

MC-202

Árvores Binárias de Busca

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-25 09:56

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Veremos **árvores binárias de busca**

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Veremos **árvores binárias de busca**

- primeiro uma versão simples, depois uma sofisticada

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
 - insira no final
 - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Veremos **árvores binárias de busca**

- primeiro uma versão simples, depois uma sofisticada
- versão sofisticada: três operações levam $O(\lg n)$

Árvore Binária de Busca

Uma **Árvore Binária de Busca** (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Árvore Binária de Busca

Uma **Árvore Binária de Busca** (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r , com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

Árvore Binária de Busca

Uma **Árvore Binária de Busca** (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r , com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$

Árvore Binária de Busca

Uma **Árvore Binária de Busca** (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r , com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

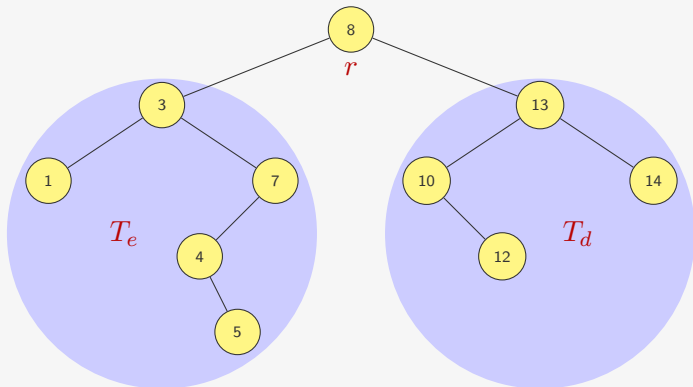
1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$
2. $d > r$ para todo elemento $d \in T_d$

Árvore Binária de Busca

Uma **Árvore Binária de Busca** (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r , com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$
2. $d > r$ para todo elemento $d \in T_d$



TAD — Árvores de Busca Binária

```
1 typedef struct no *p_no;
2
3 struct no {
4     int chave;
5     p_no esq, dir, pai; /* pai é opcional, usado para
6                        * buscar sucessor e antecessor */
7 };
8
9 p_no criar_arvore();
10
11 void destruir_arvore(p_no raiz);
12
13 p_no inserir(p_no raiz, int chave);
14
15 p_no remover(p_no raiz, int chave);
16
17 p_no buscar(p_no raiz, int chave);
18
19 p_no minimo(p_no raiz);
20
21 p_no maximo(p_no raiz);
22
23 p_no sucessor(p_no x);
24
25 p_no antecessor(p_no x);
```

