Computação e Teoria dos Jogos

Eduardo C. Xavier

Instituto de Computação/Unicamp

31 de outubro de 2008

Introdução

- Em sistemas distribuídos "grandes", como a Internet temos agentes egoístas disputando recursos entre si.
- A criação de um controle centralizado é inviável e talvez até não desejado.
- Teoria dos Jogos é ideal para modelar estas situações.
  - Disputa entre jogadores/agentes autônomos.

Introdução

- Em sistemas distribuídos "grandes", como a Internet temos agentes egoístas disputando recursos entre si.
- A criação de um controle centralizado é inviável e talvez até não desejado.
- Teoria dos Jogos é ideal para modelar estas situações.
    - Disputa entre jogadores/agentes autônomos.

Introdução

- Em sistemas distribuídos "grandes", como a Internet temos agentes egoístas disputando recursos entre si.
- A criação de um controle centralizado é inviável e talvez até não desejado.
- Teoria dos Jogos é ideal para modelar estas situações.
  - Disputa entre jogadores/agentes autônomos.

Introdução

Algumas perguntas a serem respondidas para um dado jogo.

- Dado que os jogadores possuem funções de benefício individuais, será que o jogo atinge um equilíbrio de Nash??

Definição (Equilíbrio de Nash)

Situação onde nenhum jogador aumenta seu benefício mudando de estado.

- Quanto tempo será necessário para alcançar tal equilíbrio??
- Qual o custo de uma solução alcançada em relação ao ótimo caso uma entidade central computasse a solução??

Introdução

Algumas perguntas a serem respondidas para um dado jogo.

- Dado que os jogadores possuem funções de benefício individuais, será que o jogo atinge um equilíbrio de Nash??

Definição (Equilíbrio de Nash)

Situação onde nenhum jogador aumenta seu benefício mudando de estado.

- Quanto tempo será necessário para alcançar tal equilíbrio??
- Qual o custo de uma solução alcançada em relação ao ótimo caso uma entidade central computasse a solução??

Introdução

Algumas perguntas a serem respondidas para um dado jogo.

- Dado que os jogadores possuem funções de benefício individuais, será que o jogo atinge um equilíbrio de Nash??

Definição (Equilíbrio de Nash)

Situação onde nenhum jogador aumenta seu benefício mudando de estado.

- Quanto tempo será necessário para alcançar tal equilíbrio??
- Qual o custo de uma solução alcançada em relação ao ótimo caso uma entidade central computasse a solução??

Introdução

Algumas perguntas a serem respondidas para um dado jogo.

- Dado que os jogadores possuem funções de benefício individuais, será que o jogo atinge um equilíbrio de Nash??

Definição (Equilíbrio de Nash)

Situação onde nenhum jogador aumenta seu benefício mudando de estado.

- Quanto tempo será necessário para alcançar tal equilíbrio??
- Qual o custo de uma solução alcançada em relação ao ótimo caso uma entidade central computasse a solução??

Introdução

- Os jogadores tentam minimizar uma função de custo individual.
- Não há interesse em minimizar uma função global (custo social).
- Um **equilíbrio** corresponde a uma situação onde nenhum dos jogadores pode diminuir sua função de custo individual.
- O **preço da anarquia** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Pior Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

- O **preço da estabilidade** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Melhor Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

Introdução

- Os jogadores tentam minimizar uma função de custo individual.
- Não há interesse em minimizar uma função global (custo social).
- Um **equilíbrio** corresponde a uma situação onde nenhum dos jogadores pode diminuir sua função de custo individual.
- O **preço da anarquia** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Pior Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

- O **preço da estabilidade** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Melhor Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

Introdução

- Os jogadores tentam minimizar uma função de custo individual.
- Não há interesse em minimizar uma função global (custo social).
- Um **equilíbrio** corresponde a uma situação onde nenhum dos jogadores pode diminuir sua função de custo individual.
- O **preço da anarquia** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Pior Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

- O **preço da estabilidade** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Melhor Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

Introdução

- Os jogadores tentam minimizar uma função de custo individual.
- Não há interesse em minimizar uma função global (custo social).
- Um **equilíbrio** corresponde a uma situação onde nenhum dos jogadores pode diminuir sua função de custo individual.
- O **preço da anarquia** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Pior Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

- O **preço da estabilidade** de um jogo é definido como:

$$\frac{\text{Custo Global da Melhor Solução em Equilíbrio}}{\text{Menor Custo Global}}$$

Multicast

Vamos considerar o seguinte jogo Multicast:

- Temos um grafo direcionado $G = (V, E)$ com custos $c_e \geq 0$ para cada aresta e.
- Há um vértice fonte (source) s, e k vértices receptores $t_1, \ldots, t_k$.
- Cada vértice receptor é um jogador e deseja achar rota mínima de comunicação com s.
- O custo de uma aresta utilizada pelos jogadores é dividido entre eles.

