MC-202 — Aula 23
Modelagem de problemas em grafos[1]

Lehilton Pedrosa

Instituto de Computação – Unicamp

Segundo Semestre de 2015

[1]Esses slides foram adaptados do material didático gentilmente cedido pelo Prof. **Guilherme P. Telles**. Todos os erros são meus.

Roteiro

Um problema

Numa festa, vários convidados chegaram. Rafael é novo na cidade. Carlos, Leo e José fazem são da mesma turma de Computação. Ana, Maria e Daniel são do mesmo grupo na Matemática. Bia faz Biologia e trabalha com José, que já trabalhou com Ana. Daniel e José são irmãos.

Um problema

Numa festa, vários convidados chegaram. Rafael é novo na cidade. Carlos, Leo e José fazem são da mesma turma de Computação. Ana, Maria e Daniel são do mesmo grupo na Matemática. Bia faz Biologia e trabalha com José, que já trabalhou com Ana. Daniel e José são irmãos.

Bia e Daniel têm algum amigo em comum?

Um problema

Leo

Bia

Rafael

Carlos

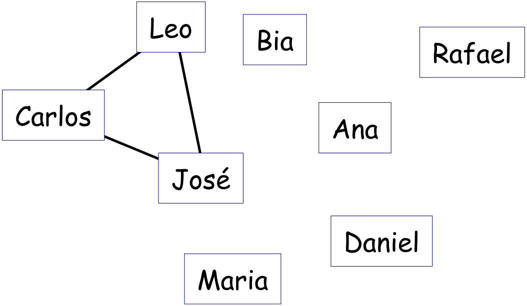
Ana

José

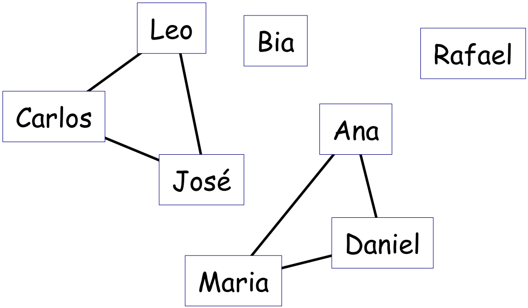
Daniel

Maria

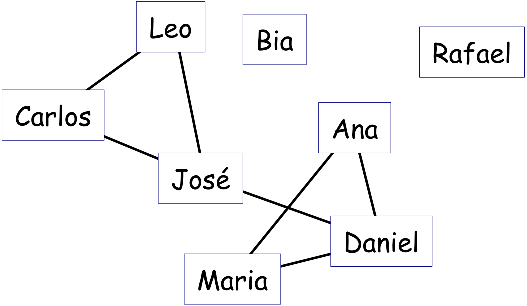
Um problema



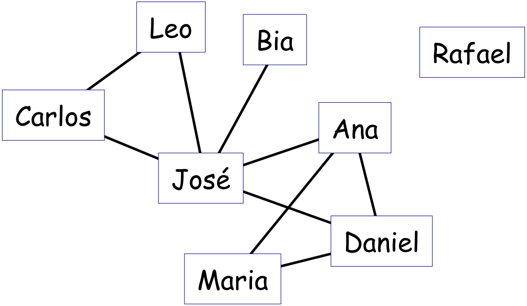
Um problema



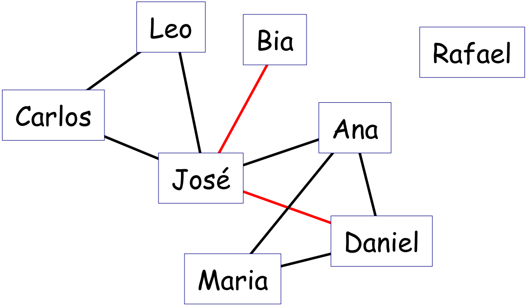
Um problema



Um problema



Um problema



Modelando objetos

Grafos

Podemos modelar certas estruturas separando:

- **objetos**
- **relações** entre esses objetos

Modelando objetos

Grafos

Podemos modelar certas estruturas separando:

- **objetos**
- **relações** entre esses objetos

No nosso exemplo:

- os objetos de interesse são pessoas
- as relações são amizade

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- “amigos virtuais”

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- “amigos virtuais”, ...

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- "amigos virtuais", ...

É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- “amigos virtuais”, ...

É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

- há um monte de gente falando disso
- um monte de algoritmos para problemas em grafos
- um monte de problemas reais modelados e resolvidos

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- "amigos virtuais", ...

É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

- há um monte de gente falando disso
- um monte de algoritmos para problemas em grafos
- um monte de problemas reais modelados e resolvidos
- um monte de problemas reais modelados e não resolvidos

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- “amigos virtuais”, ...

É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

- há um monte de gente falando disso
- um monte de algoritmos para problemas em grafos
- um monte de problemas reais modelados e resolvidos
- um monte de problemas reais modelados e não resolvidos ainda!

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- "amigos virtuais", ...

É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

- há um monte de gente falando disso
- um monte de algoritmos para problemas em grafos
- um monte de problemas reais modelados e resolvidos
- um monte de problemas reais modelados e não resolvidos ainda!

Não se convenceu?

Importância de grafos

Aplicações

Outros exemplos de aplicações:

- trechos de ruas e cruzamentos, cidades estradas
- números e funções, redes de comunicação, páginas da web
- "amigos virtuais", ...

