



IC-UNICAMP

MC 602

Circuitos Lógicos e Organização de Computadores

IC/Unicamp

Prof Mario Côrtes

Capítulo 4

Síntese e minimização de circuitos combinacionais

Tópicos

- Mapas de Karnaugh
- Minimização
 - terminologia e procedimento
 - SOP e POS
- Funções incompletamente especificadas
- Circuitos multi-saída
- Circuitos multi-nível
- Método tabular
- Técnica de minimização por cubos lógicos



Síntese manual de um circuito (sec 2.6)

Row number	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$f = \Sigma m(0, 2, 4, 5, 6)$$



Minimização algébrica

$$f = \Sigma m(0, 2, 4, 5, 6)$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$$

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3$$

$$f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3$$

$$f = \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2$$

$$m_0 \text{ e } m_2 = \bar{x}_1\bar{x}_3$$

$$m_4 \text{ e } m_6 = x_1\bar{x}_3$$

$$(m_0, m_4, m_6) = \bar{x}_3$$

$$m_4 \text{ e } m_5 = x_1\bar{x}_2$$

OBS: notem que m_4 foi “duplicado” ($m_4 + m_4 = m_4$)

e que m_4 foi combinado duas vezes: com m_5 e com m_6

Simplificações típicas

- Na manipulação algébrica, usamos sucessivas vezes
 - dois termos que diferiam de apenas um literal eram combinados para gerar um termo com um literal a menos
- Mapa de Karnaugh:
 - rearranjo da tabela verdade para facilitar a identificação de termos “vizinhos”
- Função com n variáveis
 - Tabela verdade $\rightarrow 2^n$ linhas
 - Mapa de Karnaugh $\rightarrow 2^n$ células

Mapa de Karnaugh de 2 variáveis

$$(m_0, m_2) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2, x_1 \bar{x}_2)$$

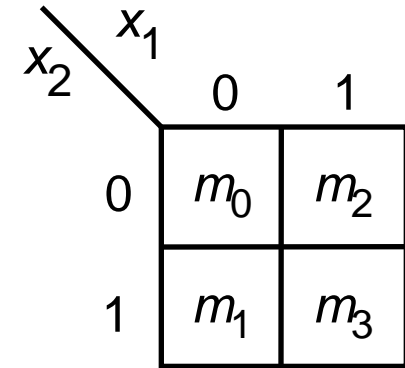
$$(m_1, m_3) = (\bar{x}_1 x_2, x_1 x_2)$$

$$(m_0, m_1) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 x_2)$$

$$(m_2, m_3) = (x_1 \bar{x}_2, x_1 x_2)$$

x_1	x_2	
0	0	m_0
0	1	m_1
1	0	m_2
1	1	m_3

(a) Tabela verdade



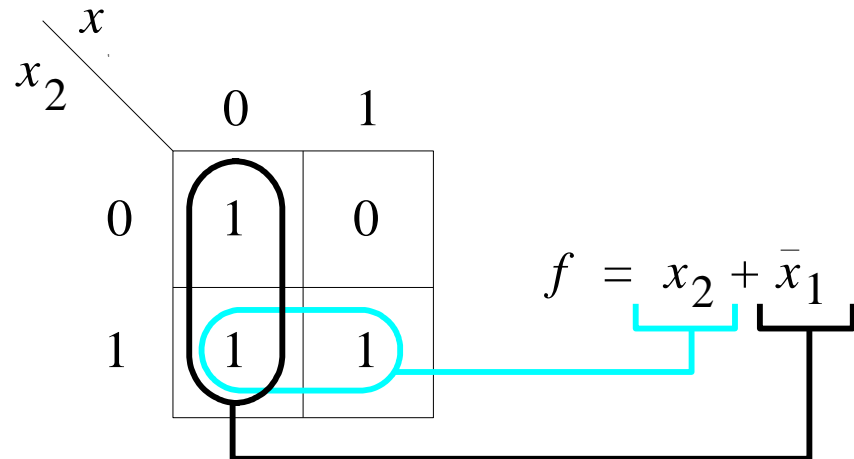
(b) Mapa de Karnaugh

- Mintermos vizinhos no Mapa de Karnaugh (horizontal e vertical) diferem de apenas um literal

Uma função simples (fig 2.15)

$$f = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



- Possibilidades para cobrir todos os mintermos

$$x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \quad \bar{x}_1 + x_1 \cdot x_2 \quad \bar{x}_1 + x_2$$

- Qual tem o menor custo?

$$\text{custo} = n^\circ \text{ total de gates} + n^\circ \text{ total de entradas}$$

Mapa de Karnaugh de 3 variáveis

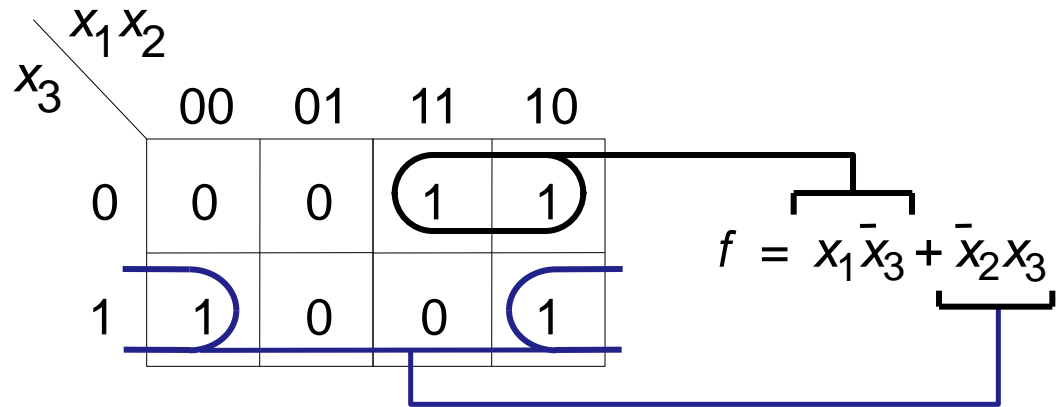
x_1	x_2	x_3	
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0	m_0	m_2	m_6	m_4
	1	m_1	m_3	m_7	m_5

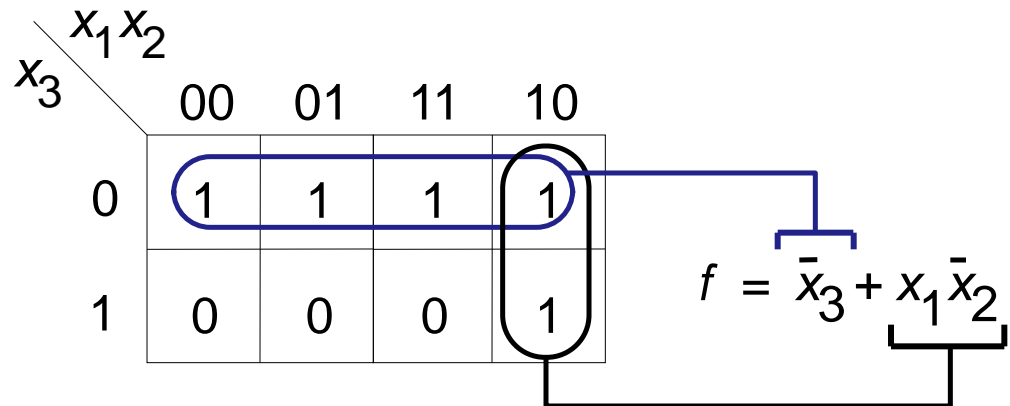
- Mintermos vizinhos no Mapa de Karnaugh (horizontal e vertical) diferem de apenas um literal
- Observar que também são vizinhos (m_0, m_4) e (m_1, m_5)

