Combinatória Poliédrica
Poliedro dos Matroídes

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-08 08:53

Matróide

Um matróide é um par $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E satisfazendo:

Matróide

Um matróide é um par $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E satisfazendo:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

Matróide

Um matróide é um par $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E satisfazendo:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$

Matróide

Um matróide é um par $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E satisfazendo:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$

(iii) Se $A, B \in \mathcal{I}$ e $|A| > |B|$, então existe $e \in A \setminus B$ tal que $B \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Matróide

Um matróide é um par $M = (E, \mathcal{I})$ em que E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E satisfazendo:

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) Se $A \in \mathcal{I}$ e $B \subseteq A$, então $B \in \mathcal{I}$

(iii) Se $A, B \in \mathcal{I}$ e $|A| > |B|$, então existe $e \in A \setminus B$ tal que $B \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Os elementos de $\mathcal{I}$ são chamados de conjuntos independentes

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

- Pela propriedade (iii), todos os conjuntos independentes maximais de A têm a mesma cardinalidade

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

- Pela propriedade (iii), todos os conjuntos independentes maximais de A têm a mesma cardinalidade
- Essa cardinalidade é o posto de A (denotado por $r(A)$)

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

- Pela propriedade (iii), todos os conjuntos independentes maximais de A têm a mesma cardinalidade
- Essa cardinalidade é o posto de A (denotado por $r(A)$)
- E os conjuntos independentes maximais são chamados de bases de A

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

- Pela propriedade (iii), todos os conjuntos independentes maximais de A têm a mesma cardinalidade
- Essa cardinalidade é o posto de A (denotado por $r(A)$)
- E os conjuntos independentes maximais são chamados de bases de A

Note que $r(A) = |A|$ se e somente se $A \in \mathcal{I}$

Posto e Base

Sejam $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde e $A \subseteq E$

- Pela propriedade (iii), todos os conjuntos independentes maximais de A têm a mesma cardinalidade
- Essa cardinalidade é o posto de A (denotado por $r(A)$)
- E os conjuntos independentes maximais são chamados de bases de A

Note que $r(A) = |A|$ se e somente se $A \in \mathcal{I}$

- Podemos definir o matroíde a partir de r

Exemplos

Matroíde Gráfico. Considere E como o conjunto de arestas de um grafo G e $\mathcal{I}$ a coleção de todas as florestas de G.

Exemplos

Matroíde Gráfico. Considere E como o conjunto de arestas de um grafo G e $\mathcal{I}$ a coleção de todas as florestas de G.

Matroíde Linear. Considere E como um conjunto finito de vetores em um espaço linear, e $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de E que são linearmente independentes.

Algoritmo Guloso

Dado um matroíde $M = (E, \mathcal{I})$ e um função de custos $c\colon E \to \mathbb{R}_+$, encontrar um conjunto independente de custo máximo.

Algoritmo Guloso

Dado um matroíde $M = (E, \mathcal{I})$ e um função de custos $c \colon E \to \mathbb{R}_+$, encontrar um conjunto independente de custo máximo.

O seguinte algoritmo resolve o problema:

```
procedure GULOSO(E, I, c)
    Ordene E de forma que c(e_1) ≥ c(e_2) ≥ ··· ≥ c(e_|E|)
    S = ∅
    for i = 1, ..., |E| do
        if S ∪ {e_i} ∈ I then
            S = S ∪ {e_i}
    return S
```

Algoritmo Guloso

Dado um matroíde $M = (E, \mathcal{I})$ e um função de custos $c\colon E \to \mathbb{R}_+$, encontrar um conjunto independente de custo máximo.

O seguinte algoritmo resolve o problema:

procedure $\textsc{Guloso}(E, \mathcal{I}, c)$
  Ordene E de forma que $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \cdots \geq c(e_{|E|})$
  $S = \emptyset$
  for $i = 1, \ldots, |E|$ **do**
    if $S \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$ **then**
      $S = S \cup \{e_i\}$
  return S

Vamos olhar o problema do ponto de vista poliédrico

Poliedro dos Matroídes

$$P_{\text{Mat}}(M) = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{\chi}^A \in \mathbb{R}^E \colon A \in \mathcal{I}\}$$

Poliedro dos Matroídes

$$P_{\mathrm{Mat}}(M) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^A \in \mathbb{R}^E \colon A \in \mathcal{I}\}$$

