $v_b - p$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$
- Se $v_b \leq p$, então, para qualquer lance ℓ_b, a utilidade de b é não-positiva
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade 0
- Se $v_b > p$, a utilidade de b é no máximo $v_b - p$
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade $v_b - p$

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_b é uma estratégia dominante para o comprador b:

- ℓ_{-b}: lances dos outros jogadores
- $p = \max\{\ell_{b'} : b' \neq b\}$
- Se $v_b \leq p$, então, para qualquer lance ℓ_b, a utilidade de b é não-positiva
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade 0
- Se $v_b > p$, a utilidade de b é no máximo $v_b - p$
  - melhor dar o lance v_b e ter utilidade $v_b - p$

Note que, se todo jogador relatar v_b, então o item é entregue para o comprador com maior v_b, maximizando o bem-estar social

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):

- Cada jogador dá um lance em um envelope

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Vantagem: induz compradores a declararem o valor real

Mecanismos

- n: número de participantes

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j
- V_j: conjunto das possíveis valorações de j

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j
- V_j: conjunto das possíveis valorações de j

Mecanismo (f, p):

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j
- V_j: conjunto das possíveis valorações de j

Mecanismo (f, p):

- função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j
- V_j: conjunto das possíveis valorações de j

Mecanismo (f, p):

- função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$
- e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_j : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_j : A \to \mathbb{R}$: valoração das alternativas para j
- V_j: conjunto das possíveis valorações de j

Mecanismo (f, p):

- função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$
- e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_j : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$

O valor $v_j(f(\ell_1, \ldots, \ell_n)) - p_j(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ é a utilidade de j para $\ell_1, \ldots, \ell_n$

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

onde

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

onde

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

onde

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$
- $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

onde

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$
- $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$

vale que

$$v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j}) \geq v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$$

Mecanismos compatível com incentivo

Um mecanismo (f, p) é compatível com incentivo se

- para todo j,
- para todo $v_j \in V_j$ e
- todo $\ell \in V$

onde

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$
- $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$

vale que

$$v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j}) \geq v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$$

compatível com incentivo = à prova de estratégia = *truthful*

Exemplo

Leilão de segundo preço:

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$
- Preços: para cada i em $[n]$:

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$
- Preços: para cada i em $[n]$:
  - $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$
- Preços: para cada i em $[n]$:
  - $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$
  - $p_a(a) = v_b$ onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n] \setminus \{a\}\}$

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$
- Preços: para cada i em $[n]$:
  - $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$
  - $p_a(a) = v_b$ onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n] \setminus \{a\}\}$

Já vimos que esse mecanismo é compatível com incentivo

Mecanismos VCG

$\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social

Mecanismos VCG

$\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

Mecanismos VCG

$\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_j \ell_j(a') : a' \in A \right\}$

Mecanismos VCG

$\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_j \ell_j(a') : a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_j : V_{-j} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_j(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_j(\ell_{-j}) - \sum_{k \neq j} \ell_k(a)$$

Mecanismos VCG

Observações:

Mecanismos VCG

Observações:

- O mecanismo maximiza bem-estar social

Mecanismos VCG

Observações:

- O mecanismo maximiza bem-estar social
- Note que o $h_j(\ell_{-j})$ não depende do valor ℓ_j

Mecanismos VCG

Observações:

- O mecanismo maximiza bem-estar social
- Note que o $h_j(\ell_{-j})$ não depende do valor ℓ_j
- Portanto j, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher ℓ_j de modo que $\sum_{k \neq j} \ell_k(a)$ seja máximo

Mecanismos VCG

Observações:

- O mecanismo maximiza bem-estar social
- Note que o $h_j(\ell_{-j})$ não depende do valor ℓ_j
- Portanto j, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher ℓ_j de modo que $\sum_{k \neq j} \ell_k(a)$ seja máximo
  - já que a escolha de ℓ_j afeta o $a = f(\ell_1, \ldots, \ell_n)$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova:

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$
- $u_j = v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j})$ e $u'_j = v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$
- $u_j = v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j})$ e $u'_j = v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$

Precisamos mostrar que $u_j \geq u'_j$. Note que

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$
- $u_j = v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j})$ e $u'_j = v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$

Precisamos mostrar que $u_j \geq u'_j$. Note que

$$u_j = v_j(a) - \left(h_j(\ell_{-j}) - \sum_{k \neq j} \ell_k(a)\right) = v_j(a) + \sum_{k \neq j} \ell_k(a) - h_j(\ell_{-j})$$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$
- $u_j = v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j})$ e $u'_j = v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$

Precisamos mostrar que $u_j \geq u'_j$. Note que

$$u_j = v_j(a) - \left(h_j(\ell_{-j}) - \sum_{k \neq j} \ell_k(a) \right) = v_j(a) + \sum_{k \neq j} \ell_k(a) - h_j(\ell_{-j})$$