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

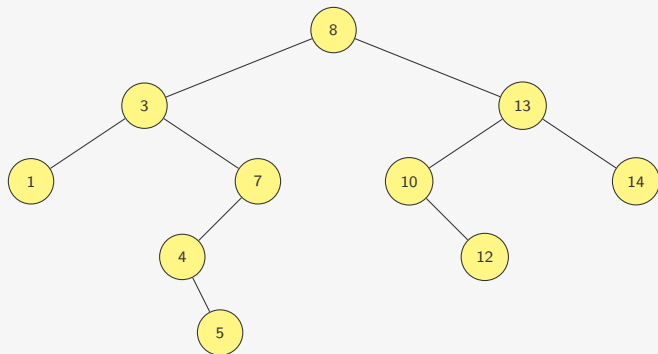
Ex: Buscando por 4

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

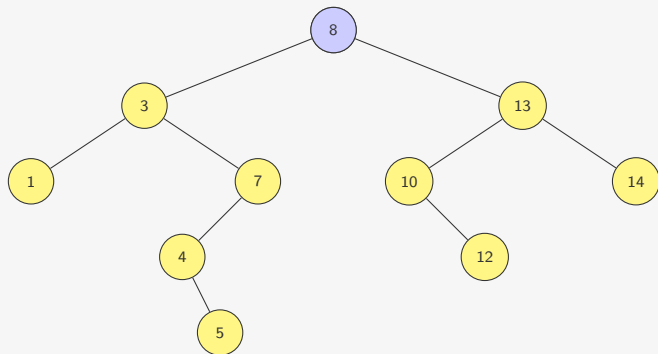


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

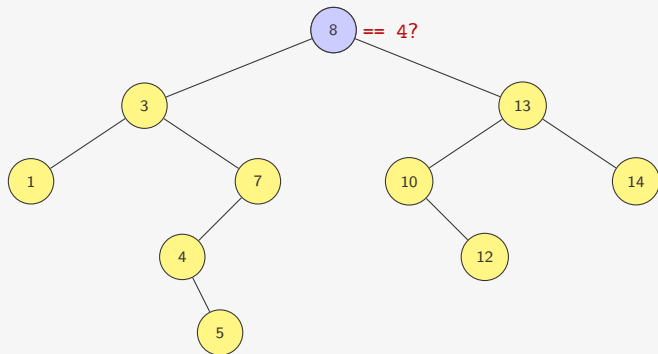


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

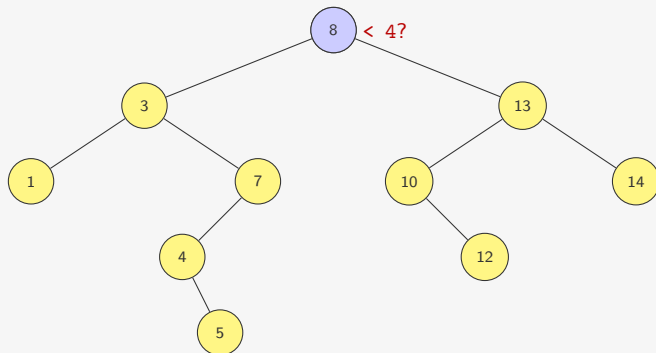


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

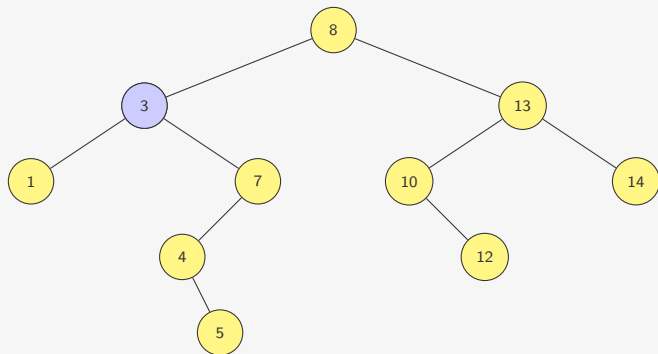


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

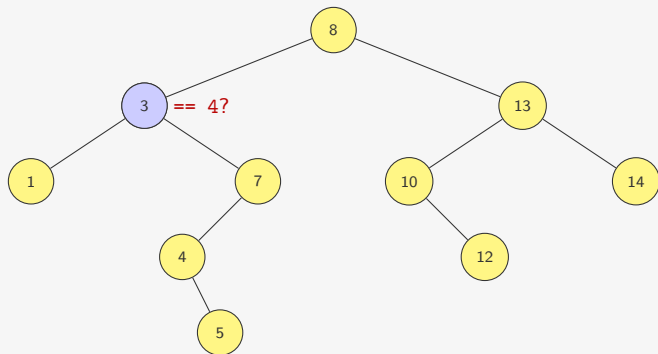


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

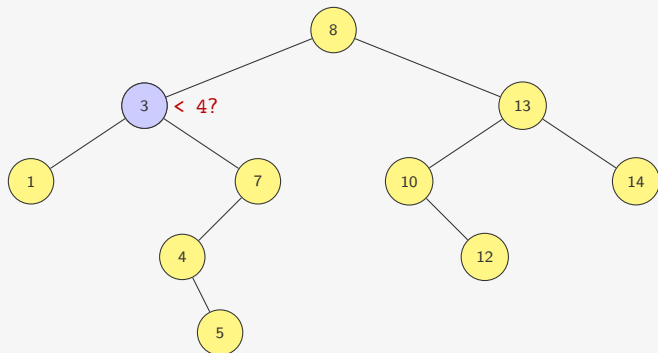


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

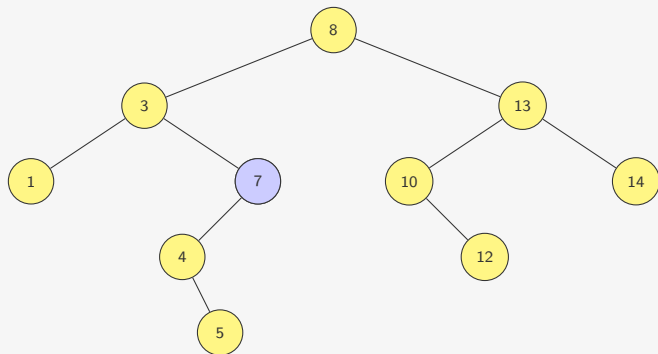


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

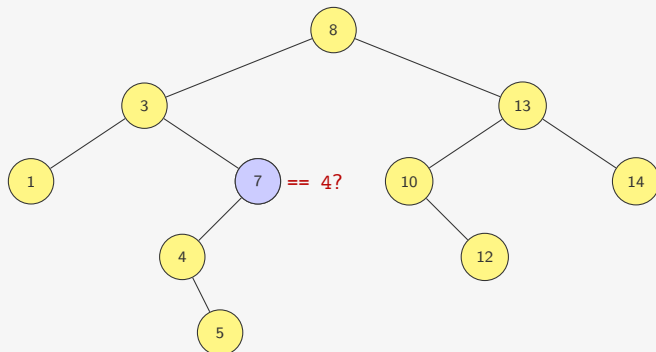


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

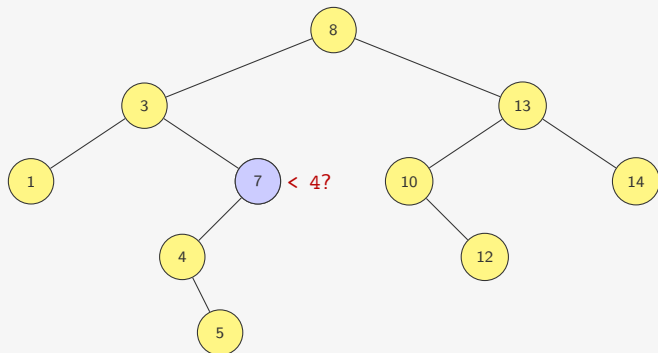


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

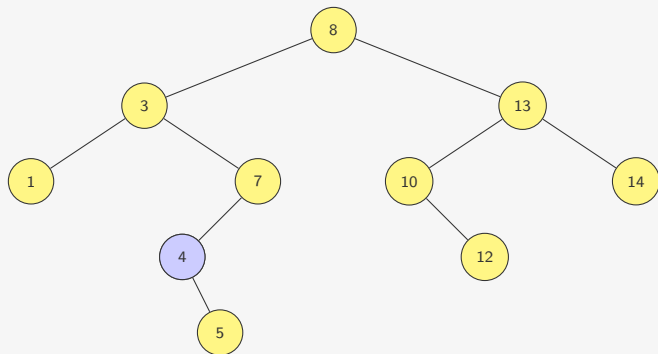


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

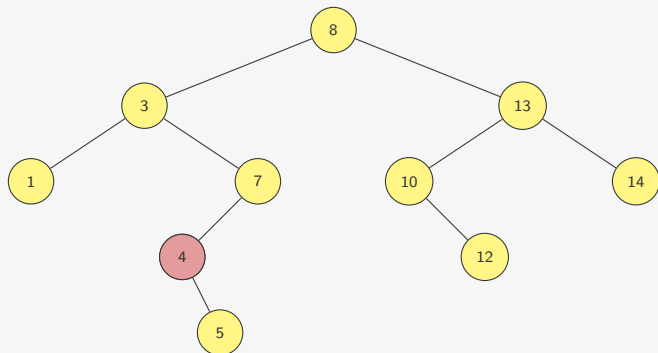


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

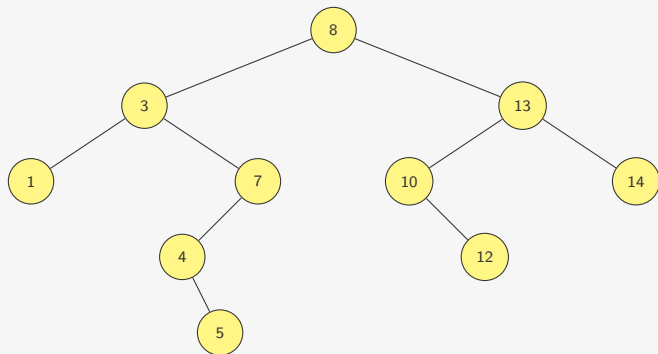


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por **11**

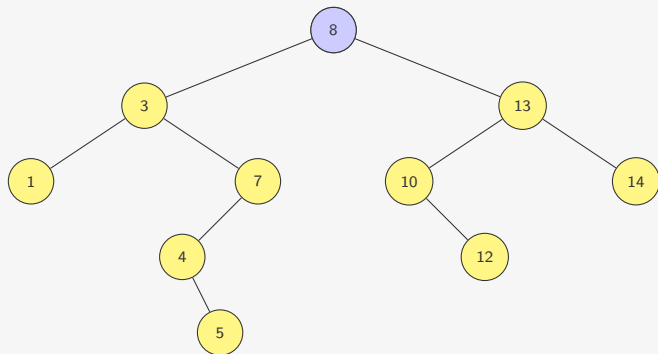


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por **11**

