Tópicos da Computação em Teoria dos Jogos

Rafael C. S. Schouery Orlando Lee Flávio K. Miyazawa
Eduardo C. Xavier

Universidade Estadual de Campinas

De 27 a 31 de Julho de 2015

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa
- Escolhe em qual máquina aloca a tarefa

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa
- Escolhe em qual máquina aloca a tarefa
- Conjuntos de estratégias do jogador i é $S_i = [m]$, onde $[m] = \{1, \ldots, m\}$.

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

$$\ell_j = \sum_{\substack{i \in [n] \\ j = A(i)}} \frac{w_i}{s_j}$$

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

$$\ell_j = \sum_{\substack{i \in [n] \\ j = A(i)}} \frac{w_i}{s_j}$$

O custo de A para um jogador i é ℓ_j tal que $j = A(i)$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Jogo:

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Primeiro, considere estratégias puras

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Primeiro, considere estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Primeiro, considere estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

- máquinas *uniformes* ($s_1 = \cdots = s_m$)

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

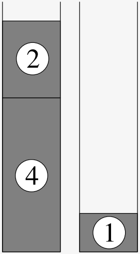
É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Primeiro, considere estratégias puras

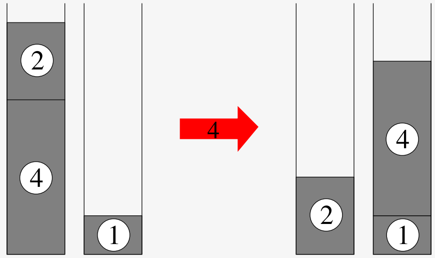
Consideramos ainda dois casos:

- máquinas *uniformes* ($s_1 = \cdots = s_m$)
- máquinas *relacionadas* (podem diferir na velocidade)

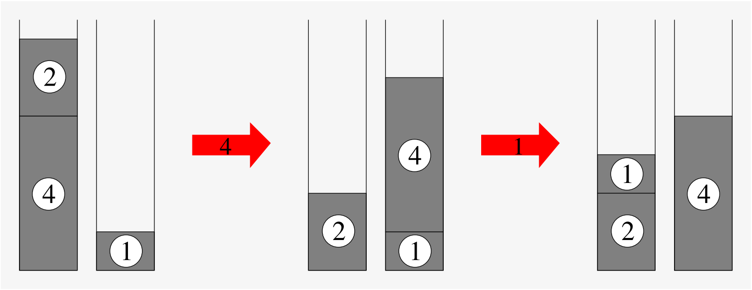
Jogo Sequencial



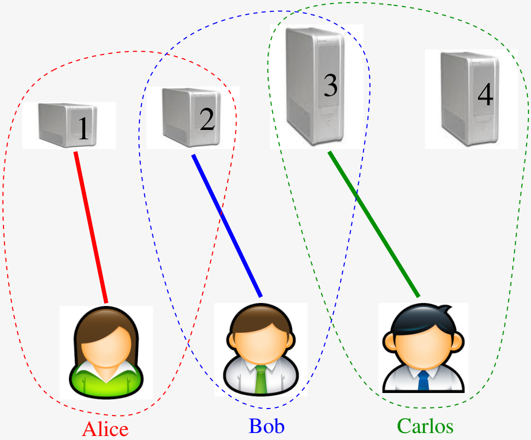
Jogo Sequencial



Jogo Sequencial

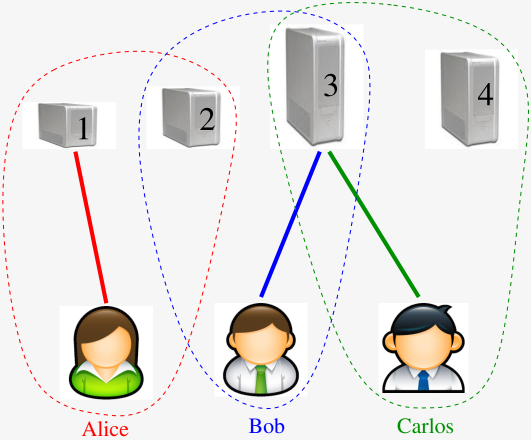


Aplicação: Transferência de Arquivos



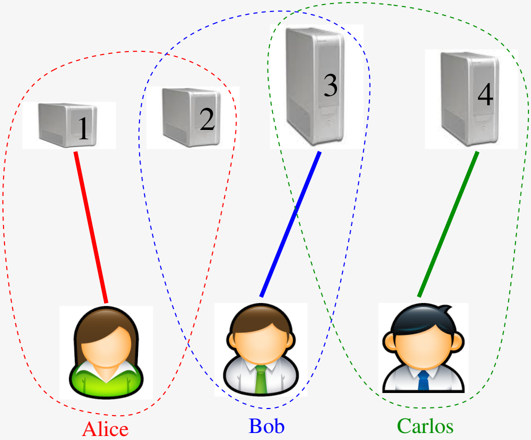
Bob está transferindo a partir do serv. 2 e percebe que migrar para 3 é melhor, mesmo compartilhando com Carlos