Exemplos de funções de 3 variáveis

Função da Fig. 2.18



Função da Fig. 4.1



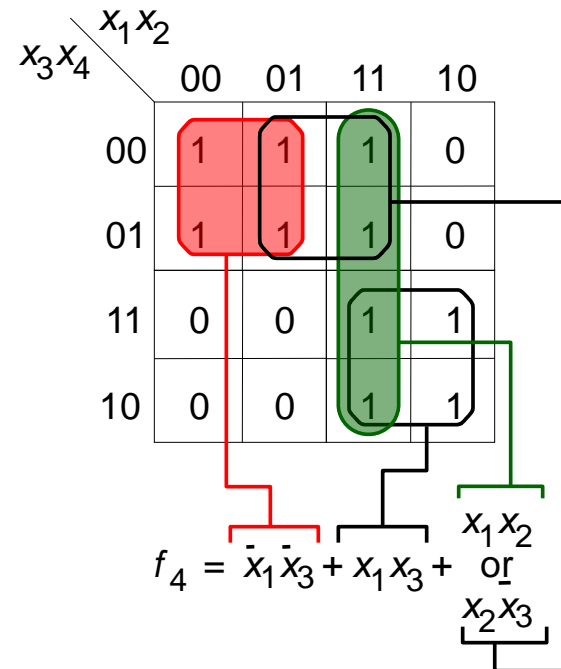
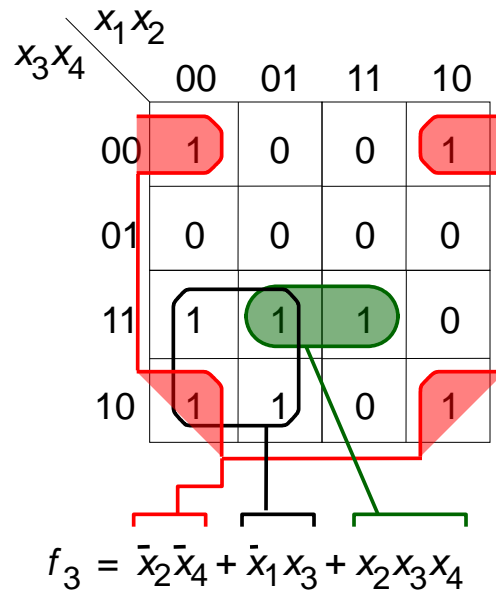
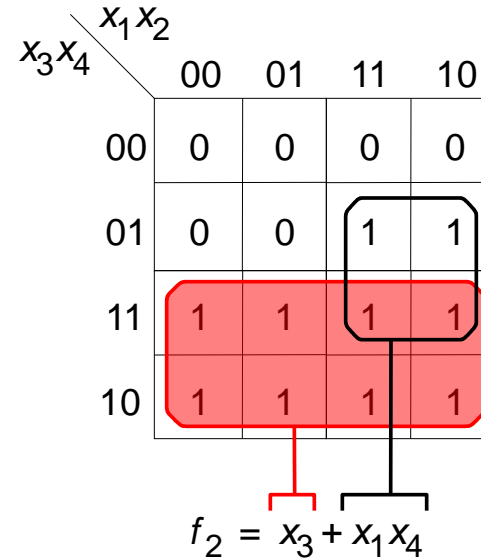
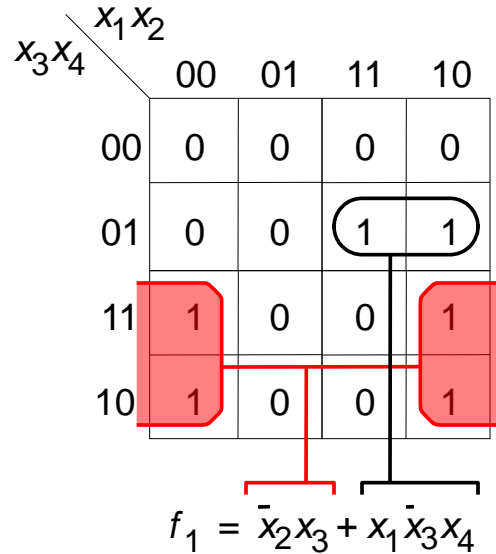
Mapa de Karnaugh de 4 variáveis

- Mintermos vizinhos no Mapa de Karnaugh (horizontal e vertical) diferem de apenas um literal
- Observar que também são vizinhos os mintermos das colunas (00,10) e das linhas (00,10)

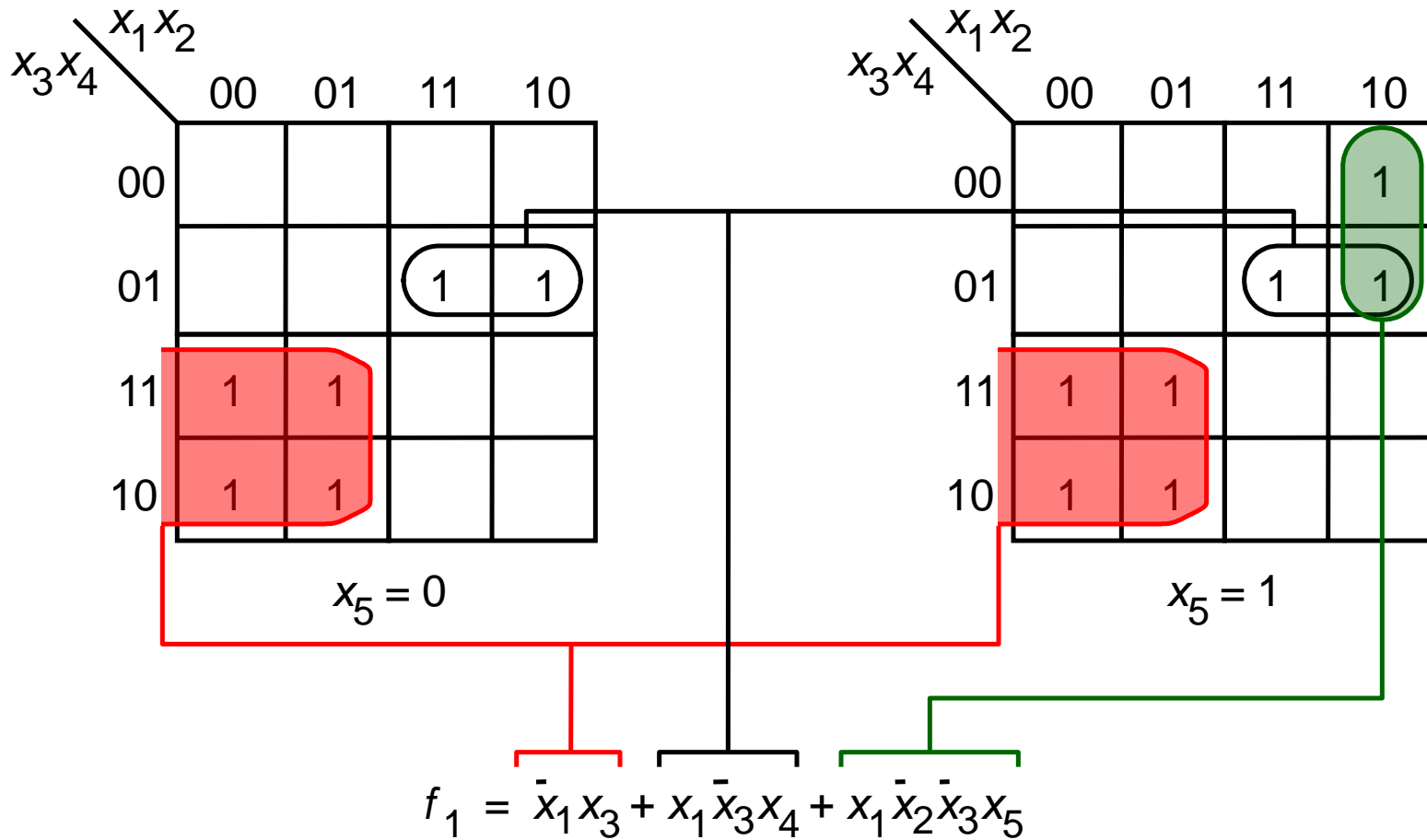
		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
$x_3 x_4$	00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
	01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
	11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
	10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

Diagram illustrating the 4-variable Karnaugh map with variables x_1, x_2, x_3, x_4 . The map is a 4x4 grid of minterms m_0 through m_{15} . The columns are labeled $x_1 x_2$ (00, 01, 11, 10) and the rows are labeled $x_3 x_4$ (00, 01, 11, 10). Blue brackets indicate the adjacency of minterms along the x_1 axis (top), x_2 axis (bottom), x_3 axis (left), and x_4 axis (right).