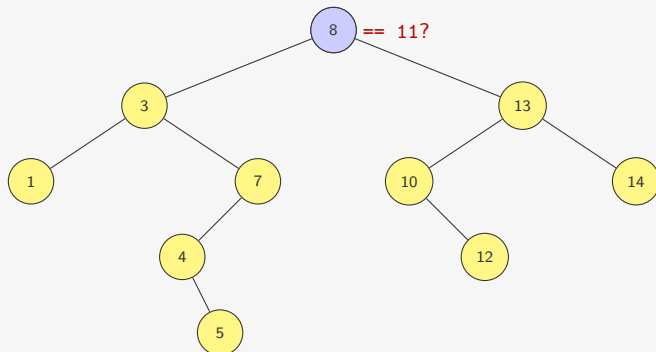


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

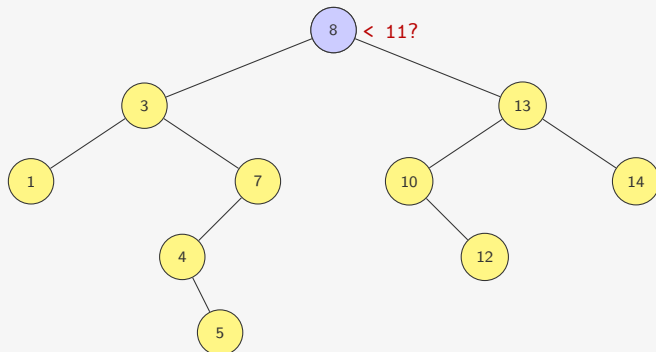


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

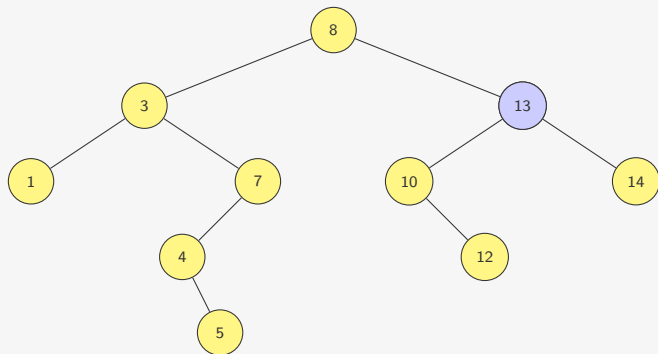


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por **11**

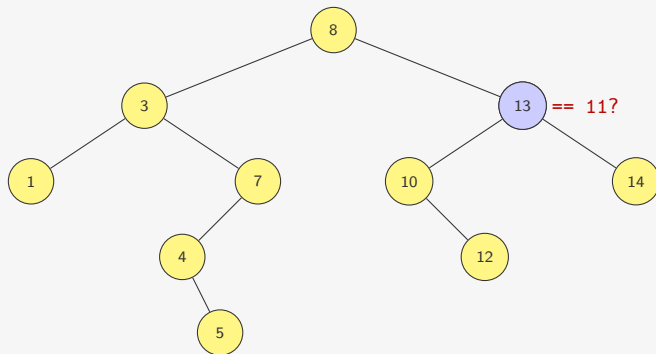


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

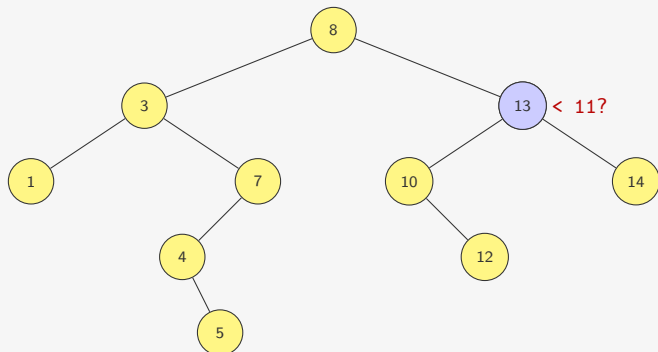


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

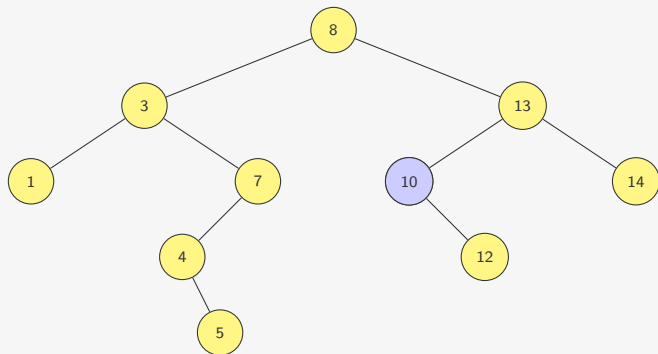


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por **11**

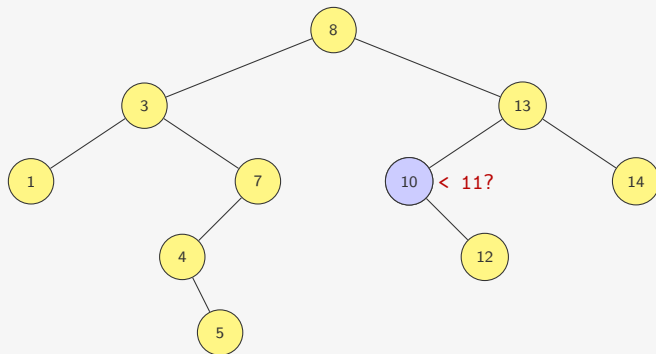


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

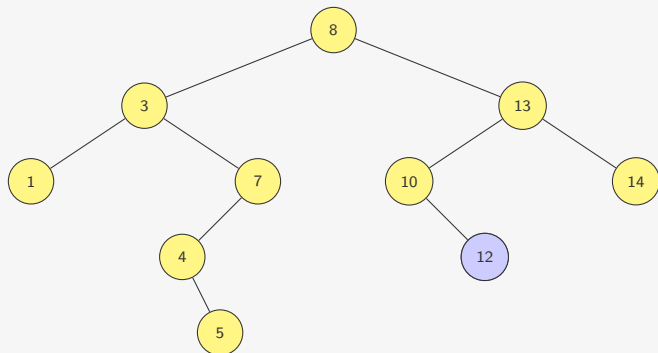


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por **11**

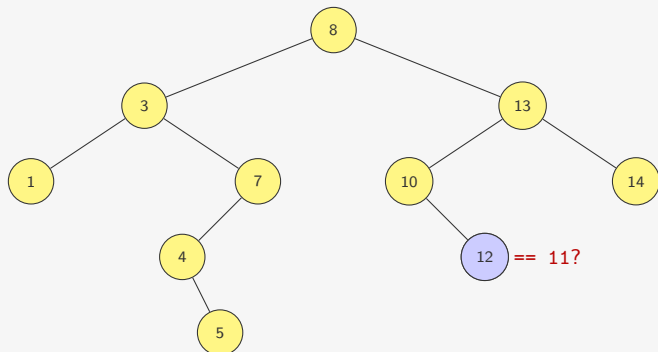


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

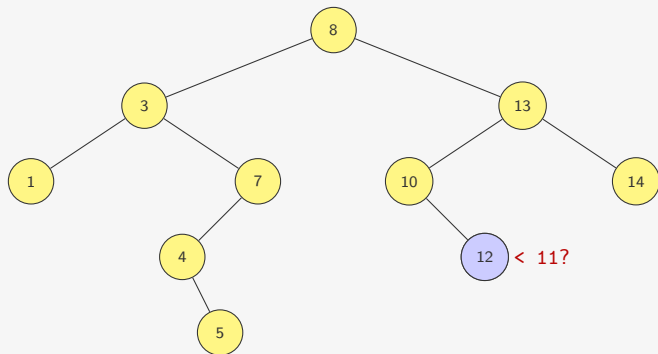


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

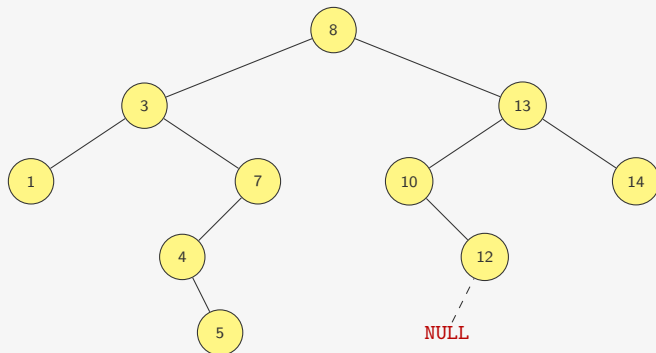


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
 - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11



Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
```


Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {  
2     if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)  
3         return raiz;
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {  
2     if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)  