Aplicação: Transferência de Arquivos



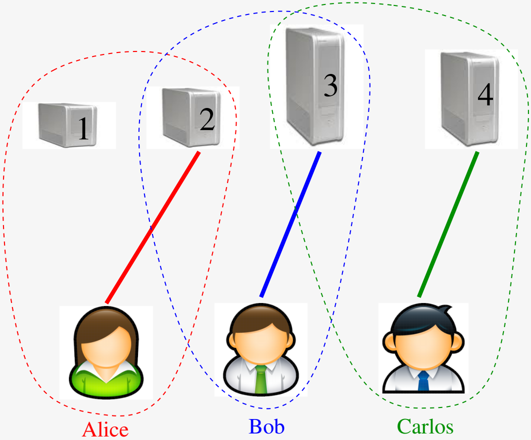
Após Bob migrar, o servidor 3 fica mais carregado e Carlos percebe que é melhor migrar para o 4

Aplicação: Transferência de Arquivos



Após Bob migrar, o servidor 2 fica livre e Alice percebe que é melhor migrar para o 2 (antes não era interessante)

Aplicação: Transferência de Arquivos



Configuração final em equilíbrio

O jogo tem equilíbrio?

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

O jogo tem equilíbrio?

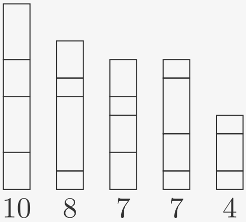
Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente

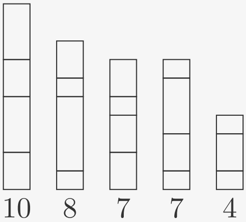


Vetores encontrados:

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



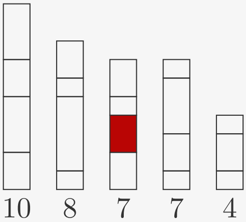
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



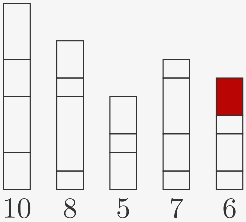
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



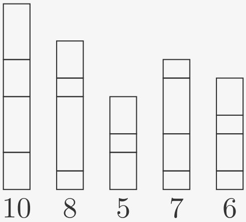
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



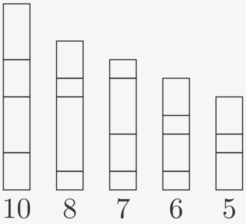
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



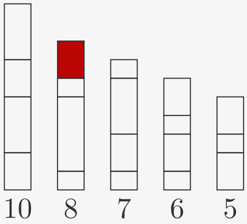
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



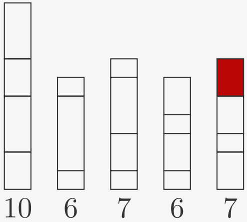
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



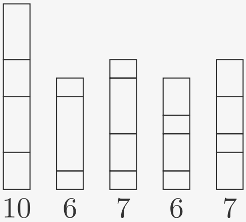
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



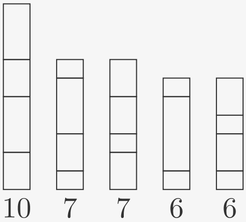
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



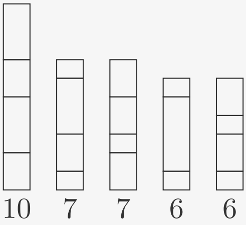
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



Vetores encontrados:

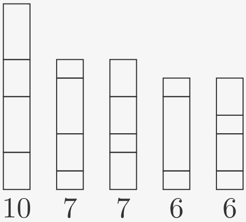
- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

Migração vai para vetor lexicograficamente menor

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

Migração vai para vetor lexicograficamente menor

Processo termina e num equilíbrio

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?