Exemplos de M.K. de 4 variáveis



Mapa de Karnaugh de 5 variáveis



Mapas de Karnaugh: observações

- E para 6 variáveis? (tentar)
- E para 7? Ou mais?

- Exercício: calcular o número possível de funções lógicas de n variáveis e uma saída
 - dica: raciocinar com a tabela verdade ou o Mapa de Karnaugh

Estratégia para minimização

- Exemplos vistos de Mapas de Karnaugh:
 - minimização feita intuitivamente, por tentativa e erro
 - buscar maiores grupos de mintermos vizinhos que pudessem cobrir todos os 1s
- Veremos agora uma estratégia estruturada
 - terminologia

Terminologia para $f(x_1 \dots x_n)$

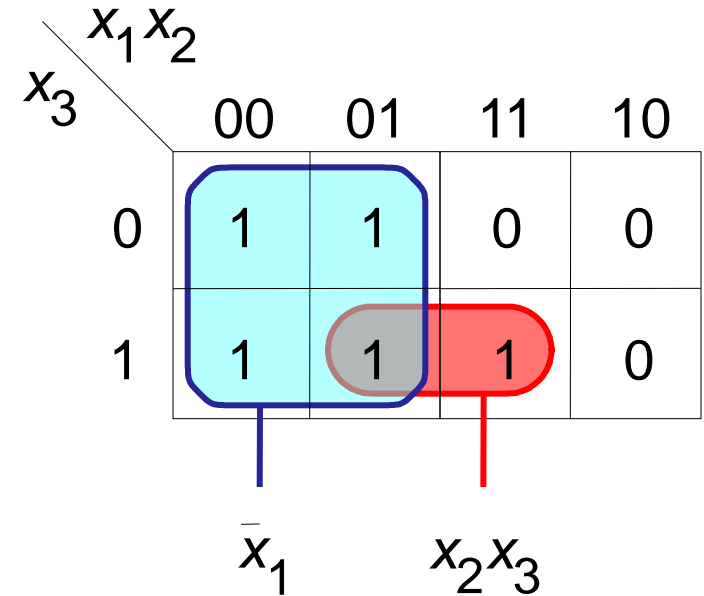
- **Mintermo**: produto que contém todas as variáveis (complementadas ou não) → já visto
- **Literal**: cada ocorrência de uma variável de entrada em um produto, complementada ou não
 - um mintermo de uma função de n variáveis tem n literais
 - $x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5$ tem 3 literais e $x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_6 \bar{x}_8 \bar{x}_9$ tem 6 literais

Terminologia para $f(x_1 \dots x_n)$ cont.

- **Implicante**: produto de qualquer número de variáveis para o qual $f=1$
 - o implicante mais básico é o mintermo, que tem n literais e é representado por 1 célula no M.K.
 - um implicante de $(n-1)$ literais \rightarrow 2 células vizinhas no M.K.
 - implicante de $(n-2)$ literais \rightarrow 4 células vizinhas
 - $(n-k)$ literais $\rightarrow 2^k$ células vizinhas
 - implicante de 1 literal $\rightarrow 2^{(n-1)}$ = metade do M.K.
 - implicante de 0 literais ($f=1$ ou $f=0$) \rightarrow M.K. inteiro

Implicantes em $f = \Sigma m(0, 1, 2, 3, 7)$

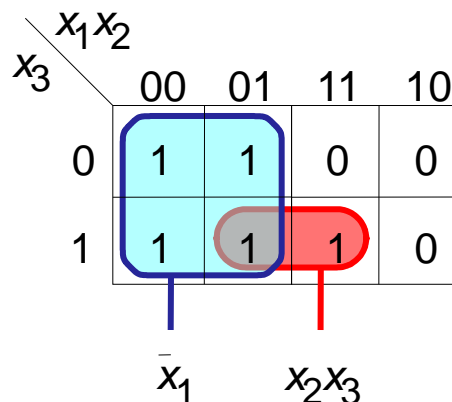
- Há 11 implicantes
 - De 1 célula \rightarrow mintermos = 5
 - De 2 células \rightarrow pares vizinhos de mintermos = 5
 - De 4 células \rightarrow “quadrados” de mintermos = 1



Implicantes principais

- Implicante que
 - não pode ser combinado com outro implicante, ou
 - não está contido em outro implicante com menos literais, ou
 - não pode ter qualquer de seus literais removido e manter-se como implicante principal

- Na figura, temos dois implicantes principais: \bar{x}_1 e x_2x_3



Cobertura (*cover*)

- Cobertura = coleção de implicantes que contém todas as células iguais a um no mapa de Karnaugh

- a coleção de todos os implicantes principais é uma cobertura

- Algumas coberturas para o exemplo:

- todos os mintermos:

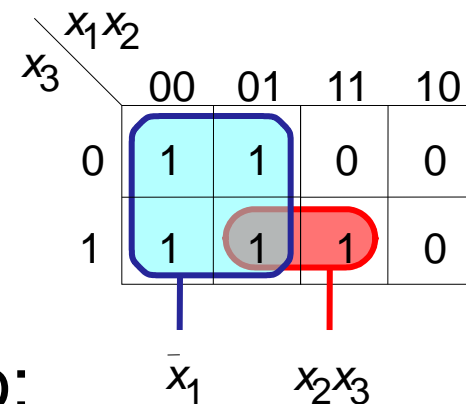
$$f = \sum m(0, 1, 2, 3, 7)$$

- alguns implicantes:

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2 + x_2x_3$$

- implicantes principais:

$$f = \bar{x}_1 + x_2x_3$$

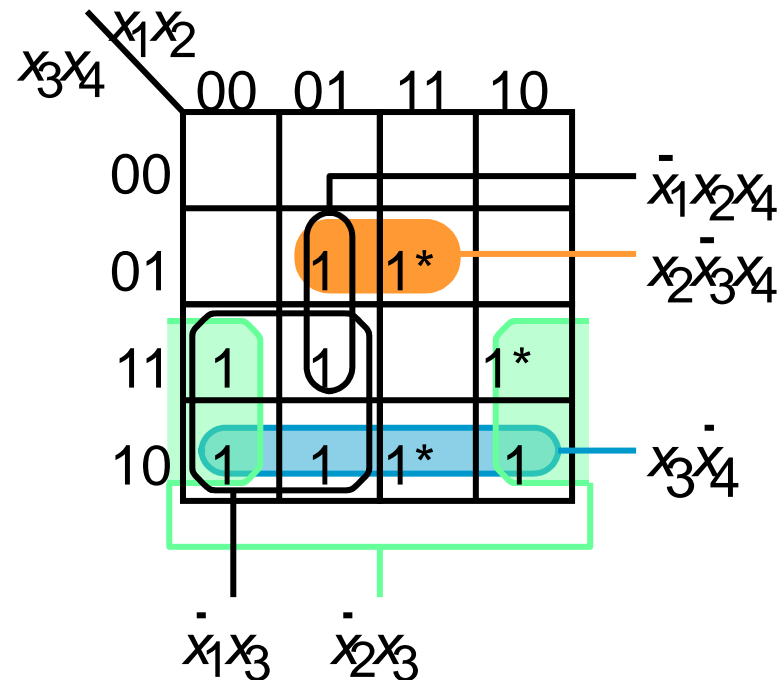


Custo da implementação

- No livro texto, custo = n^0 de gates + n^0 de entradas
- Mas, será assumido que os complementos das entradas primárias também estão disponíveis \rightarrow não considerar inversores nas entradas
- custo para $f = x_1\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_4$
 - 2 (AND)+1(OR)+4(entr. AND)+2(entr. OR)=9
- custo para $f = \overline{(x_1\bar{x}_2+x_3)}(\bar{x}_4+x_5)$
 - 2 (AND)+2(OR)+1(NOT)+9(entradas)=14

Implicante principal essencial

- Implicante principal é essencial se for o único a cobrir algum mintermo
- Exemplo: $f = \Sigma m(2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14)$
 - 5 implicantes principais
 - somente 3 são essenciais*
 - $\bar{x}_2 x_3$ devido a m11
 - $x_3 \bar{x}_4$ devido a m14
 - $x_2 \bar{x}_3 x_4$ devido a m13
 - faltou somente cobrir m7, e há 2 impl princ \rightarrow escolher menor custo
 - $f = \bar{x}_2 x_3 + x_3 \bar{x}_4 + x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_3$

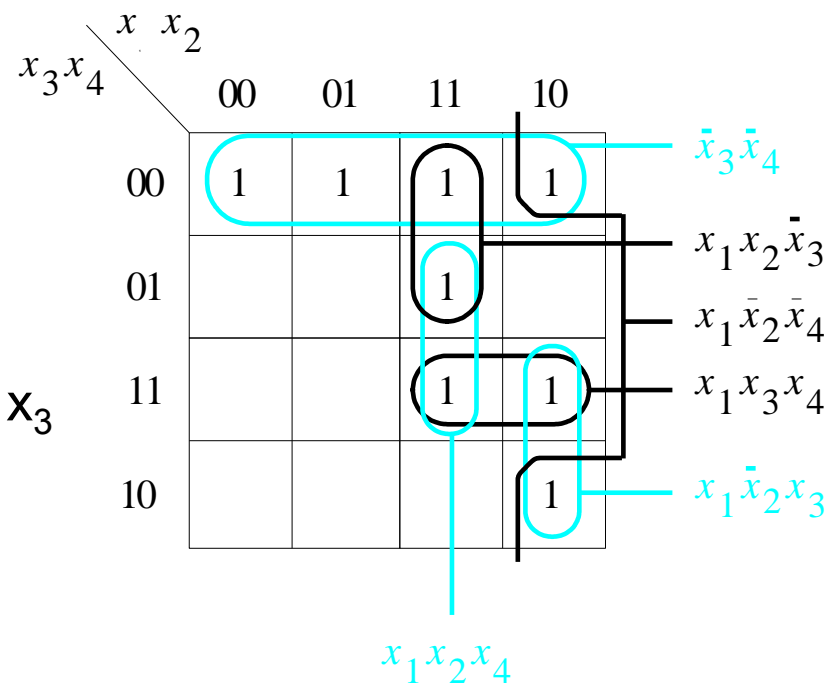


Procedimento de minimização

- Procedimento
 1. identificar todos os implicantes principais
 2. identificar quais são essenciais
 3. selecionar outros implicantes principais de modo a completar a cobertura, com custo mínimo

Exemplo de aplicação

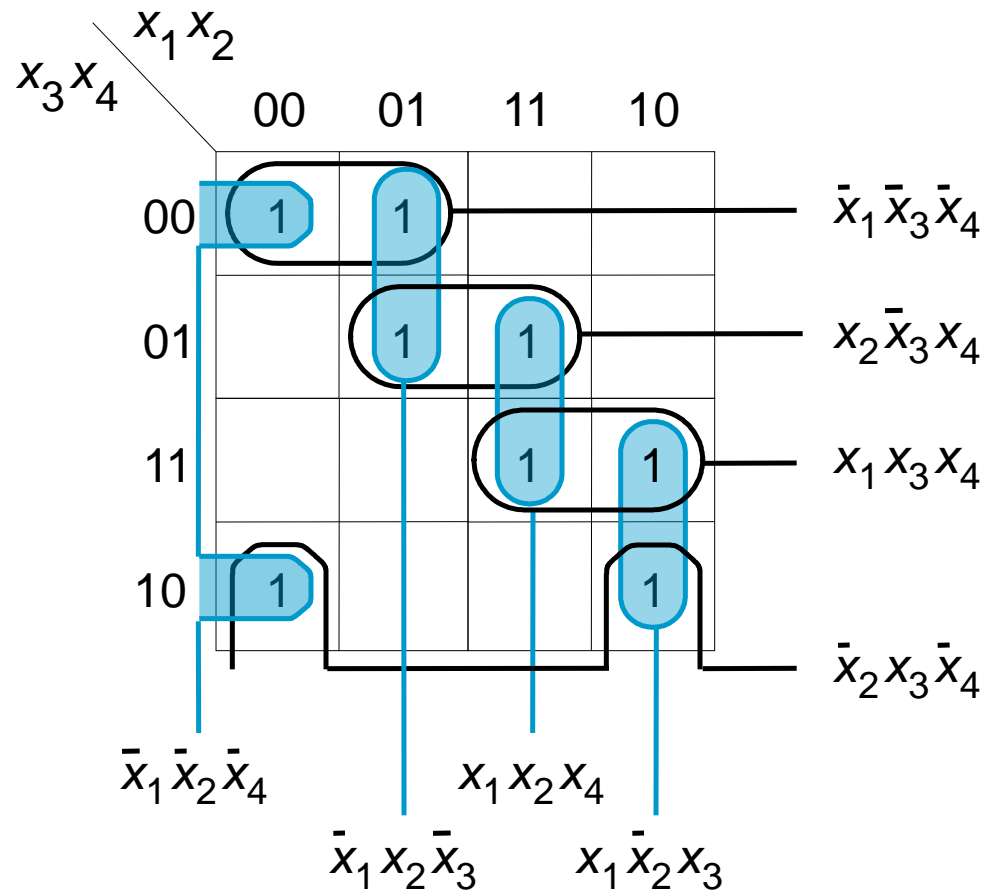
- $f = \Sigma m(0, 4, 8, 10, 11, 12, 13, 15)$
- Há 6 impl. principais
- Só um essencial: $\bar{x}_3 \bar{x}_4$
- Considerar $x_1 x_2 \bar{x}_3$
 - alt 1: incluí-lo
 - para cobrir m10, m11, m15
 - usar $x_1 x_3 x_4$ e $x_1 \bar{x}_2 x_3$
 - $f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3$
 - alt 2: não incluí-lo
 - $x_1 x_2 x_4$ se torna essencial para cobrir m13
 - $f = \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3$
 - MENOR CUSTO




