MC-202
Backtracking

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-08-02 10:42

Sequências

Como imprimir todas as sequências de tamanho k de números entre 1 e n?

Exemplo: $n = 4, k = 3$

1 1 1	1 3 1	2 1 1	2 3 1	3 1 1	3 3 1	4 1 1	4 3 1
1 1 2	1 3 2	2 1 2	2 3 2	3 1 2	3 3 2	4 1 2	4 3 2
1 1 3	1 3 3	2 1 3	2 3 3	3 1 3	3 3 3	4 1 3	4 3 3
1 1 4	1 3 4	2 1 4	2 3 4	3 1 4	3 3 4	4 1 4	4 3 4
1 2 1	1 4 1	2 2 1	2 4 1	3 2 1	3 4 1	4 2 1	4 4 1
1 2 2	1 4 2	2 2 2	2 4 2	3 2 2	3 4 2	4 2 2	4 4 2
1 2 3	1 4 3	2 2 3	2 4 3	3 2 3	3 4 3	4 2 3	4 4 3
1 2 4	1 4 4	2 2 4	2 4 4	3 2 4	3 4 4	4 2 4	4 4 4

Toda sequência que começa com i é seguida de uma sequência de tamanho $k - 1$ de números entre 1 e n

Sequências

Podemos resolver usando Recursão:

- Armazenamos o prefixo da sequência que estamos construindo
- Completamos com todos os possíveis sufixos recursivamente

Simulação para $n = 4, k = 3$:

1	3	4

Sequências — Implementação

```c
void sequencias(int n, int k) {
  int *seq = malloc(k * sizeof(int));
  sequenciasR(seq, n, k, 0);
  free(seq);
}

void sequenciasR(int *seq, int n, int k, int i) {
  int v;
  if (i == k) {
    imprimi_vetor(seq, k);
    return;
  }
  for (v = 1; v <= n; v++) {
    seq[i] = v;
    sequenciasR(seq, n, k, i+1);
  }
}
```

Note que `seq` funciona como uma pilha

- Acessamos sempre a última posição

Sequências sem repetições

Queremos agora imprimir todas as sequências de tamanho k de números entre 1 e n sem repetições

Primeiro algoritmo:

- já temos um algoritmo que gera todas as sequências com repetições
- testar se uma sequência tem repetição é fácil
- basta imprimir as sequências que passarem no teste!

Checando por repetições

```c
int busca(int *vetor, int k, int valor) {
  int i;
  for (i = 0; i < k; i++)
    if (vetor[i] == valor)
      return 1;
  return 0;
}

int tem_repeticao(int *vetor, int k) {
  int i;
  for (i = k - 1; i > 0; i--)
    if (busca(vetor, i, vetor[i]))
      return 1;
  return 0;
}
```

Checando por repetições

```c
void sem_repeticao(int n, int k) {
  int *seq = malloc(k * sizeof(int));
  sem_repeticaoR(seq, n, k, 0);
  free(seq);
}

void sem_repeticaoR(int *seq, int n, int k, int i) {
  int v;
  if (i == k) {
    if (!tem_repeticao(seq, k))
      imprimi_vetor(seq, k);
    return;
  }
  for (v = 1; v <= n; v++) {
    seq[i] = v;
    sem_repeticaoR(seq, n, k, i+1);
  }
}
```

Segundo Algoritmo

Podemos construir a sequência sem permitir repetições

- Basta verificar se o número já está na sequência

Simulação para $n = 4, k = 3$:

2	1	4

Segundo Algoritmo

```
void sem_repeticaoR(int *seq, int n, int k, int i) {
  int v;
  if (i == k) {
    imprimi_vetor(seq, k);
    return;
  }
  for (v = 1; v <= n; v++) {
    if (!busca(seq, i, v)) {
      seq[i] = v;
      sem_repeticaoR(seq, n, k, i+1);
    }
  }
}
```