Multicast

- Para cada aresta $e \in E$ denotamos por x_e o número de caminhos utilizando esta aresta.
- O custo de um caminho P_i do jogador i é:

$$c(P_i) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{x_e}$$

- O conjunto de estratégias/escolhas de cada jogador i são todos os caminhos $s - t_i$.
- Um estado do jogo são k caminhos, um para cada jogador:

$$(P_1, P_2, \ldots, P_k)$$

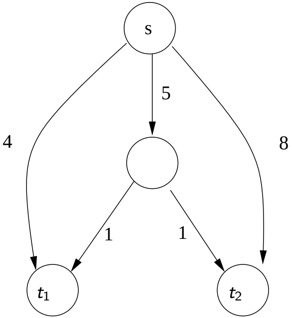
Multicast

- Em um estado do jogo com caminhos usados $(P_1, \ldots, P_k)$, denotamos por $E^+ \subseteq E$ as arestas usadas em pelo menos um caminho.
- O custo social é o custo dos caminhos escolhidos pelos jogadores:

$$c(P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} c(P_i) = \sum_{e \in E^+} c_e$$

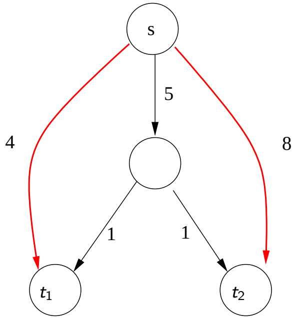
Exemplo

- Neste exemplo cada jogador possui duas alternativas, uma rota externa e uma interna.



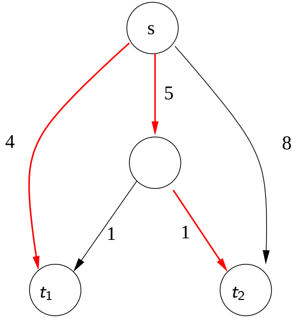
Exemplo

- Vamos supor que inicialmente os jogadores usam rotas externas.
- O jogador t_1 paga 4 e o jogador t_2 paga 8 com custo social igual a 12.



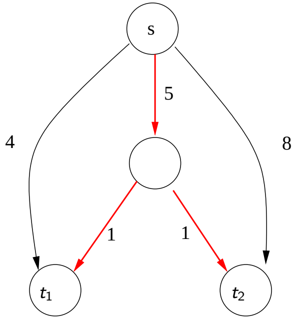
Exemplo

- O jogador t_2 muda para a rota interna e paga 6.
- O custo social cai para 10.



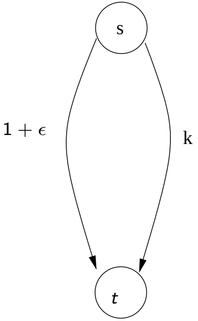
Exemplo

- Agora o jogador t_1 possui benefício em mudar.
- Cada jogador irá pagar $2.5 + 1$, e estamos em um equilíbrio.
- O custo social desta solução é 7 (esta solução também é ótima).



Exemplo 2

- Considere agora a rede abaixo e suponha que todos k jogadores usem a aresta da direita.
- Estamos em um equilíbrio com custo k (cada jogador paga 1).
- O ótimo social tem custo $(1 + \epsilon)$ (cada jogador paga $(1 + \epsilon)/k$).



k Jogadores

Existência do Equilíbrio

Teorema

O jogo Multicast jogado com a dinâmica de melhor resposta atinge um equilíbrio de Nash.

Existência do Equilíbrio

Teorema

O preço da estabilidade do jogo Multicast é $H(k)$, ou seja um equilíbrio ótimo é no máximo $H(k)$ vezes maior do que o custo do ótimo social.