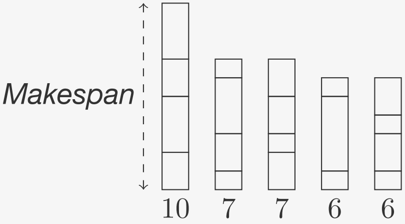
Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?
- Quanto tempo para chegar a um equilíbrio?

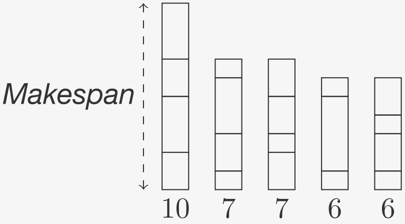
Custo Social: *Makespan*

Aqui o custo social de uma atribuição A é a carga da máquina mais carregada, ou seja, é o *makespan*



Custo Social: *Makespan*

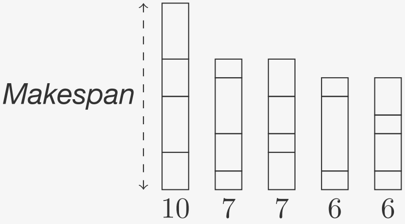
Aqui o custo social de uma atribuição A é a carga da máquina mais carregada, ou seja, é o *makespan*



Dados n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$, determinar o makespan mínimo é um problema NP-difícil

Custo Social: *Makespan*

Aqui o custo social de uma atribuição A é a carga da máquina mais carregada, ou seja, é o *makespan*



Dados n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$, determinar o makespan mínimo é um problema NP-difícil

Mesmo para duas máquinas uniformes

Duas medidas de qualidade

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- c(A) é o custo da atribuição A para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PA:

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\text{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\text{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PA:

- É o valor máximo da razão entre o pior custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\text{PA}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \max_{A \in \mathcal{E}(J)} \frac{\text{c}(A)}{\text{opt}(J)}$$

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PA:

- É o valor máximo da razão entre o pior custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\mathsf{PA}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \max_{A \in \mathcal{E}(J)} \frac{\mathsf{c}(A)}{\mathsf{opt}(J)}$$

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PA:

- É o valor máximo da razão entre o pior custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\mathsf{PA}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \max_{A \in \mathcal{E}(J)} \frac{\mathsf{c}(A)}{\mathsf{opt}(J)}$$

$$\mathsf{PA} = \max_{m \geq 1} \mathsf{PA}(m)$$

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- c(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- c(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da estabilidade PE:

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da estabilidade PE:

- É o valor máximo da razão entre o melhor custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\mathsf{PE}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \min_{A \in \mathcal{E}(J)} \frac{\mathsf{c}(A)}{\mathsf{opt}(J)}$$

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- $\mathcal{E}(J)$ é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- $\mathsf{c}(A)$ é o custo da atribuição A para J
- $\mathsf{opt}(J)$ é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da estabilidade PE:

- É o valor máximo da razão entre o melhor custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\mathsf{PE}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \min_{A \in \mathcal{E}(J)} \frac{\mathsf{c}(A)}{\mathsf{opt}(J)}$$

$$\mathsf{PE} = \max_{m \geq 1} \mathsf{PE}(m)$$

Duas medidas de qualidade

O valores de PA e de PE valem pelo menos 1

Duas medidas de qualidade

O valores de PA e de PE valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

Duas medidas de qualidade

O valores de PA e de PE valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

- Comece com a configuração de makespan mínimo e vá aplicando melhores respostas

Duas medidas de qualidade

O valores de PA e de PE valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

- Comece com a configuração de makespan mínimo e vá aplicando melhores respostas
- O makespan nunca aumenta e termina num equilíbrio

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$

Preço da anarquia

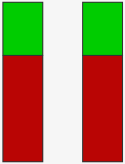
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

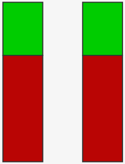
Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Preço da anarquia

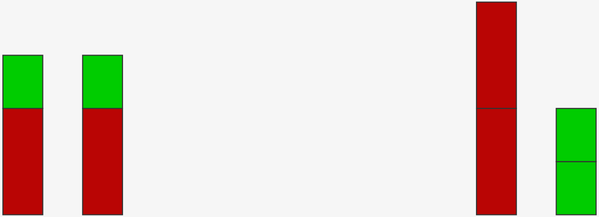
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia

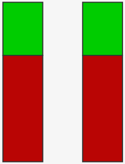
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



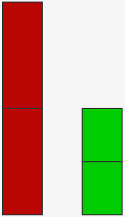
Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