Teorema. Seja $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde. Então

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{Mat}}(M) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^E \colon\ & x(A) \le r(A) \text{ para todo } A \subseteq E, \\ & x_e \ge 0 \text{ para todo } e \in E\} \end{aligned}$$

Definições e Teorema

Um conjunto $A \subseteq E$ é

Definições e Teorema

Um conjunto $A \subseteq E$ é

- fechado se $r(A \cup \{e\}) > r(A)$ para todo $e \in E \setminus A$

Definições e Teorema

Um conjunto $A \subseteq E$ é

- fechado se $r(A \cup \{e\}) > r(A)$ para todo $e \in E \setminus A$
- não separável se, sempre que $S \subseteq A$ satisfaz $r(S) + r(A \setminus S) = r(A)$ então $S = \emptyset$ ou $S = A$

Definições e Teorema

Um conjunto $A \subseteq E$ é

- **fechado** se $r(A \cup \{e\}) > r(A)$ para todo $e \in E \setminus A$
- **não separável** se, sempre que $S \subseteq A$ satisfaz $r(S) + r(A \setminus S) = r(A)$ então $S = \emptyset$ ou $S = A$

Teorema. Seja $M = (E, \mathcal{I})$ um matroíde. Então, a inequação $x(A) \leq r(A)$, $A \subseteq E$ define uma faceta de $P_{\mathrm{Mat}}(M)$ se e somente se A é fechado e não separável.

Teorema

Teorema. Seja $G = (V, A)$ um grafo e $P_{\mathrm{Flo}}(G)$ o poliedro das florestas de G, ou seja,

$$P_{\mathrm{Flo}}(G) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^F \in R^A \colon F \text{ é uma floresta em } G\}.$$

Então, $P_{\mathrm{Flo}}(G)$ é descrito pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \forall a \in A \\ x(A(S)) &\leq |S| - 1 && \forall S \subseteq V \text{ tal que } G[S] \text{ é não-separável} \end{aligned}$$

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

A interseção de M_1 e M_2 é $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

A interseção de M_1 e M_2 é $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$

- Em geral, não é um matroíde...

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

A interseção de M_1 e M_2 é $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$

- Em geral, não é um matroíde...
- Mas achar um conjunto independente de custo máximo ainda pode ser resolvido em tempo polinomial

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

A interseção de M_1 e M_2 é $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$

- Em geral, não é um matroíde...
- Mas achar um conjunto independente de custo máximo ainda pode ser resolvido em tempo polinomial
- E sabemos algo interessante sobre o poliedro

Interseção de Matroídes

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroídes

A interseção de M_1 e M_2 é $M_1 \cap M_2 = (E, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$

- Em geral, não é um matroíde...
- Mas achar um conjunto independente de custo máximo ainda pode ser resolvido em tempo polinomial
- E sabemos algo interessante sobre o poliedro

$$P_{\mathrm{Int}}(M_1, M_2) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^I \in \mathbb{R}^E : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\}$$

Teoremas

Teorema. Sejam M_1 e M_2 dois matroídes definidos sobre o mesmo conjunto E e sejam r_1, r_2 as respectivas funções de posto. Então

$$P_{\text{Int}}(M_1, M_2) = P_{\text{Mat}}(M_1) \cap P_{\text{Mat}}(M_2)$$

ou seja, $P_{\text{Int}}(M_1, M_2)$ é descrito pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \forall e \in E \\ x(A) &\leq \min\{r_1(A), r_2(A)\} && \forall A \subseteq E \end{aligned}$$

Teoremas

Teorema. Sejam M_1 e M_2 dois matroídes definidos sobre o mesmo conjunto E e sejam r_1, r_2 as respectivas funções de posto. Então

$$P_{\text{Int}}(M_1, M_2) = P_{\text{Mat}}(M_1) \cap P_{\text{Mat}}(M_2)$$

ou seja, $P_{\text{Int}}(M_1, M_2)$ é descrito pelo seguinte sistema:

$$\begin{aligned} x_e &\geq 0 && \forall e \in E \\ x(A) &\leq \min\{r_1(A), r_2(A)\} && \forall A \subseteq E \end{aligned}$$

Teorema. Sejam M_1 e M_2 dois matroídes definidos sobre o mesmo conjunto E e sejam r_1, r_2 as respectivas funções de posto. Então

$$\max\{|I| \colon I \in \mathcal{I}_1 \cap I_2\} = \min\{r_1(A) + r_2(E \setminus A) \colon A \subseteq E\}.$$