Existência do Equilíbrio

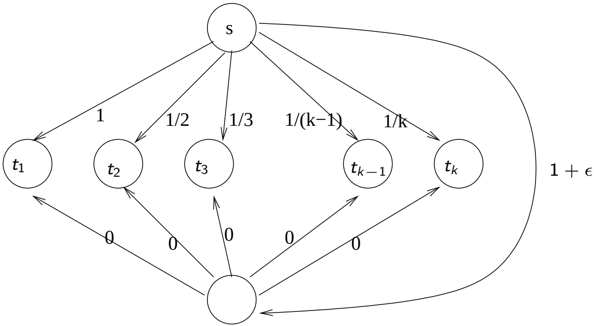
- Poderíamos nos perguntar se este preço da estabilidade não é um limitante superior muito alto.
- Na realidade tal limitante é justo, ou seja, há instâncias para as quais a razão entre o equilíbrio de Nash e o ótimo social é $H(k)$

Lema

O preço da estabilidade $H(k)$ é justo para o jogo Multicast.

Existência do Equilíbrio

Para mostrar o resultado do último lema considere a instância abaixo onde o único equilíbrio possui custo $H(k)$ vezes maior que o ótimo social:



Observações

- Não falamos nada sobre o tempo de convergência do jogo. Este tempo pode ser alto (exponencial)!
- Note também que não sabemos como encontrar a solução social ótima do problema em tempo polinomial:
  - Isto seria o equivalente a encontrar uma árvore de Steiner mínima enraizada em s mais os terminais $t_1, \ldots, t_k$.

Observações

- Não falamos nada sobre o tempo de convergência do jogo. Este tempo pode ser alto (exponencial)!
- Note também que não sabemos como encontrar a solução social ótima do problema em tempo polinomial:
  - Isto seria o equivalente a encontrar uma árvore de Steiner mínima enraizada em s mais os terminais $t_1, \ldots, t_k$.

Observações

- Não falamos nada sobre o tempo de convergência do jogo. Este tempo pode ser alto (exponencial)!
- Note também que não sabemos como encontrar a solução social ótima do problema em tempo polinomial:
  - Isto seria o equivalente a encontrar uma árvore de Steiner mínima enraizada em s mais os terminais $t_1, \ldots, t_k$.

Roteamento

- Vamos considerar que jogadores estabeleçam rotas de comunicação de forma egoísta.
- Vamos analisar o preço da anarquia neste jogo.
- É importante para termos uma análise teórica de quão ruim é um roteamento distribuído.

Roteamento Não-atômico

- Consideramos uma rede representada por um grafo direcionado $G = (V, E)$.
- Para cada aresta $e \in E$ há uma função de custo $c_e(x)$ onde x é o total de fluxo passando pela aresta.
- Existem k pares fontes-destino $(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)$ com necessidade de fluxo total $r_1, \ldots, r_k$.
- Chamamos um par (s_i, t_i) de **commoditie** que representa um agente enviando fluxo num total de r_i.
- Denotamos por $\mathcal{P}_i$ o conjunto de caminhos $s_i - t_i$ e $\mathcal{P} = \cup_i \mathcal{P}_i$.

Roteamento Não-atômico

- As rotas com tráfego usado para cada aresta é dado por um fluxo f.
- Para um fluxo f e um caminho $P \in \mathcal{P}_i$ denotamos por f_P o total de tráfego da commoditie i passando por P.
- Um fluxo f é **viável** se $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i$.
- Não é imposto capacidades nas arestas mas estas possuem uma função custo, não-negativa, contínua e crescente

$$c_e : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

- Um jogo será denotado simplesmente por (G, r, c).

Roteamento Não-atômico

- O custo de um caminho P é $c_P(f) = \sum_{e \in P} c_e(f_e)$ onde $f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P$. Note que f_e denota o total de tráfego passando por e.
- Cada jogador tenta minimizar o custo dos caminhos escolhidos.

Definição (Equilíbrio)

Um fluxo f viável para um jogo (G, r, c) está em equilíbrio se para toda commoditie i e pares de caminhos $P, P' \in \mathcal{P}_i$ de $s_i - t_i$ com $f_P > 0$ temos

$$c_P(f) \leq c_{P'}(f).$$

Ou seja os jogadores não têm benefício ao utilizar outras rotas.