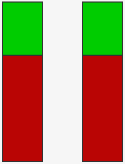
Makespan mínimo: 3



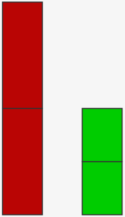
Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3



Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia pelo menos 4/3

Caso de máquinas uniformes

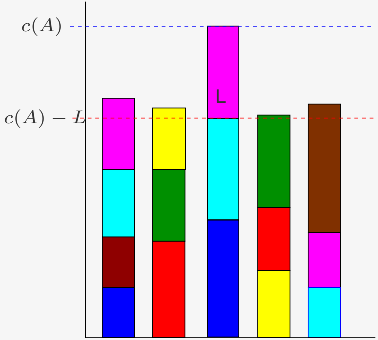
Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

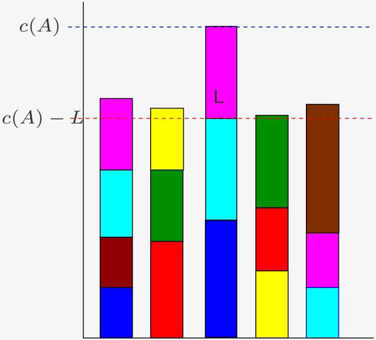
Ideia: Prova para PA$(m) \leq 2$



Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

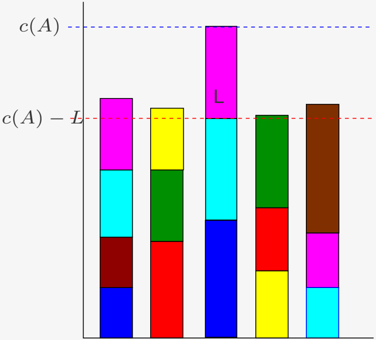
Ideia: Prova para PA$(m) \leq 2$



Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Ideia: Prova para PA$(m) \leq 2$

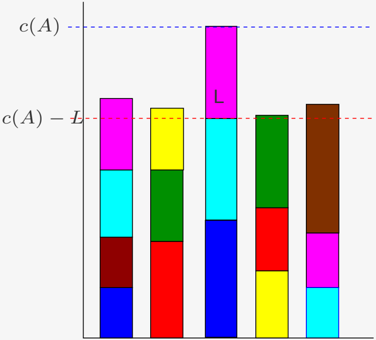


opt $\geq$ L

Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Ideia: Prova para PA$(m) \leq 2$

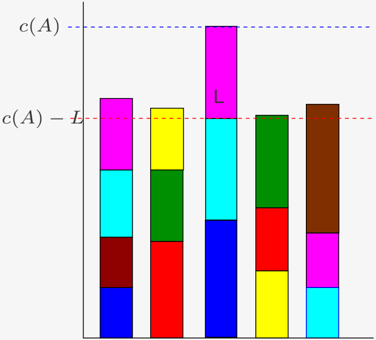


$$\begin{aligned} \text{opt} &\geq L \\ \text{opt} &\geq c(A) - L \end{aligned}$$

Caso de máquinas uniformes

Teorema: [Finn, Horowitz] Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas uniformes, PA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Ideia: Prova para PA$(m) \leq 2$



$$\begin{aligned} \text{opt} &\geq L \\ \text{opt} &\geq c(A) - L \\ \text{I.e.,} & \\ 2 \cdot \text{opt} &\geq L + (c(A) - L) = c(A) \end{aligned}$$

Caso de máquinas uniformes

Proposição: A análise é justa para todo m

Caso de máquinas uniformes

Proposição: A análise é justa para todo m

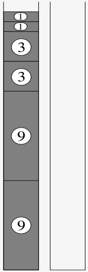
Para $m = 2$, exemplo com PA $= 4/3$

$$\frac{4}{3} = \left(2 - \frac{2}{2+1}\right)$$

Tempo de convergência

Tempo de convergência

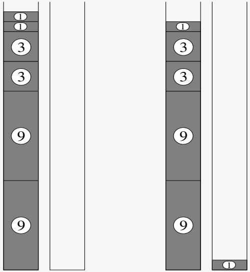
Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $\left(n/(m-1)^2\right)^m$



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $\left(n/(m-1)^2\right)^m$

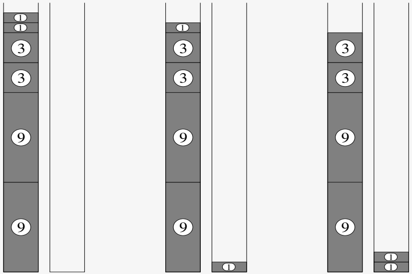
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $\left(n/(m-1)^2\right)^m$

