Combinatória Poliédrica
Método de Planos-de-Corte

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-27 15:57

P'

Queremos achar o fecho inteiro P_I de um poliedro P

P'

Queremos achar o fecho inteiro P_I de um poliedro P

Se $H = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma\}$ é racional e $\boldsymbol{c}$ tem componentes inteiros primos entre si, então

$$H_I = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor\gamma\rfloor\}$$

P'

Queremos achar o fecho inteiro P_I de um poliedro P

Se $H = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma\}$ é racional e $\boldsymbol{c}$ tem componentes inteiros primos entre si, então

$$H_I = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor\gamma\rfloor\}$$

Defina então, para qualquer poliedro P

$$P' = \bigcap_{H \supseteq P} H_I$$

P'

Queremos achar o fecho inteiro P_I de um poliedro P

Se $H = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma\}$ é racional e $\boldsymbol{c}$ tem componentes inteiros primos entre si, então

$$H_I = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \lfloor\gamma\rfloor\}$$

Defina então, para qualquer poliedro P

$$P' = \bigcap_{H \supseteq P} H_I$$

Note que $P_I \subseteq P'$, já que $P \subseteq H$ implica que $P_I \subseteq H_I$

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P' ...

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações
- chamadas de planos-de-corte

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações
- chamadas de planos-de-corte

O método dos planos-de-corte

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações
- chamadas de planos-de-corte

O método dos planos-de-corte

- resolve programas lineares

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações
- chamadas de planos-de-corte

O método dos planos-de-corte

- resolve programas lineares
- adicionando novos cortes

Repetindo o processo

Poderíamos repetir o processo para P'...

Se $P^{(0)} = P$ e $P^{(t+1)} = (P^{(t)})'$, temos que

$$P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

A ideia do método é obter aproximações de P_I cada vez melhores

- através da introdução de inequações
- chamadas de planos-de-corte

O método dos planos-de-corte

- resolve programas lineares
- adicionando novos cortes
- até encontrar uma solução inteira

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ com $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ TDI e $\boldsymbol{A}$ inteiro. Então,

$$P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}.$$

Em particular, para qualquer poliedro racional P, tem-se que P' é um poliedro.

Teorema

Teorema. Para cada poliedro racional P, existe um natural t tal que $P^{(t)} = P_I$.

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\, \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\, \ldots,\, \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

(a) cada $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ é inteiro

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

(a) cada $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ é inteiro

(b) $\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}$, $\delta_m = \delta$

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

(a) cada $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ é inteiro

(b) $\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}$, $\delta_m = \delta$

(c) para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, existe δ'_i tal que $\lfloor \delta'_i \rfloor \leq \delta_i$ e a inequação $\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} \leq \delta'_i$ é uma combinação cônica das inequações $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1, \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2, \ldots, \boldsymbol{c}_{i-1}^T\boldsymbol{x} \leq \delta_{i-1}$

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

(a) cada $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ é inteiro

(b) $\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}$, $\delta_m = \delta$

(c) para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, existe δ'_i tal que $\lfloor \delta'_i \rfloor \leq \delta_i$ e a inequação $\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} \leq \delta'_i$ é uma combinação cônica das inequações $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1, \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2, \ldots, \boldsymbol{c}_{i-1}^T\boldsymbol{x} \leq \delta_{i-1}$

Dizemos que uma tal prova tem comprimento m

Provas de Planos-de-Corte

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ uma inequação

Dizemos que uma sequência de inequações lineares

$$\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1,\ \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_m^T\boldsymbol{x} \leq \delta_m$$

é uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ se

(a) cada $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ é inteiro

(b) $\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{c}$, $\delta_m = \delta$

(c) para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, existe δ'_i tal que $\lfloor \delta'_i \rfloor \leq \delta_i$ e a inequação $\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} \leq \delta'_i$ é uma combinação cônica das inequações $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} \leq \delta_1, \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x} \leq \delta_2, \ldots, \boldsymbol{c}_{i-1}^T\boldsymbol{x} \leq \delta_{i-1}$

Dizemos que uma tal prova tem comprimento m

Se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ tem uma prova de planos-de-corte a partir de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ então essa inequação é válida para $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro não-vazio, racional e limitado:

(a) se $P_I \neq \emptyset$ e a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ ($\boldsymbol{c}$ inteiro) é válida para P_I, então existe uma prova de planos-de-cortes de $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ a partir de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.