3         return raiz;  
4     if (chave < raiz->chave)  
5         return buscar(raiz->esq, chave);
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3         return raiz;
4     if (chave < raiz->chave)
5         return buscar(raiz->esq, chave);
6     else
7         return buscar(raiz->dir, chave);
8 }
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3         return raiz;
4     if (chave < raiz->chave)
5         return buscar(raiz->esq, chave);
6     else
7         return buscar(raiz->dir, chave);
8 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no buscar_iterativo(p_no raiz, int chave) {
2     while (raiz != NULL && chave != raiz->chave)
3         if (chave < raiz->chave)
4             raiz = raiz->esq;
5         else
6             raiz = raiz->dir;
7     return raiz;
8 }
```

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

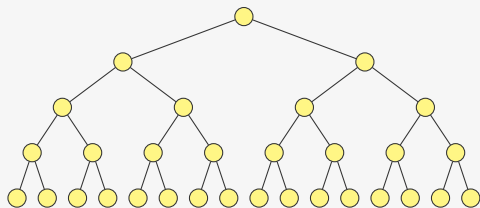
Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



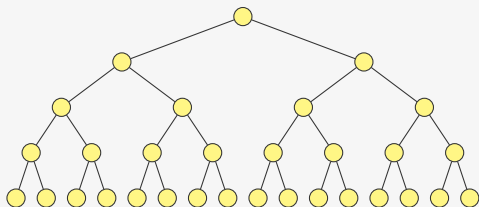
Melhor árvore: $O(\lg n)$

Eficiência da busca

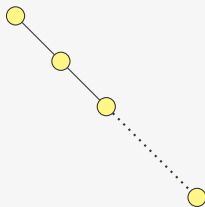
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $O(\lg n)$



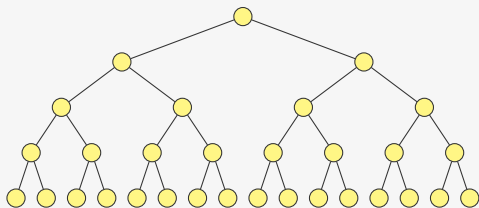
Pior árvore: $O(n)$

Eficiência da busca

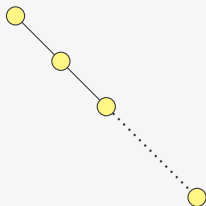
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $O(\lg n)$



Pior árvore: $O(n)$

Caso médio: em uma árvore com n elementos adicionados aleatoriamente, a busca demora (em média) $O(\lg n)$