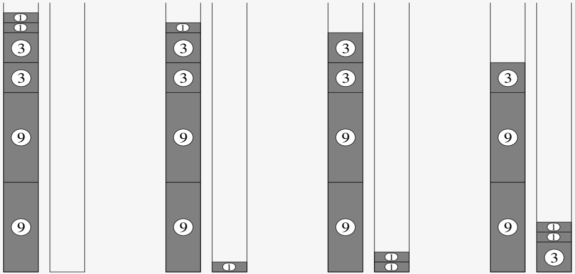
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $\left(n/(m-1)^2\right)^m$

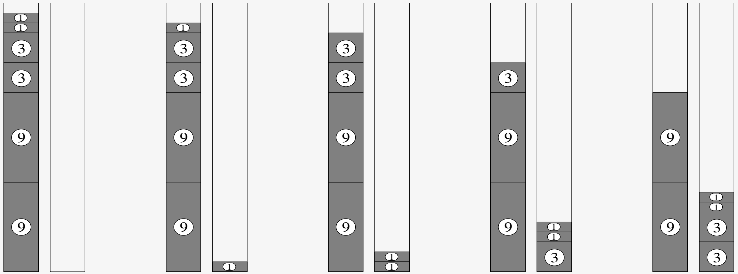
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

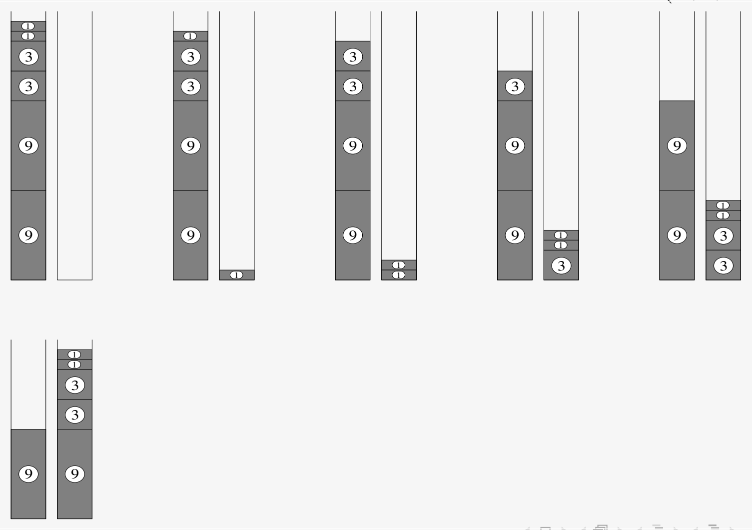
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

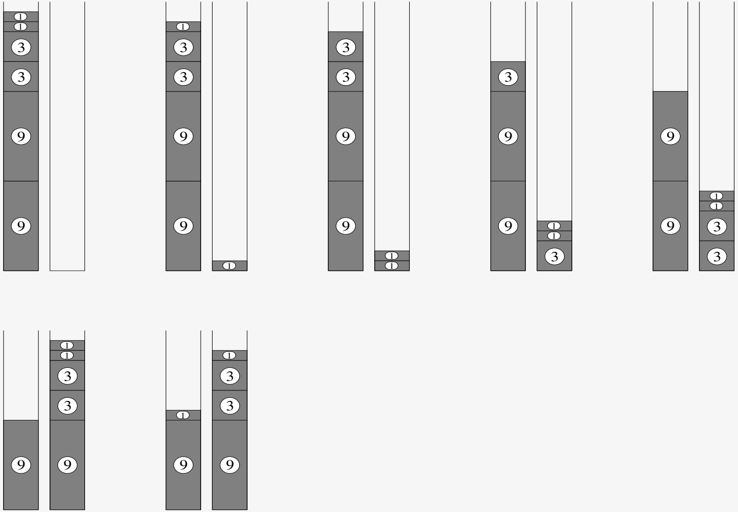
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