(b) Se $P_I = \emptyset$, então existe uma prova de planos-de-corte de $\boldsymbol{0}^T\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{1}$ a partir de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$
- Encontre um sisteam TDI minimal $\boldsymbol{A'x} \leq \boldsymbol{b'}$ com $\boldsymbol{A'}$ inteiro que define P'

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$
- Encontre um sisteam TDI minimal $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ com $\boldsymbol{A}'$ inteiro que define P'
- Seja $P'' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b}' \rfloor\}$

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$
- Encontre um sisteam TDI minimal $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ com $\boldsymbol{A}'$ inteiro que define P'
- Seja $P'' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b}' \rfloor\}$
- ...

Achando P_I

Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$
- Encontre um sisteam TDI minimal $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ com $\boldsymbol{A}'$ inteiro que define P'
- Seja $P'' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b}' \rfloor\}$
- ...
- Repita o processo acima até obter um poliedro, digamos $P^{(t)}$, para o qual o sistema TDI minimal é inteiro e tem lado direito também inteiro. Neste caso, $P^{(t)} = P_I$

Achando P_I

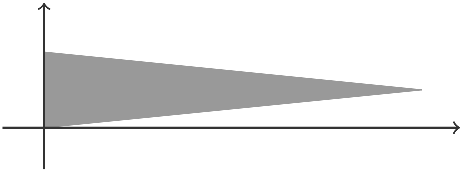
Para achar o fecho inteiro de P (supondo dimensão plena)

- Encontre um sistema TDI minimal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro que define P
- Seja $P' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b} \rfloor\}$
- Encontre um sisteam TDI minimal $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}'$ com $\boldsymbol{A}'$ inteiro que define P'
- Seja $P'' = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} \leq \lfloor \boldsymbol{b}' \rfloor\}$
- ...
- Repita o processo acima até obter um poliedro, digamos $P^{(t)}$, para o qual o sistema TDI minimal é inteiro e tem lado direito também inteiro. Neste caso, $P^{(t)} = P_I$

O menor t tal que $P^{(t)} = P_I$ dá uma idea da dificuldade em achar P_I

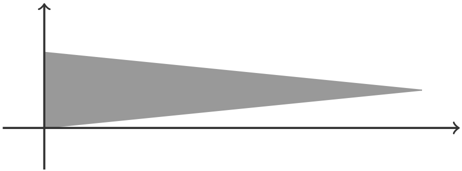
Quão grande pode ser t?

$$P = \text{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$



Quão grande pode ser t?

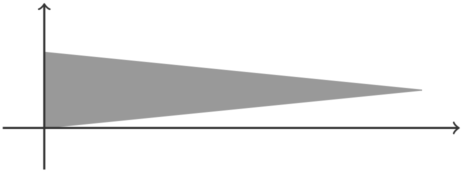
$$P = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$



Temos que:

Quão grande pode ser t?

$$P = \text{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$

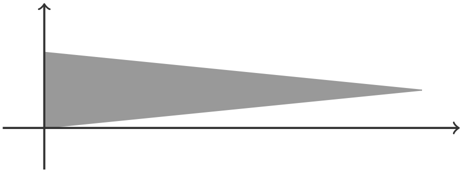


Temos que:

- $P_I = \text{conv}\{(0,0),(0,1)\}$

Quão grande pode ser t?