Exemplo sem implicantes essenciais

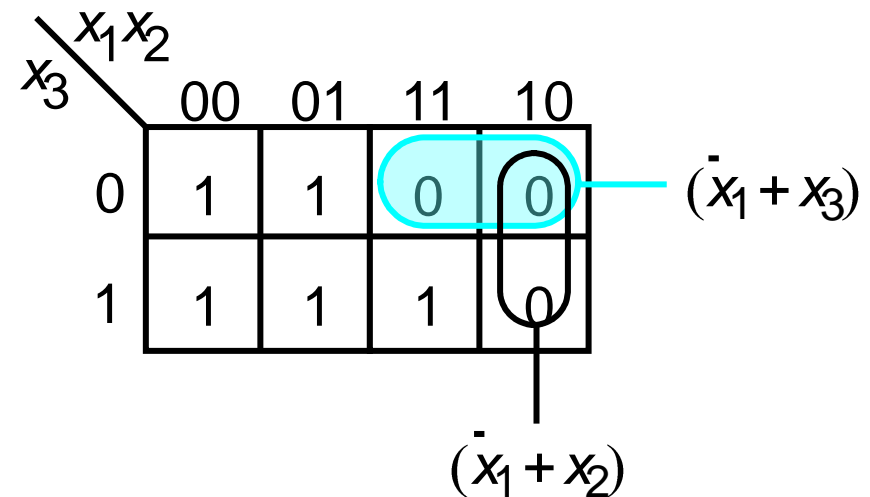
- $f = \Sigma m(0, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 15)$

- Neste caso, escolher um implicante para considerar dentro ou fora
- No exemplo, duas soluções de mesmo custo
 - implicantes “horizontais”
 - implicantes “verticais”




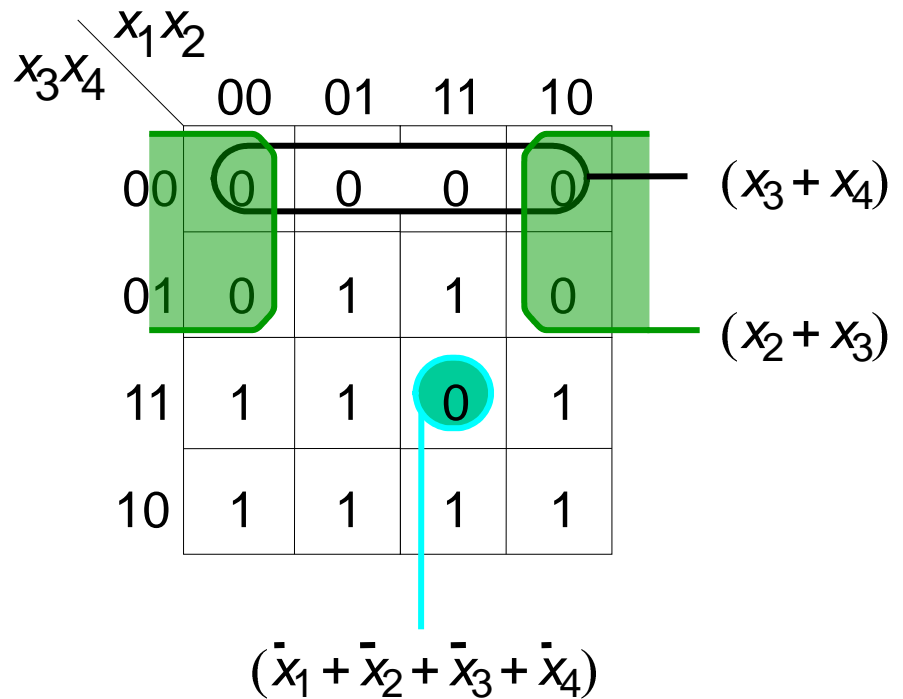
Minimização de POS

- Procedimento dual
- $f = \Pi M(4, 5, 6)$ (ver slide 17 )
- $f = (\bar{x}_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_3)$
- custo ficou maior que o SOP



Outro exemplo POS

- $f = \Pi M(0, 1, 4, 8, 9, 12, 15)$
- $f = (x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)$
- custo = 15
- comparar com SOP
slide 21 
- custo SOP = 18

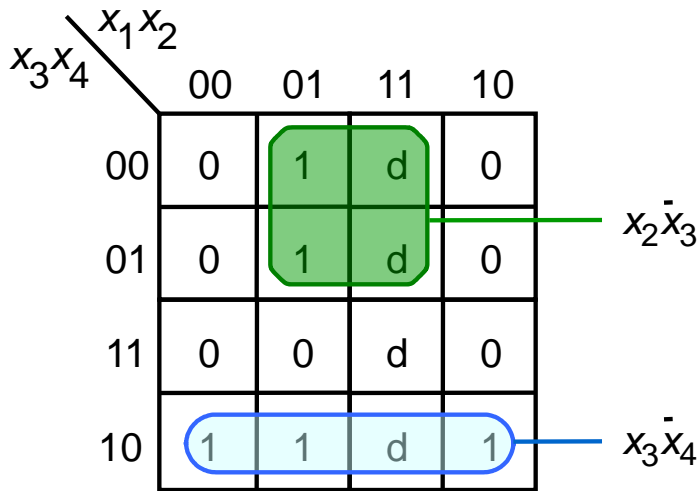


Funções especificadas incompletamente

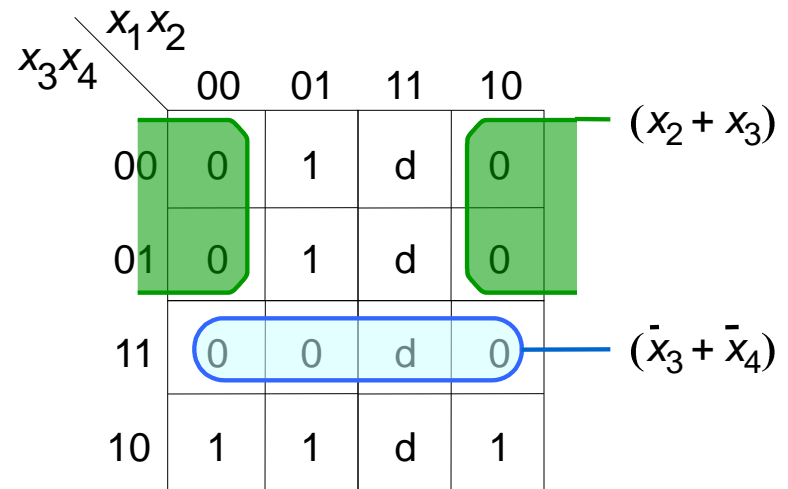
- Às vezes certas combinações de entrada nunca acontecem
 - ex, se x_1 controla uma escolha do modo de operação em um sistema e x_2 outra escolha, então x_1 e $x_2 = 1$ nunca podem acontecer
 - entradas possíveis: $x_1x_2 = (00,01,10)$
 - entrada impossível: $x_1x_2=(11)$
- As células do Mapa de Karnaugh impossíveis de acontecer são “don’t care”, representadas por “d”
- Exemplo de representação
 $f = \Sigma m(2, 4, 5, 6, 10) + D(12, 13, 14, 15)$