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

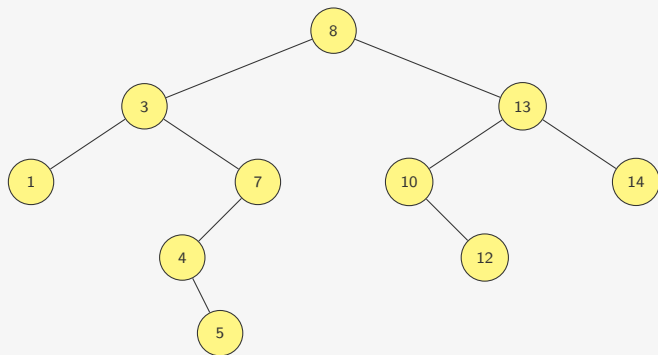
Ex: Inserindo 11

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

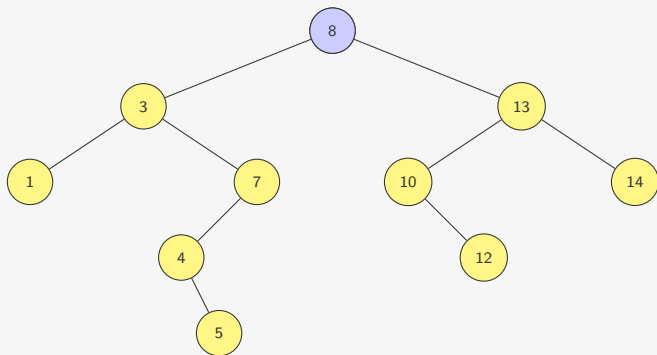


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

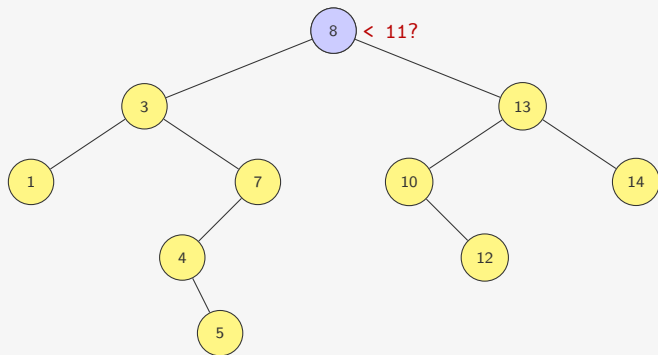


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

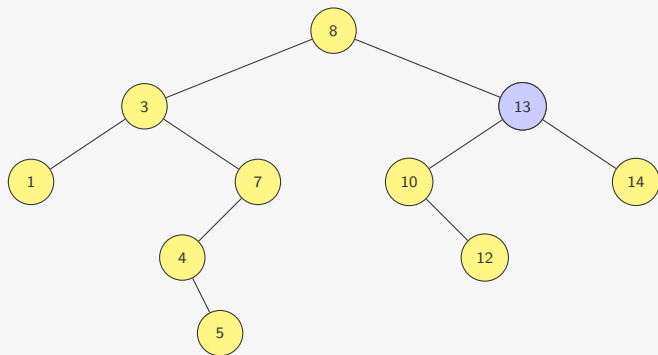


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

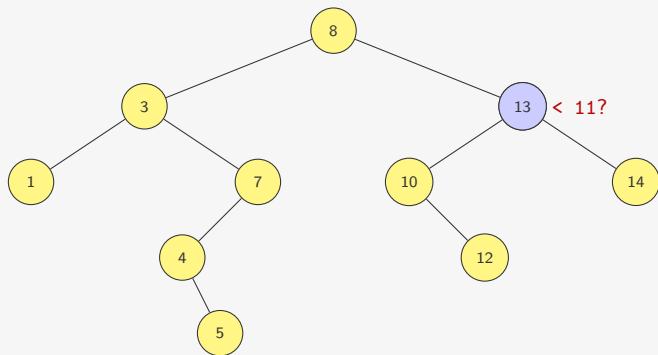


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

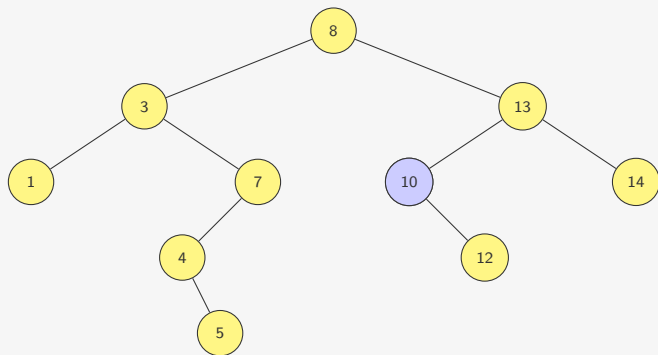


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

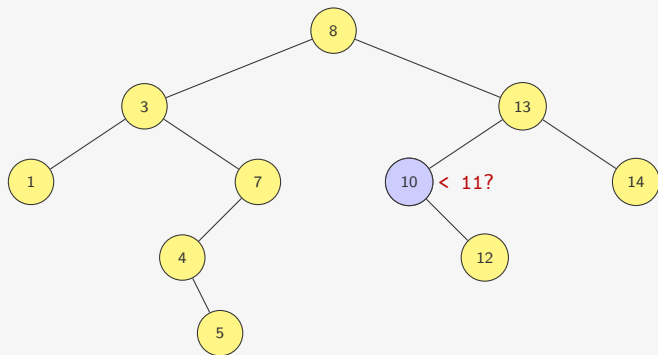


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

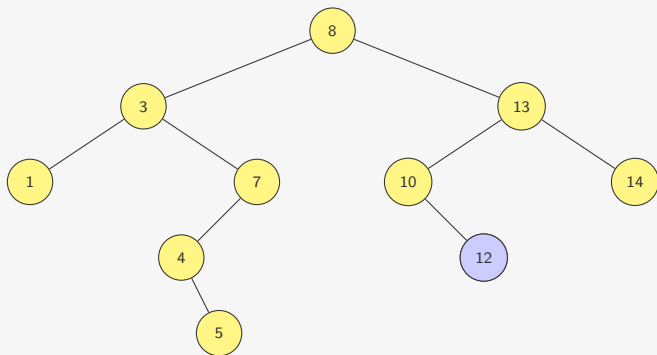


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

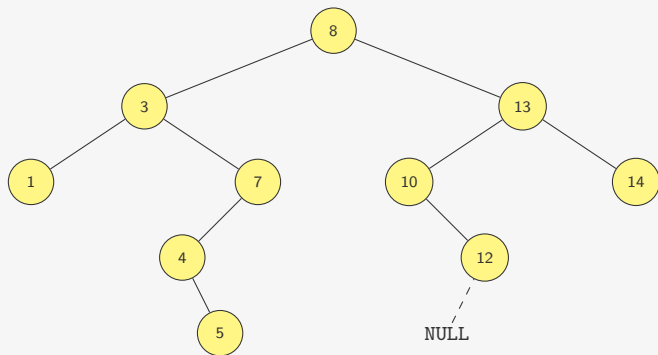


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**

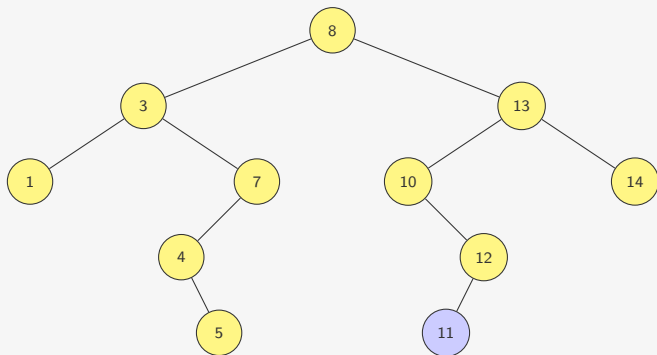


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e inserimos onde ele deveria estar

Ex: Inserindo **11**



Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore

Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
```

Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2     p_no novo;
3     if (raiz == NULL) {
4         novo = malloc(sizeof(struct no));
5         novo->esq = novo->dir = NULL;
6         novo->chave = chave;
7         return novo;
8     }
```

Inserção — implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

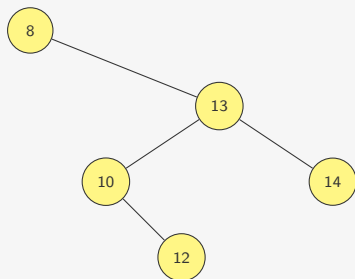
```
1 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2     p_no novo;
3     if (raiz == NULL) {
4         novo = malloc(sizeof(struct no));
5         novo->esq = novo->dir = NULL;
6         novo->chave = chave;
7         return novo;
8     }
9     if (chave < raiz->chave)
10        raiz->esq = inserir(raiz->esq, chave);
11    else
12        raiz->dir = inserir(raiz->dir, chave);
13    return raiz;
14 }
```


Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?

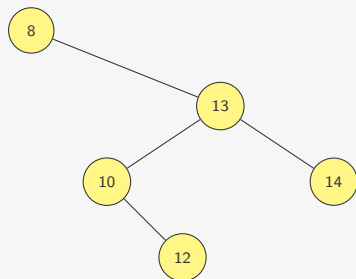
Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Mínimo da Árvore

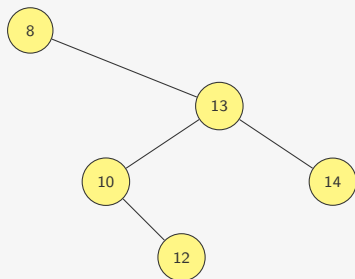
Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

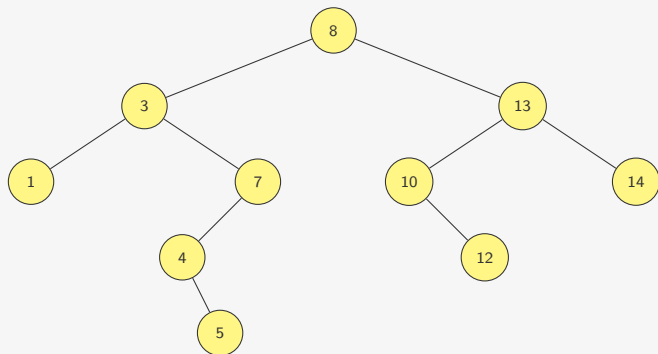
- É a própria raiz

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?

