Combinatória Poliédrica
Poliedro do Caixeiro Viajante

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-08 08:53

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão
- Quando G é um digrafo, temos a versão assimétrica

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão
- Quando G é um digrafo, temos a versão assimétrica

Vamos considerar também que G é um grafo completo

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão
- Quando G é um digrafo, temos a versão assimétrica

Vamos considerar também que G é um grafo completo

- Não há perda de generalidade nisso

Caixeiro Viajante

Um ciclo hamiltoniano em um grafo G é um ciclo que visita cada vértice de G exatamente uma vez

Problema do Caixeiro Viajante. Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo.

Essa é a versão simétrica

- Focaremos nessa versão
- Quando G é um digrafo, temos a versão assimétrica

Vamos considerar também que G é um grafo completo

- Não há perda de generalidade nisso
- Considere que aresta não existentes têm custo muito grande

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n :$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n :$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\mathrm{Ham}} = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n :$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\text{Ham}} = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n\colon$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\text{Ham}} = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

- Mas podemos mesmo considerar ele?

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n :$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\mathrm{Ham}} = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

- Mas podemos mesmo considerar ele?
- Se eu otimizar, posso não ter um ciclo como resposta...

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n \colon$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\mathrm{Ham}} = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

- Mas podemos mesmo considerar ele?
- Se eu otimizar, posso não ter um ciclo como resposta...
- Ou será que dá para lidar com isso de alguma forma?

Politopo

$K_n = (V_n, A_n)$ é o grafo completo com n vértices

$\mathcal{T}^n = \{T \subseteq A_n \colon$ existe um ciclo hamiltoniano C em K_n com $T \subseteq C\}$

$$P^n_{\text{Ham}} = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^T \in R^{A_n} : T \in \mathcal{T}^n\}$$

É fácil mostrar que este politopo tem dimensão completa

- Mas podemos mesmo considerar ele?
- Se eu otimizar, posso não ter um ciclo como resposta...
- Ou será que dá para lidar com isso de alguma forma?

Lema. $\dim(P^n_{\text{Ham}}) = |A_n| = n(n-1)/2$ para $n \geq 3$.

Teoremas

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teoremas

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \leq 1$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teoremas

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \geq 0$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teorema. Para toda aresta e em K_n, $n \geq 3$, a inequação $x_e \leq 1$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Teorema. Para todo vértice v em K_n, $n \geq 4$, a inequação $x(\delta(v)) \leq 2$ define uma faceta de P^n_{Ham}.

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Ou seja, essas inequações são válidas para P^n_{Ham}:

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Ou seja, essas inequações são válidas para P^n_{Ham}:

$$x(A_n(S)) \leq |S| - 1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Ou seja, essas inequações são válidas para P^n_{Ham}:

$$x(A_n(S)) \leq |S|-1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

Essas inequações são chamadas de restrições de eliminação de subciclos

Eliminação de Subciclos

Se $S \subseteq V$ é tal que $2 \leq |S| \leq n-1$ então $A_n(S)$ intersecta cada ciclo hamiltoniano em no máximo $|S|-1$ arestas

Ou seja, essas inequações são válidas para P^n_{Ham}:

$$x(A_n(S)) \leq |S|-1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

Essas inequações são chamadas de restrições de eliminação de subciclos

Teorema. Para todo $n \geq 4$, a inequação

$$x(A_n(S)) \leq |S|-1 \quad \text{para todo } S \subseteq V, 2 \leq |S| \leq n-1$$

define uma faceta de P^n_{Ham}.

Separação

As restrições de eliminação de subciclos podem ser separadas em tempo polinomial

Separação

As restrições de eliminação de subclicos podem ser separadas em tempo polinomial

Então dá para resolver Caixeiro Viajante em tempo polinomial?

Separação

As restrições de eliminação de subclicos podem ser separadas em tempo polinomial

Então dá para resolver Caixeiro Viajante em tempo polinomial?

Não! Sabemos algumas das facetas do poliedro...

Separação

As restrições de eliminação de subclicos podem ser separadas em tempo polinomial

Então dá para resolver Caixeiro Viajante em tempo polinomial?

Não! Sabemos algumas das facetas do poliedro...

- Não todas...

Separação

As restrições de eliminação de subclicos podem ser separadas em tempo polinomial

Então dá para resolver Caixeiro Viajante em tempo polinomial?

Não! Sabemos algumas das facetas do poliedro...

- Não todas...
- Sabemos algumas outras, mas não sabemos separar em tempo polinomial