$$f = \sum m(2, 4, 5, 6, 10) + D(12, 13, 14, 15)$$

- Incluir “d” nos implicantes principais, quando oportuno para minimização



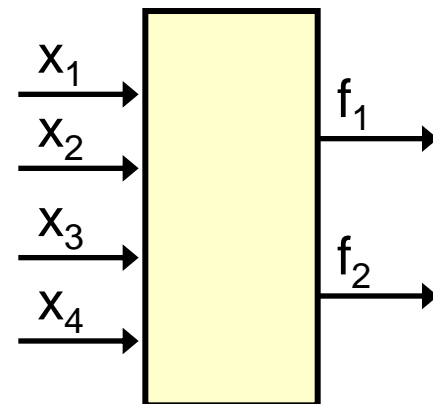
(a) SOP implementation



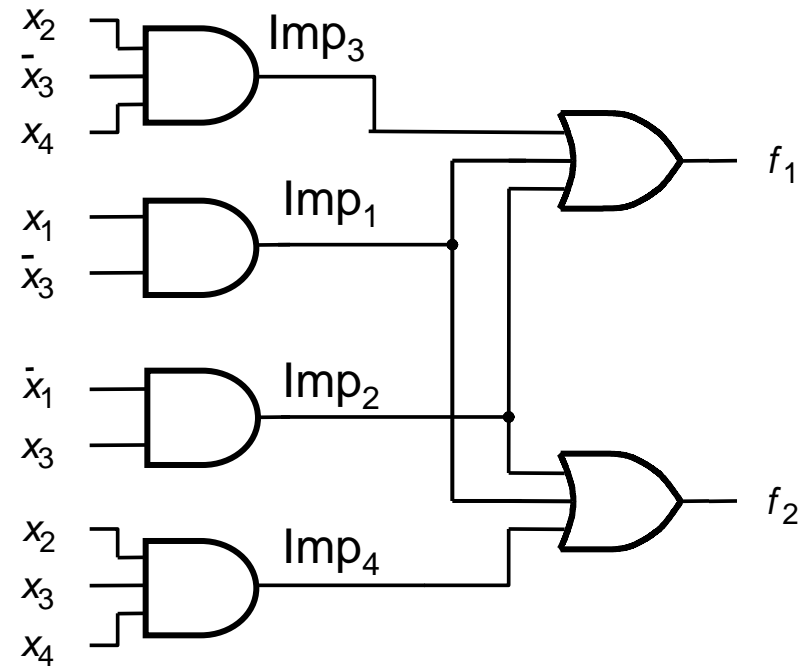
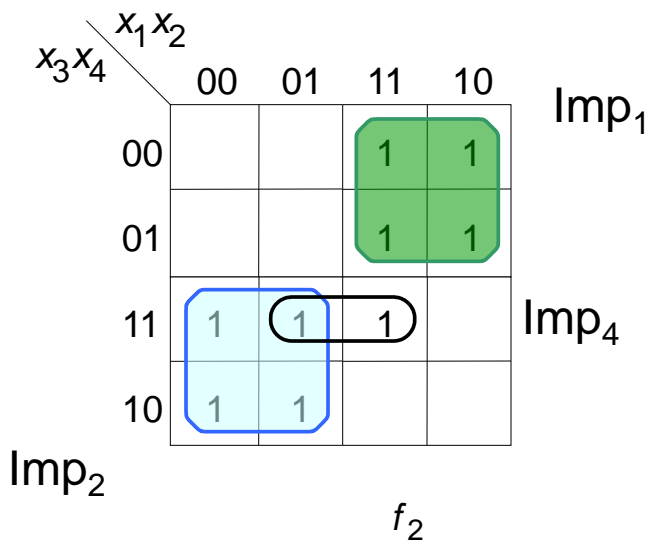
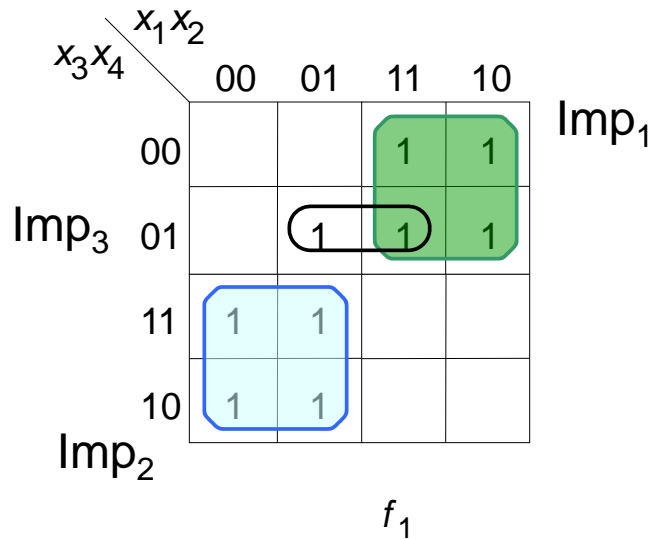
(b) POS implementation

Circuitos com múltiplas saídas

- Implementação convencional:
 - mínimo para f_1 e mínimo para f_2
 - implementados separadamente
- Implementação resultante pode não ser mínima
- Procedimento para obter mínimo
 - tentar compartilhar implicantes principais entre f_1 e f_2
- Compartilhamento pode ser natural ou forçado (exemplos a seguir)

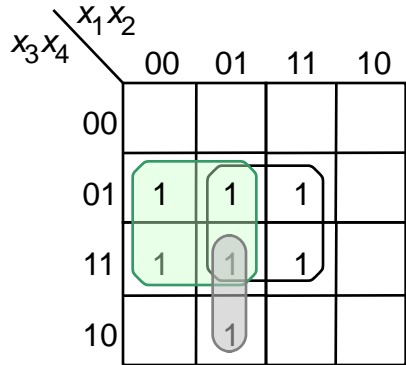


Ex1: circuito de 2 saídas

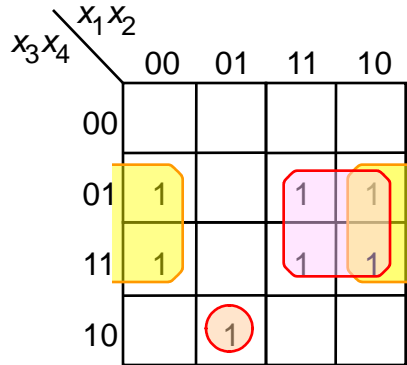


Circuito resultante para f_1 e f_2

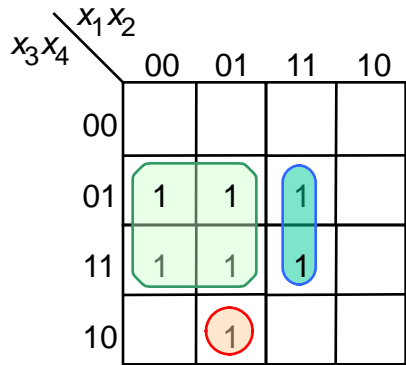
Ex1: circuito de 2 saídas



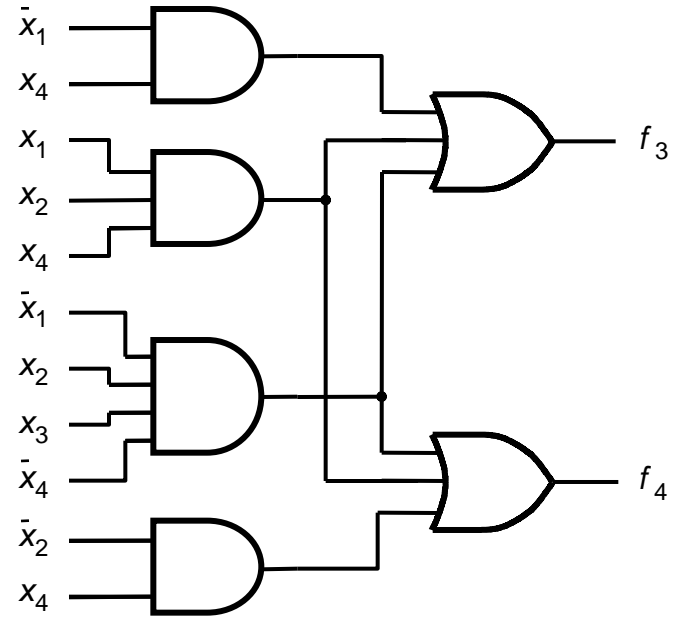
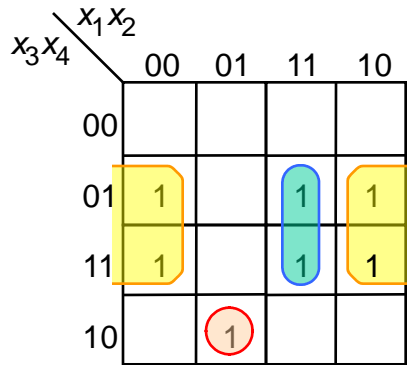
Minimização de f_3