Similarmente, $u'_i = v_j(a') + \sum_{k \neq j} \ell_k(a') - h_j(\ell_{-j})$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é compatível com incentivo

Prova: Fixe j, $\ell_1, \ldots, \ell_n$ e v_j e seja:

- $a = f(v_j, \ell_{-j})$ e $a' = f(\ell_j, \ell_{-j})$
- $u_j = v_j(a) - p_j(v_j, \ell_{-j})$ e $u'_j = v_j(a') - p_j(\ell_j, \ell_{-j})$

Precisamos mostrar que $u_j \geq u'_j$. Note que

$$u_j = v_j(a) - \left(h_j(\ell_{-j}) - \sum_{k \neq j} \ell_k(a)\right) = v_j(a) + \sum_{k \neq j} \ell_k(a) - h_j(\ell_{-j})$$

Similarmente, $u'_i = v_j(a') + \sum_{k \neq j} \ell_k(a') - h_j(\ell_{-j})$

$v_j(a) + \sum_{k \neq j} \ell_k(a) \geq v_j(a') + \sum_{k \neq j} \ell_k(a')$ (pela escolha de a)

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \dots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$

- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_i(\ell_{-i}) - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_i(\ell_{-i}) - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

Como escolher as funções h_i?

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_i(\ell_{-i}) - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

Como escolher as funções h_i?

- Uma ideia ruim: $h_i = 0$

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_i(\ell_{-i}) - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

Como escolher as funções h_i?

- Uma ideia ruim: $h_i = 0$

Regra de pivotação Clarke:

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(\ell_1, \ldots, \ell_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = h_i(\ell_{-i}) - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

Como escolher as funções h_i?

- Uma ideia ruim: $h_i = 0$

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\}$

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\}$

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max\left\{\sum_{j\neq i} \ell_j(b) \colon b \in A\right\}$

Cada jogador é cobrado:

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max\left\{\sum_{j\neq i}\ell_j(b) \colon b \in A\right\}$

Cada jogador é cobrado:

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max\left\{\sum_{j\neq i}\ell_j(b) \colon b \in A\right\} - \sum_{j\neq i}\ell_j(a)$$

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max\left\{\sum_{j\neq i}\ell_j(b)\colon b \in A\right\}$

Cada jogador é cobrado:

$$p_i(\ell_1,\ldots,\ell_n) = \max\left\{\sum_{j\neq i}\ell_j(b)\colon b \in A\right\} - \sum_{j\neq i}\ell_j(a)$$

onde $a \in \arg\max\left\{\sum_i \ell_i(a')\colon a' \in A\right\}$

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(\ell_{-i}) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\}$

Cada jogador é cobrado:

$$p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$$

onde $a \in \arg\max \left\{ \sum_i \ell_i(a') \colon a' \in A \right\}$

Cada jogador paga pela externalidade que causa

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

- $p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

- $p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$

Isto é,

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

- $p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$

Isto é,

- Se $i \neq a$, então $\max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} = \ell_a$ e $\sum_{j \neq i} \ell_j(a) = \ell_a$, ou seja, $p_i = 0$

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

- $p_i(\ell_1, \ldots, \ell_n) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} \ell_j(a)$

Isto é,

- Se $i \neq a$, então $\max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} = \ell_a$ e $\sum_{j \neq i} \ell_j(a) = \ell_a$, ou seja, $p_i = 0$
- Se $i = a$, então $\max\left\{ \sum_{j \neq i} \ell_j(b) \colon b \in A \right\} = \ell_s$ onde ℓ_s é o segundo maior lance e $\sum_{j \neq i} \ell_j(a) = 0$, ou seja, $p_i = \ell_s$

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é individualmente racional se os jogadores sempre obtêm utilidade não-negativa ao reportar sua real valoração.

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é individualmente racional se os jogadores sempre obtêm utilidade não-negativa ao reportar sua real valoração.
  - Isto é, para todo $\ell \in V$, se $a = f(\ell)$ então $\ell_j(a) - p_j(\ell) \geq 0$

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é individualmente racional se os jogadores sempre obtêm utilidade não-negativa ao reportar sua real valoração.
  - Isto é, para todo $\ell \in V$, se $a = f(\ell)$ então $\ell_j(a) - p_j(\ell) \geq 0$

- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro ao invés de pagar

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é individualmente racional se os jogadores sempre obtêm utilidade não-negativa ao reportar sua real valoração.
  - Isto é, para todo $\ell \in V$, se $a = f(\ell)$ então $\ell_j(a) - p_j(\ell) \geq 0$
- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro ao invés de pagar
  - Isto é, $p_i(\ell) \geq 0$ para todo jogador i e todo ℓ