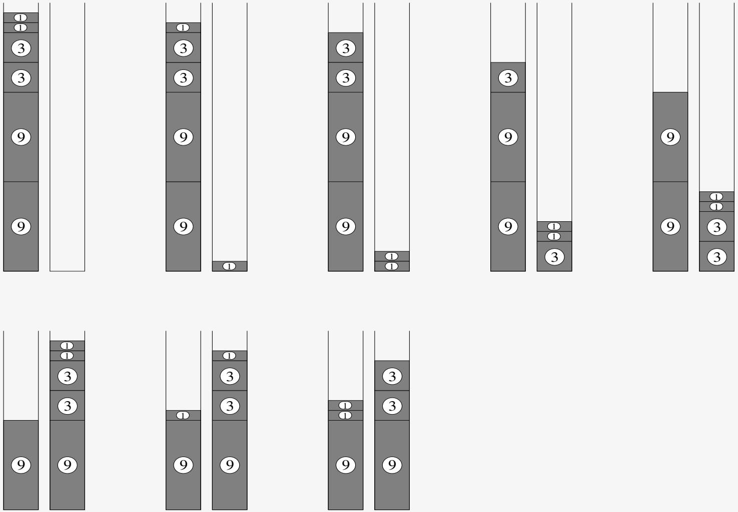
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

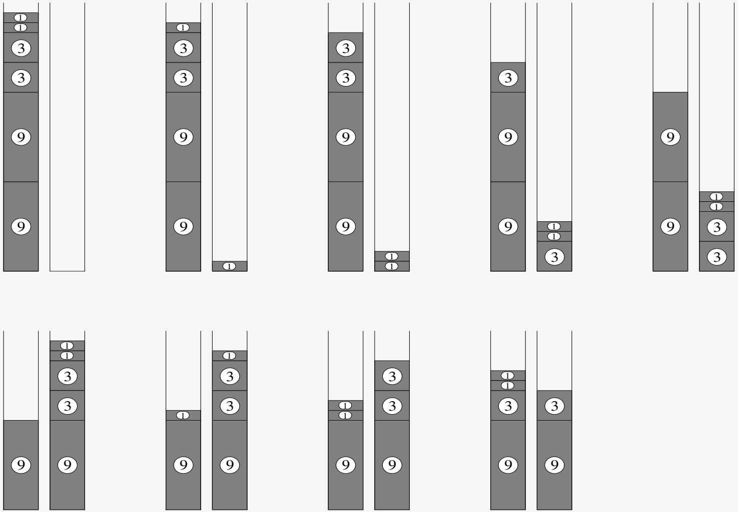
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

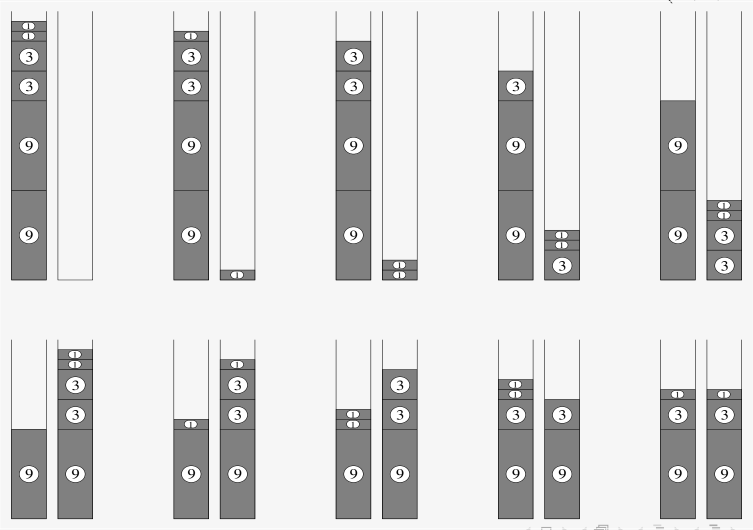
Ideia:



Tempo de convergência

Teorema: [Even-dar et al.] Existe instância com máquinas uniformes onde a política de resposta ótima requer $(n/(m-1)^2)^m$

Ideia:



Tempo de convergência

Para máquinas uniformes, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Tempo de convergência

Para máquinas uniformes, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

Tempo de convergência

Para máquinas uniformes, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

- Ative apenas uma tarefa insatisfeita de peso máximo por vez

Tempo de convergência

Para máquinas uniformes, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

- Ative apenas uma tarefa insatisfeita de peso máximo por vez
- Uma tarefa ativada muda para a melhor máquina

Tempo de convergência

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Ideia:

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Ideia:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Ideia:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Ideia:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita
- Cada tarefa migra no máximo uma vez

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Ideia:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita
- Cada tarefa migra no máximo uma vez
- O equilíbrio é atingido em no máximo n passos $\square$

Caso de máquinas relacionadas

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\mathrm{PA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Tempo de convergência ?

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Tempo de convergência ?

No caso de máquinas relacionadas, não se conhece política de migração que convirja para um equilíbrio em número polinomial de passos

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Tempo de convergência ?