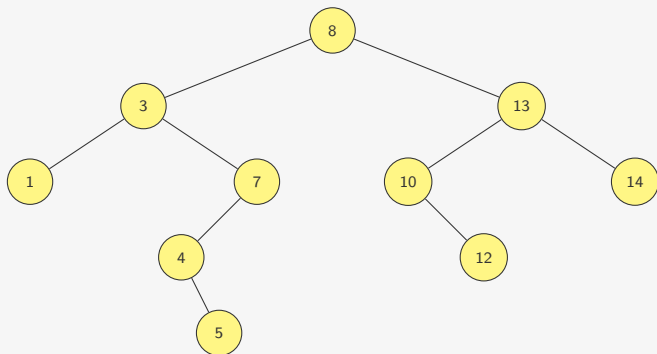
Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Mínimo da Árvore

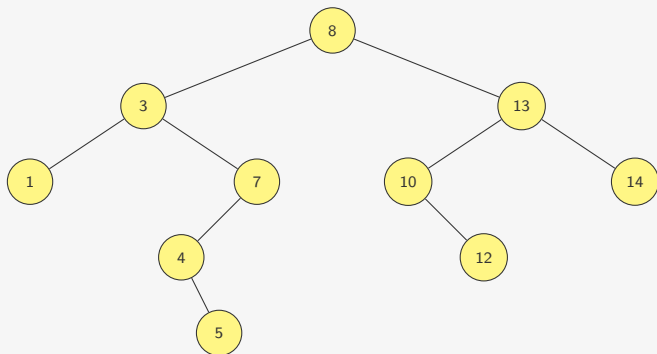
Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

- É o mínimo da subárvore esquerda

Mínimo — Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {  
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)  
3     return raiz;  
4   return minimo(raiz->esq);  
5 }
```

Mínimo — Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Mínimo — Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

Mínimo — Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

- Se a subárvore direita existir, ela contém o máximo

Mínimo — Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

- Se a subárvore direita existir, ela contém o máximo
- Senão, é a própria raiz

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

Sucessor

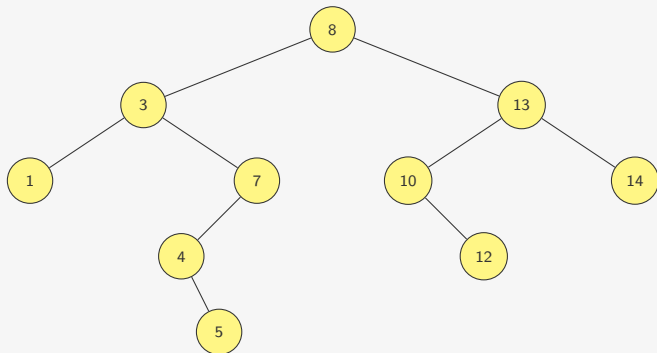
Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

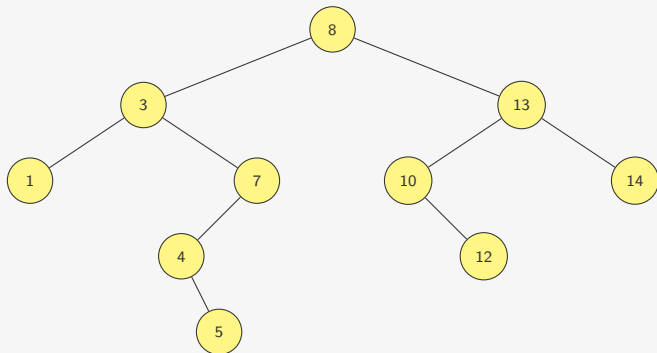
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

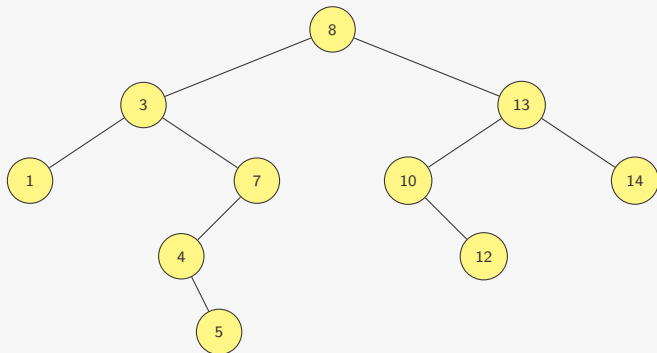


Quem é o sucessor de **3**?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



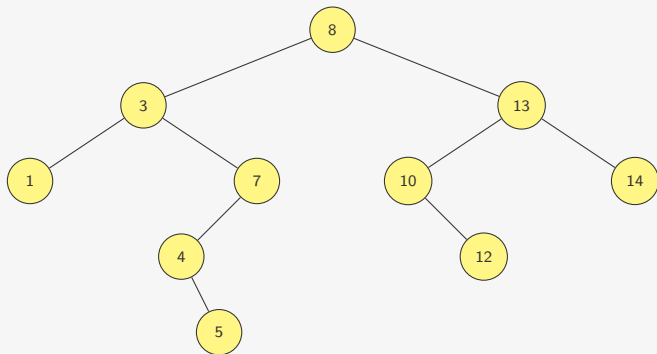
Quem é o sucessor de **3**?

- É o mínimo da subárvore direita de **3**

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

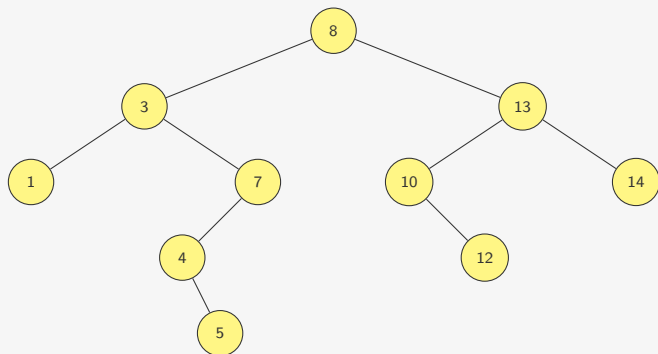
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

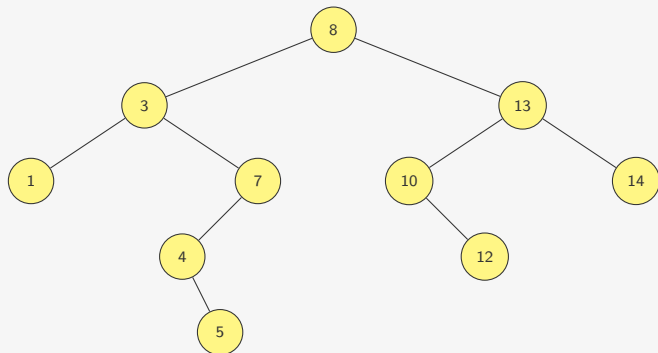


Quem é o sucessor de 7?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



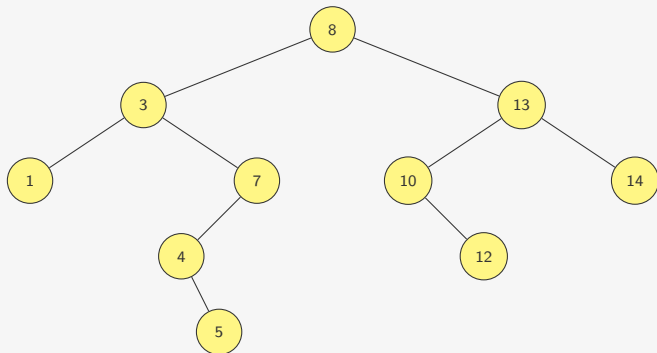
Quem é o sucessor de **7**?

- É primeiro ancestral a direita

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

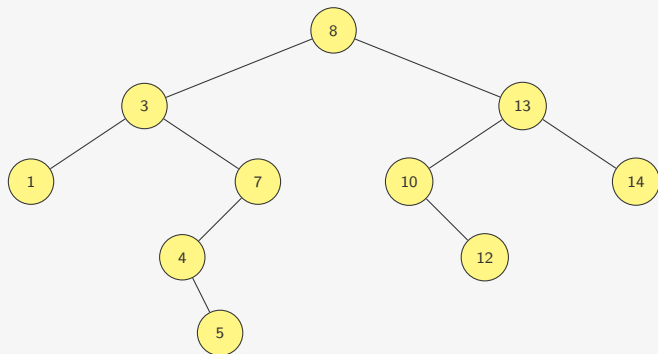
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

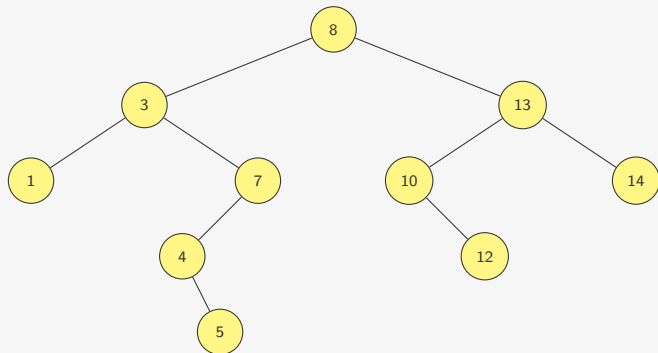


Quem é o sucessor de 14?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Quem é o sucessor de 14?

- não tem sucessor...

Sucessor — Implementação