Minimização de f_4



Minimização conjunta de f_3 e f_4



Minimização conjunta para f_3 e f_4

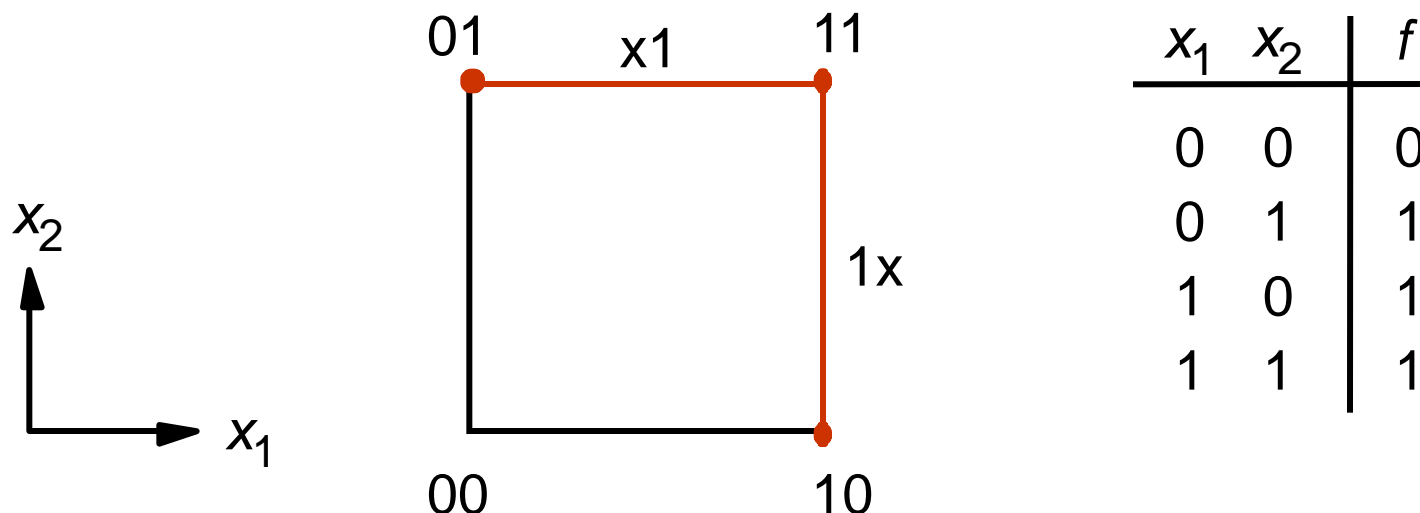


Síntese multi-nível

- Visto até agora: síntese visando custo mínimo → SOP ou POS de 2 níveis
- OK para circuitos de porte pequeno/médio
- Circuitos muito grandes podem ter problema de fan-in excessivo (portas com muitas entradas)
- Para sintetizar circuitos com outras restrições (ex fan-in), ferramentas de SW implementam circuitos multi-níveis
- Detalhes na seção 4.6 e 4.7 do livro texto

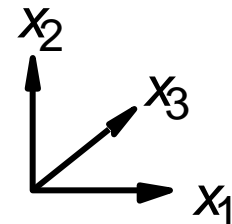
Representação cúbica

- Mapa de Karnaugh é ótimo para ilustrar conceitos.
 - automatização da síntese em SW precisa de outra ferramenta → exemplo repres. cúbica
- Exemplo: $f = \Sigma m(1, 2, 3) = x_1 + x_2$



Exemplo de cubo 3D

- $f = \Sigma m(0, 2, 4, 5, 6)$
- algumas possibilidades de representação



(000,010,100,101,110)

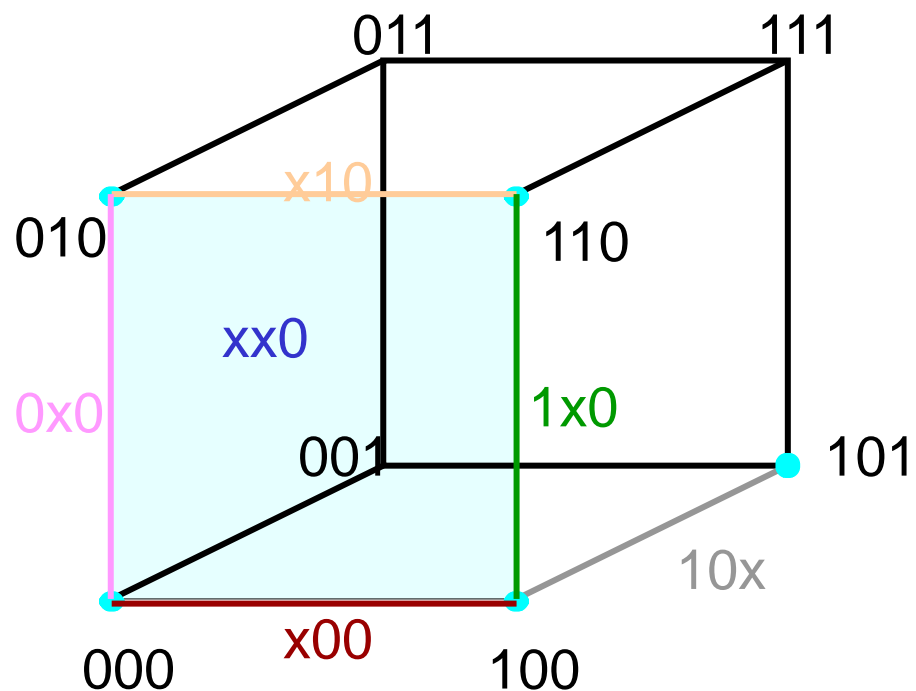
(0x0,1x0,101)

(x00,x10,101)

(x00,x10,10x)

(xx0,10x)

- $(xx0,10x) \rightarrow \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2$
é a ótima





Método tabular

- Algoritmo de Quine e McCluskey (1959)
- Início: tabela de mintermos
- A partir do mintermos (0-cubo) gera-se 1-cubos
- Mintermos cobertos são marcados
- A partir dos 1-cubos gera-se 2-cubos
- Termos cobertos são marcados
- Assim por diante
- Detalhes na seção 4.9

Hazards e glitches

- Hazards e glitches: sinais temporários espúrios que ocorrem antes do sinal de estabilizar
- Podem causar problemas