No caso de máquinas relacionadas, não se conhece política de migração que convirja para um equilíbrio em número polinomial de passos

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*Largest Processing Time*):

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*Largest Processing Time*):

- Atribua tarefas em ordem decrescente de peso

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*Largest Processing Time*):

- Atribua tarefas em ordem decrescente de peso
- pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Ideia:

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Ideia:

- Por indução no número de tarefas atribuídas

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Ideia:

- Por indução no número de tarefas atribuídas
- A atribuição de uma tarefa pode deixar insatisfeitos apenas itens da máquina onde foi atribuída

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Ideia:

- Por indução no número de tarefas atribuídas
- A atribuição de uma tarefa pode deixar insatisfeitos apenas itens da máquina onde foi atribuída
- Itens anteriores são maiores ou iguais a última tarefa

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Ideia:

- Por indução no número de tarefas atribuídas
- A atribuição de uma tarefa pode deixar insatisfeitos apenas itens da máquina onde foi atribuída
- Itens anteriores são maiores ou iguais a última tarefa
- Não pode haver outra máquina onde itens maiores ficariam satisfeitos

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Seja x_i^j a variável aleatória binária que indica se a tarefa i é alocada na máquina j

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Seja x_i^j a variável aleatória binária que indica se a tarefa i é alocada na máquina j

$p_i^j = \mathbb{P}[x_i^j = 1]$ ou equivalentemente $p_i^j = \mathbb{P}[A(i) = j]$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right]$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right]$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j}$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in [n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i \in [n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i \in [n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

Chamamos $P = (p_i^j)_{i\in[n], j\in[m]}$ de um perfil de estratégias

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

Chamamos $P = (p_i^j)_{i\in[n],j\in[m]}$ de um perfil de estratégias

O custo de P é o makespan esperado, isto é,

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in [n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i \in [n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i \in [n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

Chamamos $P = (p_i^j)_{i \in [n], j \in [m]}$ de um perfil de estratégias

O custo de P é o makespan esperado, isto é,

$$\mathsf{c}(P) = \mathbb{E}[\mathsf{c}(A)] = \mathbb{E}\left[\max_{j \in [m]}(\ell_j)\right]$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j}$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j} = \mathbb{E}(\ell_j) + (1 - p_i^j)\frac{w_i}{s_j}$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

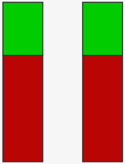
Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j} = \mathbb{E}(\ell_j) + (1 - p_i^j)\frac{w_i}{s_j}$$

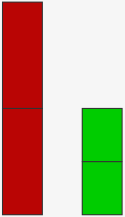
Proposição: Um perfil de estratégias P é um equilíbrio de Nash se e somente se para todo jogador i e para toda máquina j, se $p_i^j > 0$ então, para toda máquina k vale que $c_i^j \leq c_i^k$

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3



Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia pelo menos 4/3

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j]$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 3.5$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 3.5$$

Note que P é um equilíbrio misto

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\mathsf{c}(P)$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\mathsf{c}(P) = \mathbb{E}[\mathsf{c}(A)]$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(P) &= \mathbb{E}[\mathsf{c}(A)] \\ &= \frac{1}{16}(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2) \end{aligned}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(P) &= \mathbb{E}[\mathsf{c}(A)] \\ &= \frac{1}{16}\left(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2\right) = 4.25 \end{aligned}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(P) &= \mathbb{E}[\mathsf{c}(A)] \\ &= \frac{1}{16}(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2) = 4.25 \end{aligned}$$

Que é pior do que o equilíbrio puro que tinhamos visto (com custo 4)

Resultados para equilíbrio misto

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: [Koutsoupias, Papadimitriou'99] Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas uniformes e $n = m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\mathsf{c}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \mathsf{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: [Koutsoupias, Papadimitriou'99] Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas uniformes e $n = m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\mathrm{c}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \mathrm{opt}(J)$$

Teorema: [Czumaj, Vocking'02] Seja J uma instância do jogo de balanceamento de carga com n tarefas e m máquinas uniformes. Seja P qualquer perfil de estratégias que forme um equilíbrio de Nash. Vale que

$$\mathrm{c}(P) = O\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \mathrm{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: [Czumaj, Vocking'02] Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas relacionadas e $n \leq m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\mathrm{c}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg \lg m}\right) \mathrm{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: [Czumaj, Vocking'02] Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas relacionadas e $n \leq m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\mathsf{c}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg\lg\lg m}\right)\mathsf{opt}(J)$$