```
1 p_no sucessor(p_no x) {  
2   if (x->dir != NULL)  
3     return minimo(x->dir);  
4   else  
5     return ancestral_a_direita(x);  
6 }
```

Sucessor — Implementação

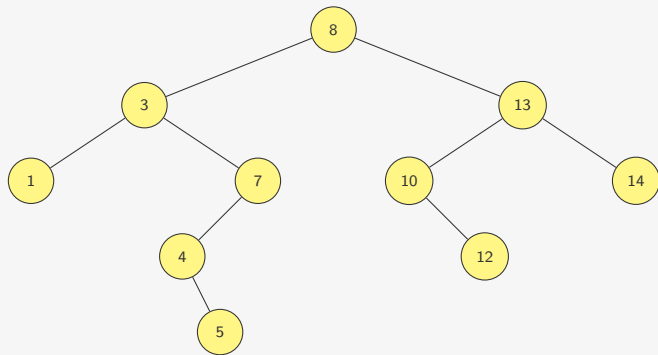
```
1 p_no sucessor(p_no x) {
2   if (x->dir != NULL)
3     return minimo(x->dir);
4   else
5     return ancestral_a_direita(x);
6 }
```

```
1 p_no ancestral_a_direita(p_no x) {
2   if (x == NULL)
3     return NULL;
4   if (x->pai == NULL || x->pai->esq == x)
5     return x->pai;
6   else
7     return ancestral_a_direita(x->pai);
8 }
```

A implementação da função **antecessor** é simétrica

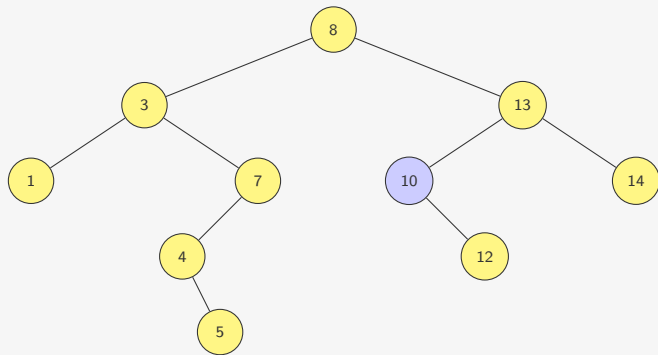
Remoção

Ex: removendo 10



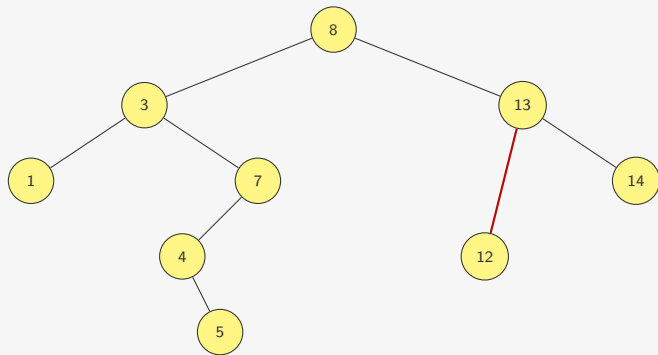
Remoção

Ex: removendo 10



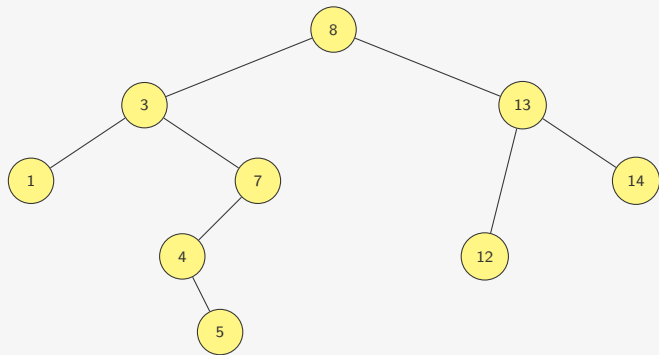
Remoção

Ex: removendo 10



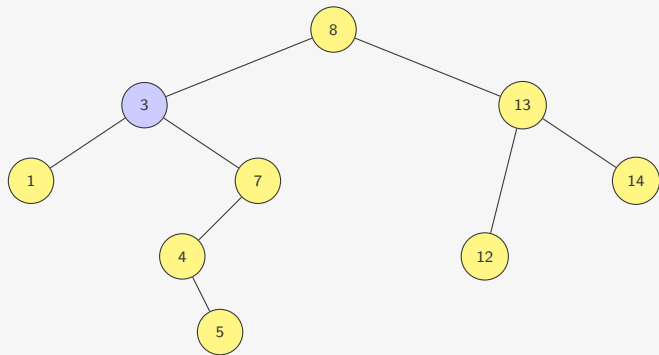
Remoção

Ex: removendo 3



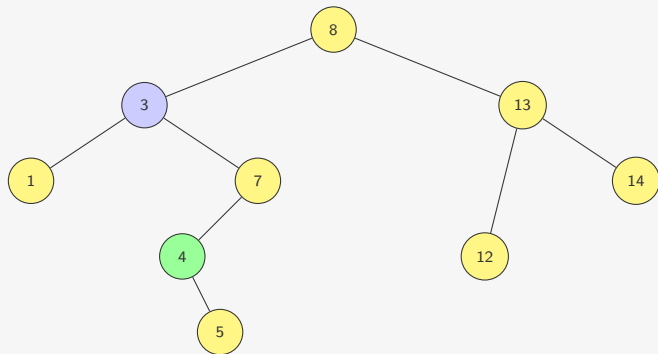
Remoção

Ex: removendo 3



Remoção

Ex: removendo 3

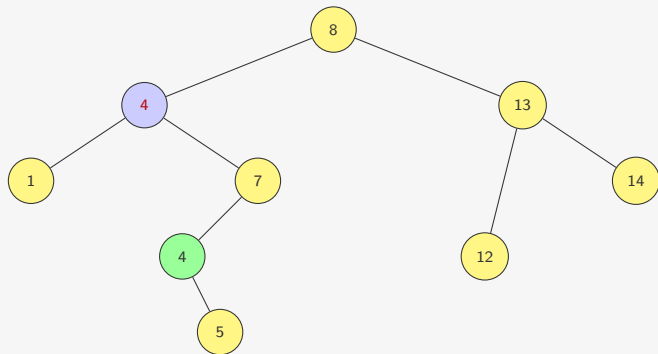


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3

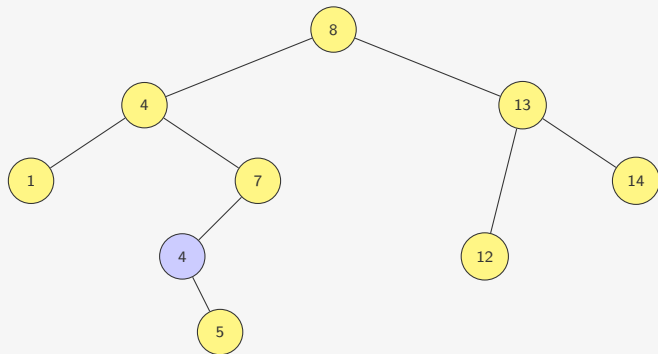


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3



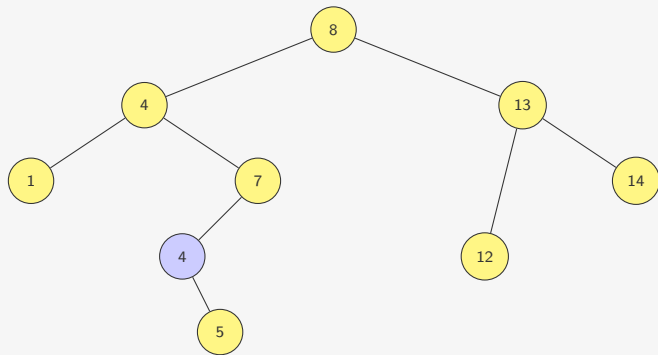
Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

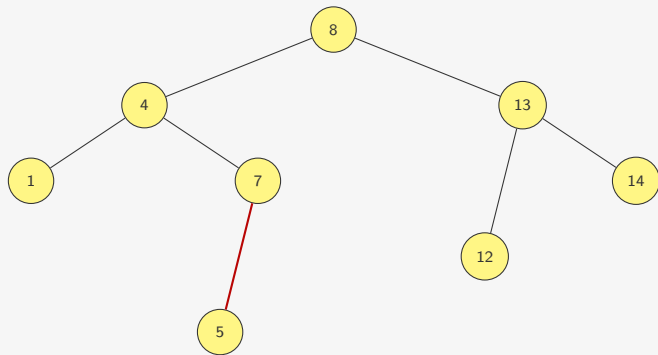
- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
```

Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {  
2     if (raiz == NULL)  
3         return NULL;
```

Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL)
3         return NULL;
4     if (chave < raiz->chave)
5         raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6     else if (chave > raiz->chave)
7         raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
```

Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL)
3         return NULL;
4     if (chave < raiz->chave)
5         raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6     else if (chave > raiz->chave)
7         raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8     else if (raiz->esq == NULL)
9         return raiz->dir;
```


Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL)
3         return NULL;
4     if (chave < raiz->chave)
