Combinatória Poliédrica
Otimização e Separação

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-27 15:57

Otimização

Problema de Otimização (OPT)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, encontre $\boldsymbol{x} \in P$ que maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ ou certifique que P é vazio.

Otimização

Problema de Otimização (OPT)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, encontre $\boldsymbol{x} \in P$ que maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ ou certifique que P é vazio.

O algoritmo claramente depende da representação de P

Otimização

Problema de Otimização (OPT)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, encontre $\boldsymbol{x} \in P$ que maximize $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ ou certifique que P é vazio.

O algoritmo claramente depende da representação de P

- Representação interna vs. externa

Violação

Problema da Violação (VIOL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$; se não, encontre um vetor $\boldsymbol{y} \in P$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \gamma$.

Violação

Problema da Violação (VIOL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$; se não, encontre um vetor $\boldsymbol{y} \in P$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \gamma$.

Problema da Validade (VAL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

Violação

Problema da Violação (VIOL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$; se não, encontre um vetor $\boldsymbol{y} \in P$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \gamma$.

Problema da Validade (VAL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

Se sabemos resolver **(VIOL)** em tempo polinomial, sabemos resolver **(VAL)** em tempo polinomial

Violação

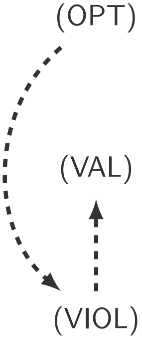
Problema da Violação (VIOL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$; se não, encontre um vetor $\boldsymbol{y} \in P$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \gamma$.

Problema da Validade (VAL)
Dado um poliedro P, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e $\gamma \in \mathbb{R}$, decida se $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ vale para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

Se sabemos resolver **(VIOL)** em tempo polinomial, sabemos resolver **(VAL)** em tempo polinomial

E se sabemos resolver **(OPT)** em tempo polinomial, sabemos resolver **(VIOL)** em tempo polinomial

Reduções



Separação

Problema da Separação (SEP)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, decida se $\boldsymbol{y} \in P$; se $\boldsymbol{y} \notin P$ encontre um hiperplano que separa $\boldsymbol{y}$ de P; mais precisamente, encontre $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

Separação

Problema da Separação (SEP)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, decida se $\boldsymbol{y} \in P$; se $\boldsymbol{y} \notin P$ encontre um hiperplano que separa $\boldsymbol{y}$ de P; mais precisamente, encontre $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

Problema da Pertinência (PERT)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, decida se $\boldsymbol{y} \in P$.

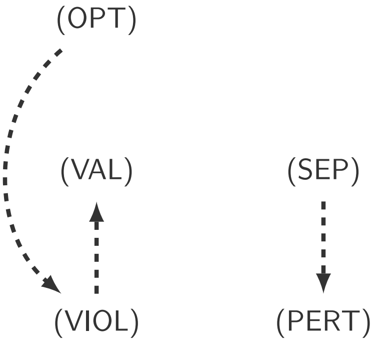
Separação

Problema da Separação (SEP)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, decida se $\boldsymbol{y} \in P$; se $\boldsymbol{y} \notin P$ encontre um hiperplano que separa $\boldsymbol{y}$ de P; mais precisamente, encontre $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} > \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in P$.

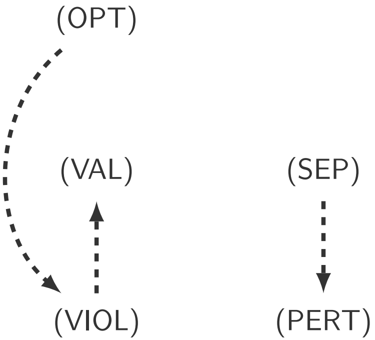
Problema da Pertinência (PERT)
Dado um poliedro P e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, decida se $\boldsymbol{y} \in P$.

Se sabemos resolver **(SEP)** em tempo polinomial, sabemos resolver **(PERT)** em tempo polinomial.

Reduções

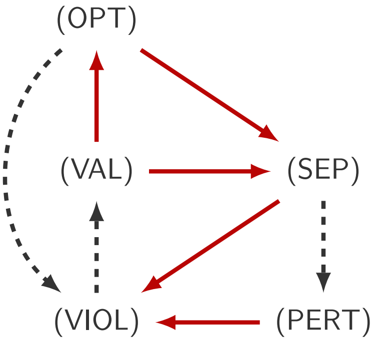


Reduções



Grötschel, Lovász, Schrijver mostraram outras reduções

Reduções



Grötschel, Lovász, Schrijver mostraram outras reduções

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

Por outro lado, eu posso ter um problema de otimização que a formulação é exponencial no tamanho da entrada

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

Por outro lado, eu posso ter um problema de otimização que a formulação é exponencial no tamanho da entrada

- E resolvê-lo em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

Por outro lado, eu posso ter um problema de otimização que a formulação é exponencial no tamanho da entrada

- E resolvê-lo em tempo polinomial
- Desde que eu consiga encontrar uma restrição violada em tempo polinomial

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

Por outro lado, eu posso ter um problema de otimização que a formulação é exponencial no tamanho da entrada

- E resolvê-lo em tempo polinomial
- Desde que eu consiga encontrar uma restrição violada em tempo polinomial

Estes resultados envolvem o Método Elipsóide

(OPT) e (SEP)

Se eu consigo otimizar em tempo polinomial

- Eu consigo separar em tempo polinomial

Se eu consigo separar em tempo polinomial

- Eu consigo otimizar em tempo polinomial

Ou seja, se otimizar é NP-difícil, então separar é NP-difícil

Por outro lado, eu posso ter um problema de otimização que a formulação é exponencial no tamanho da entrada

- E resolvê-lo em tempo polinomial
- Desde que eu consiga encontrar uma restrição violada em tempo polinomial

Estes resultados envolvem o Método Elipsóide

- Uma forma de resolver PL em tempo polinomial