Roteamento Não-atômico

Definição (Custo de uma solução)

O custo de um fluxo f é

$$c(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P(f) f_P$$

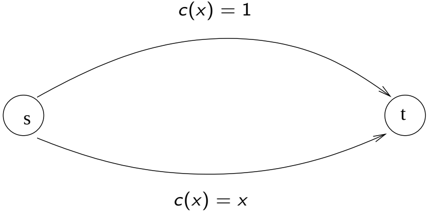
- Se expandirmos $c_P(f)$ como $\sum_{e \in P} c_e(f_e)$ obtemos

$$c(f) = \sum_{e \in E} c_e(f_e) f_e$$

- Um fluxo é ótimo (social) se é aquele que minimiza o custo sobre todos fluxos viáveis.

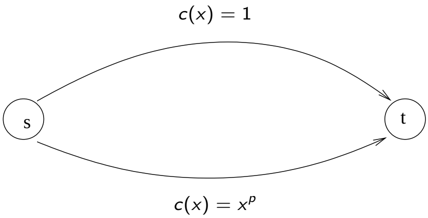
Exemplo: Pigou

- O roteamento ótimo roteia $1/2$ em cada aresta com custo $3/4$
- O fluxo em equilíbrio roteia tudo (fluxo 1) pela segunda aresta com custo total 1.



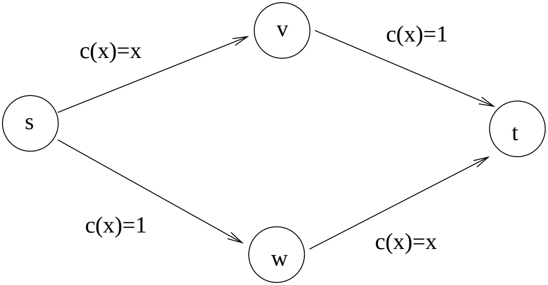
Exemplo: Pigou

- O roteamento ótimo roteia $1-\epsilon$ na aresta de baixo e ϵ na aresta de cima.
- O fluxo em equilíbrio roteia tudo (fluxo total 1) pela segunda aresta com custo total 1.
- Mas temos que o custo da solução ótima com $p \to \infty$ tende a 0 enquanto o equilíbrio permanece em 1.



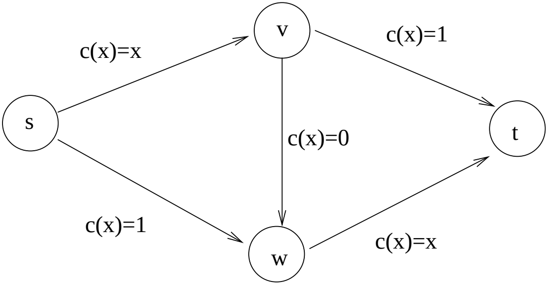
Exemplo: Braess

- O equilíbrio e a solução ótima ocorre quando 1/2 de fluxo vai por cada caminho.
- O custo da solução é 3/2.



Exemplo: Braess

- Agora o caminho (s, v, w, t) possui sempre custo menor que qualquer dos outros 2 caminhos.
- O custo da solução é 2 e o preço da anarquia é $4/3$.



Roteamento Não-Atômico

- Veremos agora resultados sobre existência do equilíbrio, e qualidade do equilíbrio para roteamentos não-atômicos.

Teorema (Existência e Unicidade)

Seja (G, r, c) uma instância para o jogo de roteamento não-atômico.

- *Esta instância admite pelo menos um equilíbrio.*
- *Se f e f' são equilíbrios para (G, r, c) então $c_e(f_e) = c_e(f'_e)$ para toda aresta e.*

- Note que neste jogo o preço da anarquia e o preço da estabilidade são iguais.

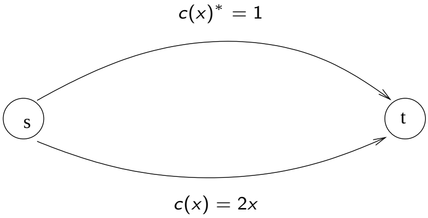
Roteamento Não-Atômico

Teorema (Equivalência de Equilíbrio e Fluxo Ótimo)

Seja (G, r, c) uma instância tal que para toda aresta e a função $x \cdot c_e(x)$ é convexa, diferenciável e seja $c_e^* = (x \cdot c_e(x))'$. Então f^* é um fluxo ótimo para (G, r, c) se e somente se f^* é um equilíbrio para (G, r, c^*).