Terceiro Algoritmo

Guardamos a informação de quais números já foram usados

- Vetor `usado` de `n + 1` posições
- `usado[i] = 1` se `i` está no prefixo
- `usado[i] = 0` se `i` não está no prefixo
- Bem mais rápido do que fazer a busca

Terceiro Algoritmo

```
void sem_repeticao(int n, int k) {
  int *seq = malloc(k * sizeof(int));
  int *usado = calloc(n + 1, sizeof(int));
  sem_repeticaoR(seq, usado, n, k, 0);
  free(seq);
  free(usado);
}

void sem_repeticaoR(int *seq, int *usado, int n, int k, int i) {
  int v;
  if (i == k) {
    imprimi_vetor(seq, k);
    return;
  }
  for (v = 1; v <= n; v++) {
    if (!usado[v]) {
      seq[i] = v;
      usado[v] = 1;
      sem_repeticaoR(seq, usado, n, k, i+1);
      usado[v] = 0;
    }
  }
}
```

Comparação

Primeiro algoritmo:

- Gera todas as sequências com repetições
- Testa para ver se a sequência tem repetições
- Tempo para $n = k = 10$: 116,98s

Segundo algoritmo:

- Gera apenas sequências sem repetições
- Usa `busca` para ver se o número já está na sequência
- Tempo para $n = k = 10$: 4,16s

Terceiro algoritmo:

- Gera apenas sequências sem repetições
- Usa um vetor para ver se o número já está na sequência
- Tempo para $n = k = 10$: 3,83s

Força Bruta

Geramos os candidatos a solução do problema e testamos para ver se é de fato uma solução

- Ex.: para quebrar uma senha, podemos gerar cada senha sistematicamente e testamos se é a senha válida
- Podemos enumerar estruturas (como sequências)
- Podemos encontrar todas as soluções de um problema

Porém, a força bruta pode ser muito lenta para resolver determinados problemas

Backtracking — Retrocesso

Resolver um problema de forma recursiva, podendo tomar decisões erradas

- Nesse caso, escolhemos outra decisão

Construímos soluções passo-a-passo, retrocedendo se a solução parcial atual não é válida

- Começamos com uma solução parcial vazia
- Enquanto for possível, adicionamos um elemento à solução parcial
- Se encontrarmos uma solução completa, terminamos
- Se não é possível adicionar mais nenhum elemento à solução parcial, retrocedemos
  - removemos um ou mais elementos da solução parcial
  - e tomamos decisões diferentes das que foram tomadas

Sudoku

No Sudoku, nós temos uma matriz 9×9 com algumas entradas preenchidas com números entre 1 e 9

7	5	9	2	4	3	1	6	8
3	2	8	9	1	6	4	5	7
1	4	6	8	5	7	9	2	3
9	7	2	6	8	1	3	4	5
4	8	5	7	3	9	6	1	2
6	1	3	4	2	5	7	8	9
8	9	7	5	6	4	2	3	1
2	6	1	3	9	8	5	7	4
5	3	4	1	7	2	8	9	6

Objetivo: completar a matriz com números entre 1 e 9 sem repetir números nas linhas, nas colunas e nas células

Sudoku - Resolução por Backtracking

Preenchemos o Sudoku gradualmente:

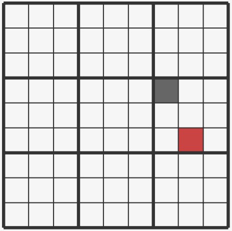
- até encontrar uma posição sem valor válido
- retrocedemos e continuamos a busca

			2	4	3	1		
		8			6		5	
	4							
			6					5
4	8		7	3	9	6	1	
			4					9
	9							
		1			8		7	
			1	7	2	8		