(a) hazard estático

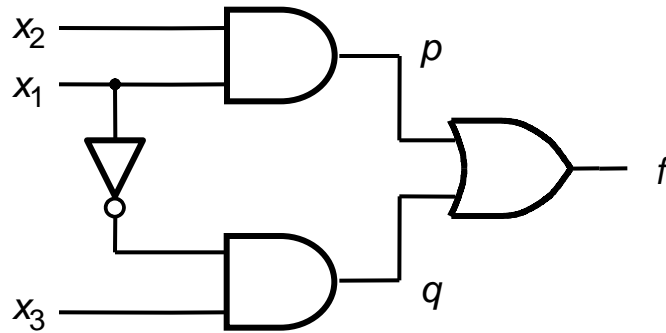


(b) hazard dinâmico

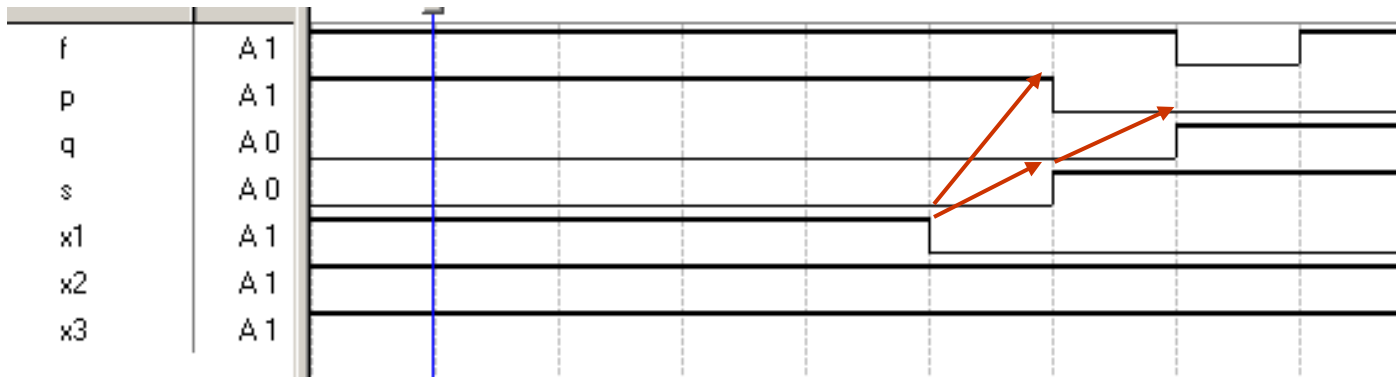


Exemplo de hazard estático

- Efeito de $x_1 (1 \rightarrow 0)$ faz $p (1 \rightarrow 0)$ antes que $q (0 \rightarrow 1)$
- Existe momento temporário em que $p+q=0$

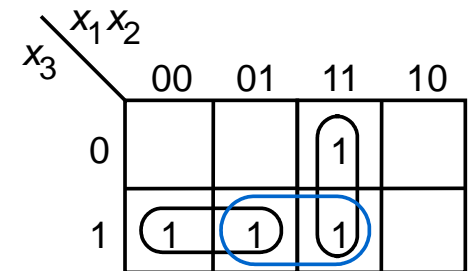
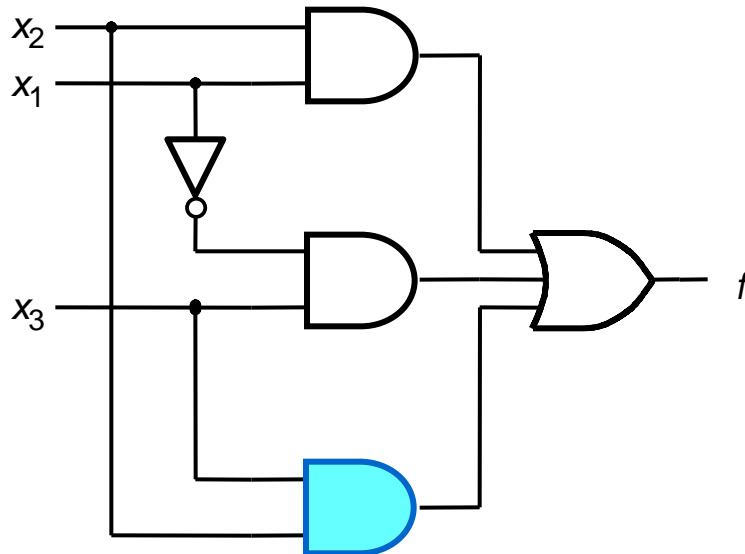


		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0			1	
	1	1	1	1	



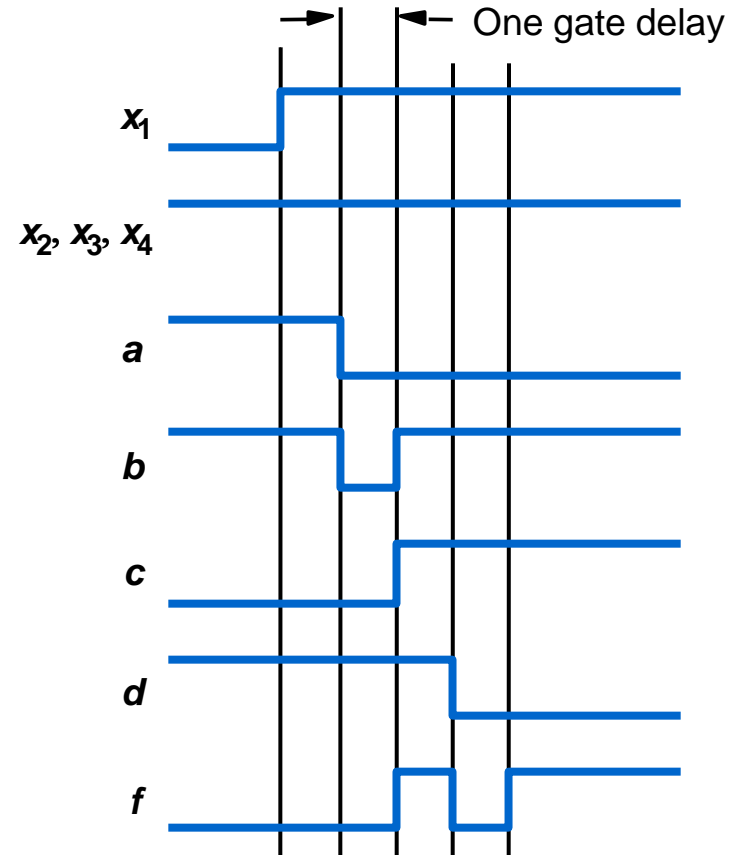
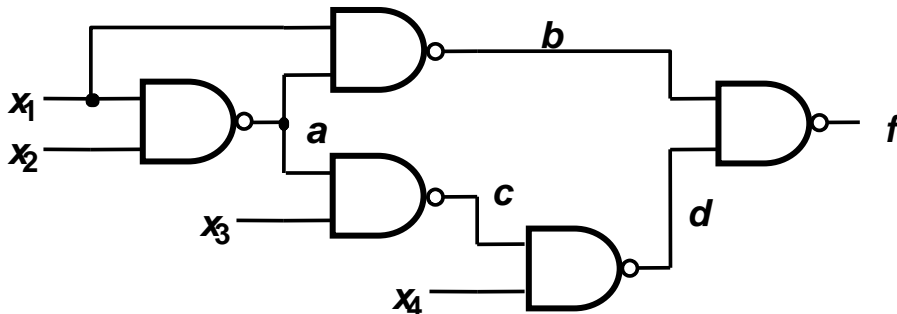
Solução do hazard estático

- Existe risco de hazard sempre que dois 1s adjacentes no mapa de Karnaugh não são cobertos por um único implicante
- Solução: criar novo implicante (redundante) para cobrir a transição



Exemplo de hazard dinâmico

- Quando $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$
ou $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$
- Aparece em circuitos > 2 níveis
- Observar hazard estático interno





Efeitos dos hazards

- Em circuitos combinacionais
 - apenas causa oscilações temporárias sem afetar o valor final da saída
 - poucos efeitos nocivos
- Em circuitos sequenciais (cap. 7)
 - pode levar a estado incorreto (\rightarrow erro) se
 - hazard na entrada de dados dentro do tempo de setup e hold
 - ou no sinal de clock
 - ou em entradas de controle assíncronas: load, preset, clear