Combinatória Poliédrica
Dimensão

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:15

Dimensão

A dimensão de um conjunto F

- é d se F contém $d+1$ vetores afim-independentes
- é denotada por $\dim(F)$

Ponto interior

Um elemento $\boldsymbol{x}$ de um poliedro P é um ponto interio de P se $\boldsymbol{x}$ não está contido em nenhuma face própria de P

Teorema. Todo poliedro não-vazio tem um ponto interior.

Exercício

Exercício. Seja F uma face do poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ e $x' \in F$. Então, x' é um ponto interior de F se, e somente se, $\mathrm{ig}(\{x'\}) = \mathrm{ig}(F)$.

Teorema

Teorema. Se $F \neq \emptyset$ é uma face de um poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$, então

$$\dim(F) = n - \mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ig}(F)*}),$$

onde $\mathrm{posto}(\boldsymbol{A})$ é o número máximo de colunas linearmente independentes de $\boldsymbol{A}$.

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro não-vazio. Então,

(a) $\dim(P) = n - \mathrm{posto}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ig}(P)*})$;

(b) se $\mathrm{ig}(P) = \emptyset$, então P tem dimensão plena (i.e. $\dim(P) = n$);

(c) se F é uma face própria de P, então $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$.

Prova. Exercício.

Nomes para faces de um poliedro

Faces de dimensão 0 são chamadas de vértices

Faces próprias maximais são chamadas de facetas

Exercício

Exercício. Sejam X e Y subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ tais que $X \subseteq Y$. Mostre que, se X é um conjunto afim, então $\dim(X) \leq \dim(Y)$.