Sudoku — Código

```c
int pode_inserir(int m[9][9], int l, int c, int v) {
  int i, j, cel_l, cel_c;
  for (i = 0; i < 9; i++)
    if (m[l][i] == v) /* aparece na linha l? */
      return 0;
  for (i = 0; i < 9; i++)
    if (m[i][c] == v) /* aparece na coluna c? */
      return 0;

  cel_l = 3 * (l / 3);
  cel_c = 3 * (c / 3);
  for (i = cel_l; i < cel_l + 3; i++)
    for (j = cel_c; j < cel_c + 3; j++)
      if (m[i][j] == v) /* aparece na célula? */
        return 0;
  return 1;
}
```



Sudoku — Código

```
int sudoku(int m[9][9]) {
  int i, j, fixo[9][9];
  for (i = 0; i < 9; i++)
    for (j = 0; j < 9; j++)
      fixo[i][j] = m[i][j]; /* diferente de zero é verdadeiro */
  return sudokuR(m, fixo, 0, 0);
}

void proxima_posicao(int l, int c, int *nl, int *nc) {
  if (c < 8) {
    *nl = l;
    *nc = c+1;
  } else {
    *nl = l+1;
    *nc = 0;
  }
}
```

Sudoku — Código

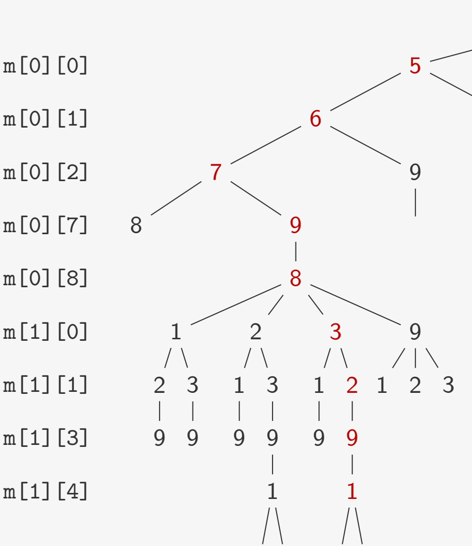
```
int sudokuR(int m[9][9], int fixo[9][9], int l, int c) {
  int v, nl, nc;
  if (l == 9) {
    imprimi_sudoku(m);
    return 1;
  }
  proxima_posicao(l, c, &nl, &nc);
  if (fixo[l][c])
    return sudokuR(m, fixo, nl, nc);
  for (v = 1; v <= 9; v++) {
    if (pode_inserir(m, l, c, v)) {
      m[l][c] = v;
      if(sudokuR(m, fixo, nl, nc))
        return 1;
    }
  }
  m[l][c] = 0;
  return 0;
}
```

Árvore de soluções parciais

Podemos representar a busca pela solução como uma árvore:

- Cada solução parcial é um nó da árvore
- Uma solução parcial B é filha de uma solução parcial A se pode ser podemos estender A em um passo para obter B
- Ex.: No Sudoku, se já preenchemos k entradas e podemos preencher a entrada $k+1$, então essa nova solução parcial é filha da anterior
- Se uma solução parcial não tem filhos, então
  - Ou é uma solução completa
  - Ou não tem como estender mais a solução

Sudoku — Árvore de soluções parciais



5	6	7	2	4	3	1	9	8
3	2	8	9	1	6		5	
	4							
			6					5
4	8		7	3	9	6	1	
			4					9
	9							
		1			8		7	
			1	7	2	8		

Árvore de soluções parciais

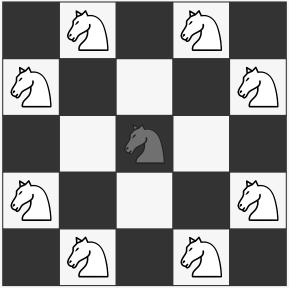
O Backtracking é uma busca em profundidade:

- Avançamos o máximo possível em uma única direção
- Se não encontramos a solução,
  - retrocedemos o mínimo possível e
  - pegamos um caminho que nunca usamos antes
  - novamente avançando o máximo possível
- O grafo existe implicitamente
  - Os vértices são as soluções parciais
  - Os arcos indicam se é possível estender uma solução para outra