Teorema: [Czumaj, Vocking'02] Seja J uma instância do jogo de balanceamento de carga com n tarefas e m máquinas relacionadas. Seja P qualquer perfil de estratégias que forme um equilíbrio de Nash. Vale que

$$\mathsf{c}(P) = O\left(\frac{\lg m}{\lg\lg\lg m}\right)\mathsf{opt}(J)$$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir
- Cada jogador conhece as políticas de atribuição de cada máquina

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir
- Cada jogador conhece as políticas de atribuição de cada máquina
- Políticas de uma máquina considera apenas tarefas atribuídas a ela e dada pelos seus tempos de término

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir
- Cada jogador conhece as políticas de atribuição de cada máquina
- Políticas de uma máquina considera apenas tarefas atribuídas a ela e dada pelos seus tempos de término
- Há uma ordem das tarefas para possíveis desempates

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir
- Cada jogador conhece as políticas de atribuição de cada máquina
- Políticas de uma máquina considera apenas tarefas atribuídas a ela e dada pelos seus tempos de término
- Há uma ordem das tarefas para possíveis desempates
- Custo $c^j : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

$$c^j(i) = \begin{cases} 0 \text{ caso } i \text{ não seja atribuída a } j \\ \text{tempo de término de } i \text{ em } j\text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Mecanismos de Coordenação

[Christodoulou, Koutsoupias, Nanavati'04] Mecanismos que levem os jogadores a obter equilíbrios com bons valores de PA.

- Custo para jogadores em uma mesma máquina pode diferir
- Cada jogador conhece as políticas de atribuição de cada máquina
- Políticas de uma máquina considera apenas tarefas atribuídas a ela e dada pelos seus tempos de término
- Há uma ordem das tarefas para possíveis desempates
- Custo $c^j : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

$$c^j(i) = \begin{cases} 0 \text{ caso } i \text{ não seja atribuída a } j \\ \text{tempo de término de } i \text{ em } j\text{, caso contrário.} \end{cases}$$

- Mecanismo de Coordenação: $\mathcal{C} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

- Tarefa 1 escolhe máquina 1

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2
- Tarefa 2 escolhe máquina 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1: Duas máquinas uniformes e três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$ (ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada).

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2
- Tarefa 2 escolhe máquina 2
- Configuração ótima

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos

Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos

Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1
- Tarefas 2 e 4 na máquina 2.

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1
- Tarefas 2 e 4 na máquina 2.

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2: Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Máquina 1 executa tarefas em ordem decrescente dos pesos
Máquina 2 executa tarefas em ordem crescente dos pesos
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1
- Tarefas 2 e 4 na máquina 2.

$$\text{PA} = \frac{4 - \varepsilon}{3}$$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Teorema: [Graham'66] O Mecanismo LPT*, para máquinas uniformes, possui preço da anarquia limitado a $4/3 - \varepsilon$. Além disso, este fator é justo.

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Teorema: [Graham'66] O Mecanismo LPT*, para máquinas uniformes, possui preço da anarquia limitado a $4/3 - \varepsilon$. Além disso, este fator é justo.

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT* com PA $< 4/3$ para m máquinas uniformes e n tarefas

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t = j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Teorema: [Graham'66] O Mecanismo LPT*, para máquinas uniformes, possui preço da anarquia limitado a $4/3 - \varepsilon$. Além disso, este fator é justo.

Teorema: [Kovacs'10] O Mecanismo LPT*, para máquinas relacionadas, possui preço da anarquia entre $1{,}54$ e $1 + \sqrt{3}/3 \approx 1{,}5773$.

Mecanismos de Coordenação

Mecanismos de Coordenação

Fato: O Mecanismo LPT* não é a prova de estratégia.

Mecanismos de Coordenação

Fato: O Mecanismo LPT* não é a prova de estratégia.

Mecanismos de Coordenação

Fato: O Mecanismo LPT^* não é a prova de estratégia.

Mecanismo SPT^*: Análogo ao mecanismo LPT^*, exceto que cada máquina escalona em ordem crescente de peso.

Mecanismos de Coordenação

Fato: O Mecanismo LPT* não é a prova de estratégia.

Mecanismo SPT*: Análogo ao mecanismo LPT*, exceto que cada máquina escalona em ordem crescente de peso.

Mecanismos de Coordenação

Fato: O Mecanismo LPT* não é a prova de estratégia.

Mecanismo SPT*: Análogo ao mecanismo LPT*, exceto que cada máquina escalona em ordem crescente de peso.

Teorema: O Mecanismo SPT* é a prova de estratégia e possui PA $\leq 2 - \frac{1}{m}$.