5         raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6     else if (chave > raiz->chave)
7         raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8     else if (raiz->esq == NULL)
9         return raiz->dir;
10    else if (raiz->dir == NULL)
11        return raiz->esq;
```

Remoção — Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2     if (raiz == NULL)
3         return NULL;
4     if (chave < raiz->chave)
5         raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6     else if (chave > raiz->chave)
7         raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8     else if (raiz->esq == NULL)
9         return raiz->dir;
10    else if (raiz->dir == NULL)
11        return raiz->esq;
12    else
13        remover_sucessor(raiz);
14    return raiz;
15 }
```

Remoção — Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
```

Remoção — Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {  
2   p_no min = raiz->dir; /*será o mínimo da subárvore direita*/  
3   p_no pai = raiz;     /*será o pai de min*/
```

Remoção — Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
2     p_no min = raiz->dir; /*será o mínimo da subárvore direita*/
3     p_no pai = raiz;     /*será o pai de min*/
4     while (min->esq != NULL) {
5         pai = min;
6         min = min->esq;
7     }
```

Remoção — Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
2     p_no min = raiz->dir; /*será o mínimo da subárvore direita*/
3     p_no pai = raiz;     /*será o pai de min*/
4     while (min->esq != NULL) {
5         pai = min;
6         min = min->esq;
7     }
8     if (pai->esq == min)
9         pai->esq = min->dir;
```

Remoção — Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
2     p_no min = raiz->dir; /*será o mínimo da subárvore direita*/
3     p_no pai = raiz;     /*será o pai de min*/
4     while (min->esq != NULL) {
5         pai = min;
6         min = min->esq;
7     }
8     if (pai->esq == min)
9         pai->esq = min->dir;
10    else
11        pai->dir = min->dir;
12    raiz->chave = min->chave;
13 }
```

Exercício

Faça uma função que imprime as chaves de uma ABB em ordem crescente

Exercício

Faça uma implementação da função `sucessor` que não usa o ponteiro `pai`

- Dica: você precisará da raiz da árvore pois não pode subir