Passeio do Cavalo no Tabuleiro de Xadrez

Movimento do cavalo no xadrez — formato de **L**:

- dois quadrados horizontalmente e um verticalmente, ou
- dois quadrados verticalmente e um horizontalmente

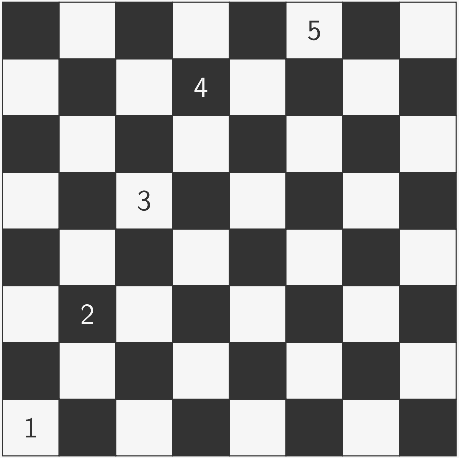


Dado um tabuleiro de xadrez $n \times n$ e uma posição (x, y) do tabuleiro queremos encontrar um passeio de um cavalo que visite cada casa exatamente uma vez

Simulação

Matriz `m` armazena os movimentos do cavalo

- `m[l][c]` $= 0$: posição (`l`, `c`) ainda não foi visitada
- `m[l][c]` $= i > 0$: posição (`l`, `c`) foi visitada no passo i



Passeio do Cavalo — Código

```c
int cavalo(int **m, int n, int x, int y) {
  int i, j;
  for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
      m[i][j] = 0;
  m[x][y] = 1;
  return cavaloR(m, n, x, y);
}

void proxima_posicao(int l, int c, int k, int *nl, int *nc) {
  static int movimentos[8][2] = {{2, 1}, {1, 2}, {-1, 2},
                                 {-2, 1}, {-2,-1}, {-1, -2},
                                 {1, -2}, {2, -1}};
  *nl = l + movimentos[k][0];
  *nc = c + movimentos[k][1];
}
```

Cavalo — Código

```
int cavaloR(int **m, int n, int l, int c) {
  int k, nl, nc;
  if (m[l][c] == n * n)
    return 1;
  for (k = 0; k < 8; k++) {
    proxima_posicao(l, c, k, &nl, &nc);
    if ((nl >= 0) && (nl < n) && (nc >= 0) && (nc < n)
        && (m[nl][nc] == 0)) {
      m[nl][nc] = m[l][c] + 1;
      if (cavaloR(m, n, nl, nc))
        return 1;
      m[nl][nc] = 0;
    }
  }
  return 0;
}
```

Eficiência do Backtracking

- Em geral, mais rápido que a Força Bruta pois eliminamos vários candidatos a solução de uma só vez
- Implementação simples, mas pode ser lento para problemas onde temos muitas soluções parciais possíveis

Como fazer um algoritmo de Backtracking rápido?

- Ter um algoritmo para decidir se uma solução parcial pode ser estendida para uma solução completa que seja
  - Bom: Evita explorar muitas soluções parciais
  - Rápido: Processa cada solução parcial rapidamente

Aplicações para Backtracking

Para aplicar Backtracking é necessário que o problema tenha um conceito de solução parcial

- Problemas de satisfação de restrições
  - Encontrar uma solução que satisfaça as restrições
  - Como o Sudoku, por exemplo

- Problemas de Otimização Combinatória
  - Conseguimos enumerar as soluções do problema
  - Queremos encontrar a de valor mínimo

- Programação Lógica (Prolog, por exemplo)
  - Prova automática de teoremas

Exercício

Crie um algoritmo que, dado n e C, imprime todas as sequências de números não-negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$$

a) Modifique o seu algoritmo para considerar apenas sequências sem repetições
b) Modifique o seu algoritmo para imprimir apenas sequências com $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

Exercício

Modifique o algoritmo que resolve o Sudoku para saber rapidamente se um valor já foi usado numa linha, coluna ou célula.
Dica: use matrizes auxiliares.