$$P = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$

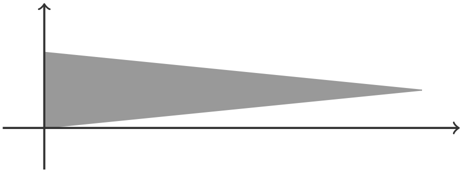


Temos que:

- $P_I = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,1)\}$
- $(k-t, 1/2) \in P^{(t)}$ para todo $t < k$

Quão grande pode ser t?

$$P = \text{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$

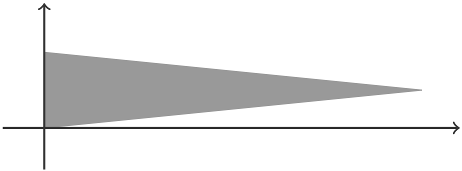


Temos que:

- $P_I = \text{conv}\{(0,0),(0,1)\}$
- $(k-t, 1/2) \in P^{(t)}$ para todo $t < k$
- Ou seja, $P^{(t)} \neq P_I$ para todo $t < k$

Quão grande pode ser t?

$$P = \text{conv}\{(0,0),(0,1),(k,1/2)\}$$



Temos que:

- $P_I = \text{conv}\{(0,0),(0,1)\}$
- $(k-t, 1/2) \in P^{(t)}$ para todo $t < k$
- Ou seja, $P^{(t)} \neq P_I$ para todo $t < k$

Ou seja, t não é polinomialmente limitado pelo tamanho do sistema que define P

Alguns resultados

Teorema. Se P é um poliedro racional de dimensão d, tal que $P_I = \emptyset$, então existe um natural $t(d)$ tal que $P^{(t(d))} = \emptyset$.

Alguns resultados

Teorema. Se P é um poliedro racional de dimensão d, tal que $P_I = \emptyset$, então existe um natural $t(d)$ tal que $P^{(t(d))} = \emptyset$.

Teorema. Para cada matriz racional $\boldsymbol{A}$, existe um número t tal que, para cada vetor $\boldsymbol{b}$, tem-se que

$$\{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}^{(t)} = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}_I.$$

Posto de Chvátal

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz racional

Posto de Chvátal

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz racional

Chamamos de posto de Chvátal o menor número t tal que

$$\{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}^{(t)} = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}_I.$$

para todo vetor inteiro b

Posto de Chvátal

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz racional

Chamamos de posto de Chvátal o menor número t tal que

$$\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}^{(t)} = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}_I.$$

para todo vetor inteiro b

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz inteira, então o posto de Chvátal de $\boldsymbol{A}$ é 0 se e somente se $\boldsymbol{A}^T$ é unimodular

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado
   - Caso contrário, seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima de (PL)

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado
   - Caso contrário, seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima de (PL)
2. Se $\boldsymbol{x}^*$ é inteira, pare e devolva $\boldsymbol{x}^*$

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado
   - Caso contrário, seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima de (PL)
2. Se $\boldsymbol{x}^*$ é inteira, pare e devolva $\boldsymbol{x}^*$
3. Encontre uma inequação (plano-de-corte) $\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado
   - Caso contrário, seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima de (PL)
2. Se $\boldsymbol{x}^*$ é inteira, pare e devolva $\boldsymbol{x}^*$
3. Encontre uma inequação (plano-de-corte) $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

   $$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

4. Junte a inequação ao sistema de equações e volte ao passo 1

Método de Planos-de-Corte

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \max\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{x} &\in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Método:

1. Resolva a relaxação linear (PL) de (P)
   - Se (PL) não tem solução ótima, então (P) é inviável ou ilimitado
   - Caso contrário, seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima de (PL)
2. Se $\boldsymbol{x}^*$ é inteira, pare e devolva $\boldsymbol{x}^*$
3. Encontre uma inequação (plano-de-corte) $\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

   $$\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

4. Junte a inequação ao sistema de equações e volte ao passo 1
   - Você precisará de uma nova variável de folga

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)
- $c^* = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)
- $c^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
- $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)
- $c^* = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$
- $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{A}_N$
- $\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{b}$