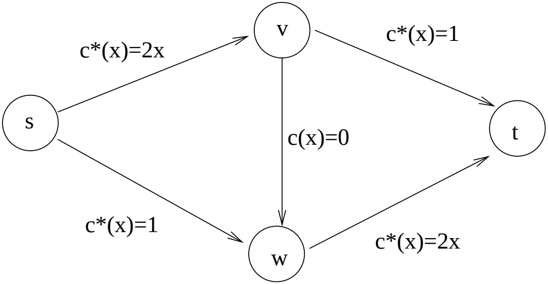
Exemplo: Pigou

- O grafo considerando custos c^* está abaixo.
- O fluxo em equilíbrio roteia $1/2$ por cada aresta.



Exemplo: Braess

- Neste caso o fluxo em equilíbrio roteia 1/2 em cada um dos caminhos (s, v, t) e (s, w, t) com custo 2 cada.
- Esta também é a solução ótima considerando os custos originais c_e como vimos anteriormente.



Roteamento Não-Atômico

Teorema

Seja (G, r, c) *uma instância do jogo de roteamento, e seja*

$$h_e(f_e) = \int_0^{f_e} c_e(x)\mathrm{d}x.$$

Então f^* *é um fluxo ótimo para* (G, r, h) *se e somente se* f^* *é um equilíbrio para* (G, r, c).

- Com isso mostramos que o jogo possui um equilíbrio pois (G, r, h) pode ser otimizada.

Roteamento Não-Atômico: Preço da Anarquia

- Vamos agora nos voltar para o preço da anarquia do jogo roteamento não-atômico.
- Vamos ver que o preço da anarquia depende somente das características de custos das funções e em nada mais (tamanho da rede, número de commodities etc).

Roteamento Não-Atômico: Preço da Anarquia

Teorema

Seja (G, r, c) uma instância do jogo, e suponha que $xc_e(x) \leq \gamma \int_0^x c_e(y)dy$ para toda aresta e e $x \geq 0$. Então o preço da anarquia de (G, r, c) é no máximo γ.

- Se $c_e(x) = x^p$ por exemplo, temos que

$$xc_e(x) \leq (p+1) \int_0^x c_e(y)dy = (p+1)\frac{x^{p+1}}{p+1}$$

e portanto o preço da anarquia é limitado por $p + 1$.

Diminuindo Preço da Anarquia

- Veremos agora maneiras de diminuir o preço da anarquia do jogo no caso **não-atômico**.
- A primeira maneira consiste simplesmente em aplicar uma taxa extra sobre o fluxo em cada aresta, além do custo $c_e(x)$.
- A segunda maneira mostra que com aumentar a capacidade da rede é melhor do que tentar estabelecer um algoritmo centralizado.

Diminuindo Preço da Anarquia: Custo Marginal

- Em economia a derivada é conhecida como custo marginal:

$$c(x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x + \Delta x) - c(x)}{\Delta x}$$

  pois representa aproximadamente, para valores grandes, a variação de custo por unidade a mais produzida.
- No jogo de roteamento cada aresta terá custo $c_e + t_e$ onde t_e representa uma taxa extra.
- Fazendo $t_e = f_e \cdot c_e'(f_e)$ temos que $c_e'(f_e)$ representa o custo marginal da aresta, e f_e representa o total de fluxo que irá "sofrer" o aumento de custo.

Diminuindo Preço da Anarquia: Custo Marginal

Teorema

Seja (G, r, c) uma instância do jogo não-atômico tal que para toda aresta e, a função $xc_e(x)$ é convexa, e diferenciável. Seja $t_e = f_e^* \cdot c_e'(f_e^*)$. O fluxo f^* é ótimo para (G, r, c) se e somente se é um equilíbrio para $(G, r, c + t)$.

Note que conseguimos reduzir o preço da anarquia para 1 sobretaxando os custos!

Diminuindo Preço da Anarquia: Aumento de Capacidade

Teorema

Seja (G, r, c) uma instância do jogo não-atômico e seja $\hat{c}_e(x) = c_e(x/2)/2$. Seja $\hat{f}$ um equilíbrio para $(G, r, \hat{c})$ com custo $\hat{C}(\hat{f})$ e f^* um fluxo ótimo para (G, r, c) com custo $C(f^*)$. Então $\hat{C}(\hat{f}) \leq C(f^*)$.

- Este resultado nos diz que se aumentarmos a capacidade da rede tal que o custo de congestionamento caia pela metade, isto é melhor do que tentar achar um fluxo ótimo para a rede sem mudanças na capacidade!

Referências

- Algorithmic Game Theory. Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos e Vijay Vazirani.