Racionalidade e transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é individualmente racional se os jogadores sempre obtêm utilidade não-negativa ao reportar sua real valoração.
  - Isto é, para todo $\ell \in V$, se $a = f(\ell)$ então $\ell_j(a) - p_j(\ell) \geq 0$

- Um mecanismo não tem transferências positivas se nenhum participante recebe dinheiro ao invés de pagar
  - Isto é, $p_i(\ell) \geq 0$ para todo jogador i e todo ℓ

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $\ell_i(a) \geq 0$ para todo $\ell_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional

Leilões Combinatórios

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador b e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_b(S)$

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador b e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_b(S)$

Restrições:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador b e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_b(S)$

Restrições:

- *Free-disposal*: $v_b(S) \leq v_b(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo b

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador b e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_b(S)$

Restrições:

- *Free-disposal*: $v_b(S) \leq v_b(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo b
- Normalização: $v_b(\emptyset) = 0$ para todo b

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador b e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_b(S)$

Restrições:

- *Free-disposal*: $v_b(S) \leq v_b(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo b
- Normalização: $v_b(\emptyset) = 0$ para todo b

As valorações são informações privadas

Leilões combinatórios

Alocação:

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_b \cap S_{b'} = \emptyset$ para todo $b \neq b'$

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_b \cap S_{b'} = \emptyset$ para todo $b \neq b'$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_b(S_b)$

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \dots, S_n$ de itens tais que $S_b \cap S_{b'} = \emptyset$ para todo $b \neq b'$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_b(S_b)$

Uma alocação é socialmente eficiente se ela maximiza o bem-estar social

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_b \cap S_{b'} = \emptyset$ para todo $b \neq b'$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_b(S_b)$

Uma alocação é socialmente eficiente se ela maximiza o bem-estar social

Idealmente, queremos métodos eficientes e compatíveis com incentivo para maximizar o bem-estar social

Formulação linear inteira

Variáveis binárias: $x_{b,S} = 1$ se e somente se comprador b recebe o subconjunto S

$$
\begin{aligned}
(\text{WDP}) \quad & \max \sum_{b \in B} \sum_{S \subseteq I} v_b(S)\, x_{b,S} & & & \\
& \text{sujeito a} \quad \sum_{S \subseteq I} x_{b,S} \leq 1 & & \forall b \in B, & (1)\\
& \sum_{b \in B} \sum_{S \subseteq I:\, i \in S} x_{b,S} \leq 1 & & \forall i \in I, & (2)\\
& x_{b,S} \in \{0,1\} & & \forall b \in B, \forall S \subseteq I & (3)
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{b \in B} u_b + \sum_{i \in I} p_i & \\
\text{sujeito a} \quad u_b + \sum_{i \in S} p_i \geq v_b(S) & \quad \forall b \in B, \forall S \subseteq I, \\
u_b \geq 0 & \quad \forall b \in B, \\
p_i \geq 0 & \quad \forall i \in I.
\end{aligned}
$$

Por folgas complementares, se $x_{b,S} > 0$, então:

Dual

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{b\in B} u_b + \sum_{i\in I} p_i & & \\
\text{sujeito a} \quad u_b + \sum_{i\in S} p_i \geq v_b(S) & \quad \forall b \in B, \forall S \subseteq I, \\
u_b \geq 0 & \quad \forall b \in B, \\
p_i \geq 0 & \quad \forall i \in I.
\end{aligned}
$$

Por folgas complementares, se $x_{b,S} > 0$, então:

- $u_b = v_b(S) - \sum_{i\in S} p_i$

Dual

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{b \in B} u_b + \sum_{i \in I} p_i & \\
\text{sujeito a} \quad u_b + \sum_{i \in S} p_i \geq v_b(S) & \quad \forall b \in B, \forall S \subseteq I, \\
u_b \geq 0 & \quad \forall b \in B, \\
p_i \geq 0 & \quad \forall i \in I.
\end{aligned}
$$

Por folgas complementares, se $x_{b,S} > 0$, então:

- $u_b = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Interpretação do dual:

Dual

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{b \in B} u_b + \sum_{i \in I} p_i \\
\text{sujeito a} \quad u_b + \sum_{i \in S} p_i \geq v_b(S) \quad & \forall b \in B, \forall S \subseteq I, \\
u_b \geq 0 \quad & \forall b \in B, \\
p_i \geq 0 \quad & \forall i \in I.
\end{aligned}
$$

Por folgas complementares, se $x_{b,S} > 0$, então:

- $u_b = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Interpretação do dual:

- p_i é o preço do item i

Dual

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{b \in B} u_b + \sum_{i \in I} p_i & & \\
\text{sujeito a} \quad u_b + \sum_{i \in S} p_i \geq v_b(S) & \quad & \forall b \in B, \forall S \subseteq I, \\
u_b \geq 0 & & \forall b \in B, \\
p_i \geq 0 & & \forall i \in I.
\end{aligned}
$$

Por folgas complementares, se $x_{b,S} > 0$, então:

- $u_b = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Interpretação do dual:

- p_i é o preço do item i
- u_b é a utilidade do comprador b

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador b é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador b é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de b para S é $u_b(S) = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador b é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de b para S é $u_b(S) = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador b é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de b para S é $u_b(S) = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_b(S) \ = \ v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i \ \geq \ v_b(S') - \sum_{i \in S'} p_i,$$

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador b é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de b para S é $u_b(S) = v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_b(S) \; = \; v_b(S) - \sum_{i \in S} p_i \; \geq \; v_b(S') - \sum_{i \in S'} p_i,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador b, S_b é uma demanda para b

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador b, S_b é uma demanda para b
- para todo item i não alocado, $p_i^* = 0$

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador b, S_b é uma demanda para b
- para todo item i não alocado, $p_i^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é socialmente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador b, S_b é uma demanda para b
- para todo item i não alocado, $p_i^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é socialmente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ é um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador b, S_b é uma demanda para b
- para todo item i não alocado, $p_i^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é socialmente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Corolário: Um equilíbrio Walrasiano existe se e somente se o LP tem solução inteira ótima

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

	$\{i_1\}$	$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
b_1	2	2	2
b_2	0	0	3

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

	$\{i_1\}$	$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
b_1	2	2	2
b_2	0	0	3

- Alocação que maximiza o bem-estar social: $A_{b_1} = 0$ e $A_{b_2} = \{i_1, i_2\}$ - valor 3

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

	$\{i_1\}$	$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
b_1	2	2	2
b_2	0	0	3

- Alocação que maximiza o bem-estar social: $A_{b_1} = 0$ e $A_{b_2} = \{i_1, i_2\}$ - valor 3
- Solução onde $x_{b_1,\{i_1\}} = x_{b_1,\{i_2\}} = x_{b_2,\{i_1,i_2\}} = 1/2$ (com os outros $x_{b,S} = 0$) é viável e tem valor $7/2$

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

	$\{i_1\}$	$\{i_2\}$	$\{i_1, i_2\}$
b_1	2	2	2
b_2	0	0	3

- Alocação que maximiza o bem-estar social:
  $A_{b_1} = 0$ e $A_{b_2} = \{i_1, i_2\}$ - valor 3
- Solução onde $x_{b_1,\{i_1\}} = x_{b_1,\{i_2\}} = x_{b_2,\{i_1,i_2\}} = 1/2$ (com os outros $x_{b,S} = 0$) é viável e tem valor $7/2$
- Assim, A não é uma solução ótima do LP e, portanto, não é um equilíbrio Walrasiano

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consulta de demanda: Dados preços para os itens, o comprador reporta uma demanda para esses preços

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consulta de demanda: Dados preços para os itens, o comprador reporta uma demanda para esses preços

Teorema: A relaxação linear de (WDP) pode ser resolvida em tempo polinomial usando apenas consultas de demanda

Complexidade do Problema

Teorema: O Problema da Determinação dos Vencedores pode ser resolvido em tempo polinomial se, para cada comprador b, existe um conjunto S_b e um valor w_b tal que $|S_b| \leq 2$ e, para todo conjunto S, $v_b(S) = w_b$ se $S_b \subseteq S$ e $v_b(S) = 0$, caso contrário.

Complexidade do Problema

Teorema: O Problema da Determinação dos Vencedores pode ser resolvido em tempo polinomial se, para cada comprador b, existe um conjunto S_b e um valor w_b tal que $|S_b| \leq 2$ e, para todo conjunto S, $v_b(S) = w_b$ se $S_b \subseteq S$ e $v_b(S) = 0$, caso contrário.

Teorema: O mecanismo VCG pode ser implementado em tempo polinomial para leilões combinatórios onde $n \leq \log m$ ou $m \leq \log n$.

Complexidade do Problema

Teorema: O Problema da Determinação dos Vencedores pode ser resolvido em tempo polinomial se, para cada comprador b, existe um conjunto S_b e um valor w_b tal que $|S_b| \leq 2$ e, para todo conjunto S, $v_b(S) = w_b$ se $S_b \subseteq S$ e $v_b(S) = 0$, caso contrário.

Teorema: O mecanismo VCG pode ser implementado em tempo polinomial para leilões combinatórios onde $n \leq \log m$ ou $m \leq \log n$.

De forma geral, a menos que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, não podemos ter um mecanismo VCG que possa ser computado em tempo polinomial em $|I \times B|$ para leilões combinatórios.