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)
- $c^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
- $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$
- $\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$
- $\overline{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\overline{\boldsymbol{A}}$

Notação

- $\boldsymbol{x}^*$ a solução ótima da relaxação linear (PL) de (P)
- $\boldsymbol{A}_B$ é a base da matriz associada a x^*
- B são as variáveis correspondentes as colunas da base
- N são as outras variáveis (não básicas)
- $c^* = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$
- $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$
- $\overline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$
- $\overline{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\overline{\boldsymbol{A}}$
- $\tilde{\boldsymbol{c}} = -\overline{\boldsymbol{c}}$

Teorema (Cortes de Gomory)

Teorema. Considere o problema $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I\}$, onde $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$ são inteiros. Seja $\boldsymbol{x}^*$ uma solução ótima do programa linear relaxado e $\boldsymbol{A}_B$ a base associada à solução $\boldsymbol{x}^*$. Seja $h \neq 0$ um inteiro. Considerando a notação definida, temos que as inequações

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h\bar{a}_{ij} \rfloor - h\bar{a}_{ij}) x_j \leq \lfloor h\bar{b}_i \rfloor - h\bar{b}_i, \qquad \forall i \in B$$

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h\tilde{c}_j \rfloor - h\tilde{c}_j) x_j \leq \lfloor hc^* \rfloor - hc^*,$$

são planos-de-corte para a solução $\boldsymbol{x}^*$, caso $h\bar{b}_i$ ou hc^* não sejam inteiros.

Sempre encontramos um corte?

Se o valor c^* da solução ótima é fracionário, podemos cortar com

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h\tilde{c}_j \rfloor - h\tilde{c}_j) x_j \leq \lfloor hc^* \rfloor - hc^*$$

Sempre encontramos um corte?

Se o valor c^* da solução ótima é fracionário, podemos cortar com

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h\tilde{c}_j \rfloor - h\tilde{c}_j) x_j \leq \lfloor hc^* \rfloor - hc^*$$

Se x_i^* é fracionário, podemos cortar com

$$\sum_{j \in N} (\lfloor h\overline{a}_{ij} \rfloor - h\overline{a}_{ij}) x_j \leq \lfloor h\bar{b}_i \rfloor - h\bar{b}_i$$

Nem tudo são flores...

Para fazer um algoritmo que resolve PLI usando os cortes de Gomory precisaríamos de precisão infinita

Nem tudo são flores...

Para fazer um algoritmo que resolve PLI usando os cortes de Gomory precisaríamos de precisão infinita

Na prática, as inequações também trazem instabilidade numérica

Nem tudo são flores...

Para fazer um algoritmo que resolve PLI usando os cortes de Gomory precisaríamos de precisão infinita

Na prática, as inequações também trazem instabilidade numérica

Podemos usar alguns cortes, mas não vale a pena seguir gerando todos os cortes de Gomory

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...
- Isso porque facetas levam a representações irredundantes

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...
- Isso porque facetas levam a representações irredundantes

Muitas vezes estudamos como gerar cortes que definem faceta

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...
- Isso porque facetas levam a representações irredundantes

Muitas vezes estudamos como gerar cortes que definem faceta

- Chamamos de cortes faciais

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...
- Isso porque facetas levam a representações irredundantes

Muitas vezes estudamos como gerar cortes que definem faceta

- Chamamos de cortes faciais
- Precisamos entender o P_I para isso...

Cortes Faciais

Podemos cortar com qualquer inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x}^* > d_0 \text{ e } \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0 \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in P^=(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I$$

Gomory apenas nos deu uma forma de achar tais inequações...

Note que $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq d_0$ define uma face de P_I

- Mas seria bom se fosse uma faceta...
- Isso porque facetas levam a representações irredundantes

Muitas vezes estudamos como gerar cortes que definem faceta

- Chamamos de cortes faciais
- Precisamos entender o P_I para isso...
- Assim, olhamos para problemas de otimização específicos