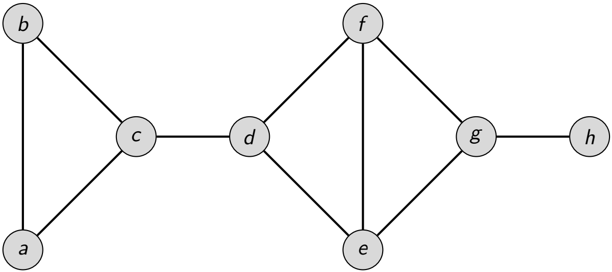
É uma disciplina própria

É um ramo da Matemática e da Computação:

- há um monte de gente falando disso
- um monte de algoritmos para problemas em grafos
- um monte de problemas reais modelados e resolvidos
- um monte de problemas reais modelados e não resolvidos ainda!

Não se convenceu? Vamos pintar um mapa!

Definição

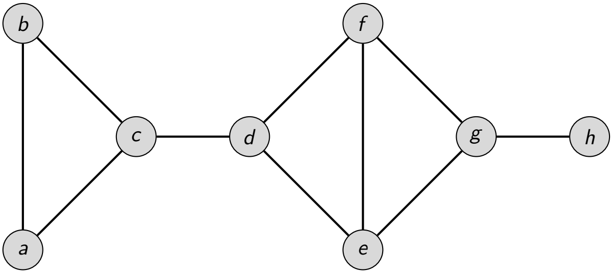


Grafo

Um grafo é um par $G = (V, E)$ onde

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**
- E é um conjunto finito de pares de vértices chamados **arestas**.

Definição



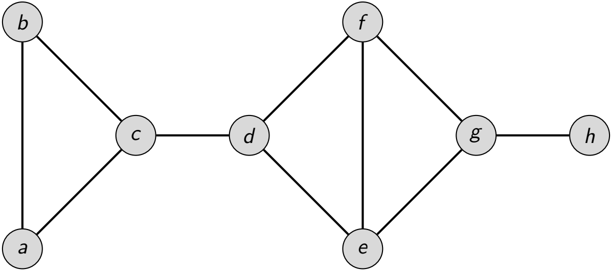
Grafo

Um grafo é um par $G = (V, E)$ onde

- V é um conjunto finito de elementos chamados **vértices**
- E é um conjunto finito de pares de vértices chamados **arestas**.

Dizemos simplesmente "grafo" ao invés de "grafo não-orientado".

Nomenclatura: Incidência

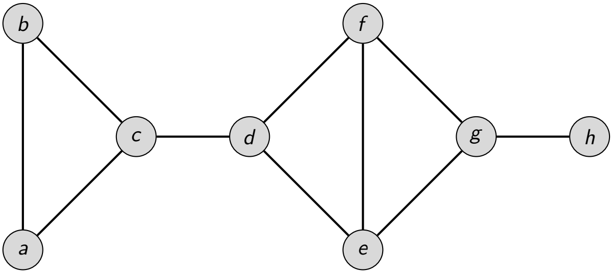


Incidência

Dada uma aresta $\mathrm{e} = \{u, v\}$:

- u e v são **extremos** de e
- e é **incidente** em u e v
- u ou v são **incidentes** a e

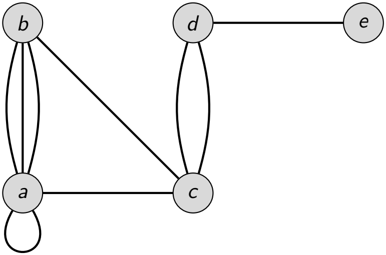
Nomenclatura: adjacência



Adjacência

- dois vértices são **adjacentes** se existe aresta entre eles
- duas arestas são **adjacentes** se têm um vértice em comum
- os vértices adjacentes de um vértice u são a **vizinhança** de u, $N(u)$

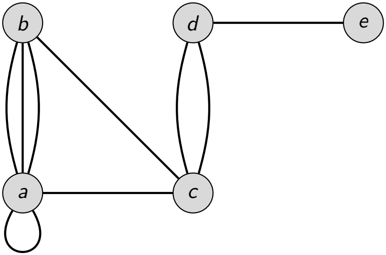
Nomenclatura: laços e arestas múltiplas



Laços e arestas múltiplas

- um laço (loop) é uma aresta com extremos idênticos.
- arestas múltiplas ou paralelas são duas ou mais arestas com os mesmos extremos

Nomenclatura: laços e arestas múltiplas

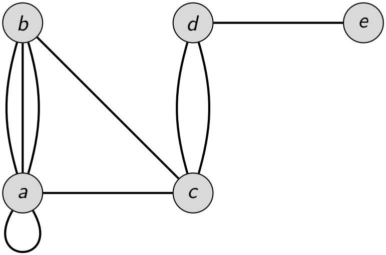


Laços e arestas múltiplas

- um laço (loop) é uma aresta com extremos idênticos.
- arestas múltiplas ou paralelas são duas ou mais arestas com os mesmos extremos

Observação: Um grafo sem laços e arestas múltiplas é chamado de grafo simples.

Nomenclatura: grau

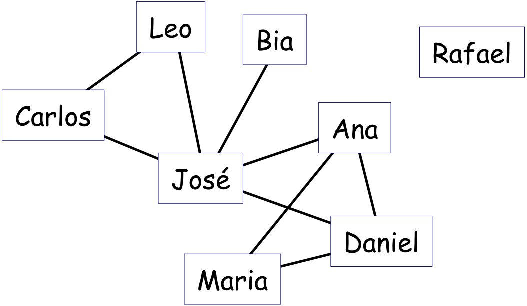


Grau

- o grau de um vértice v, $\deg(v)$, é o número de arestas incidentes (com laços contados duas vezes)

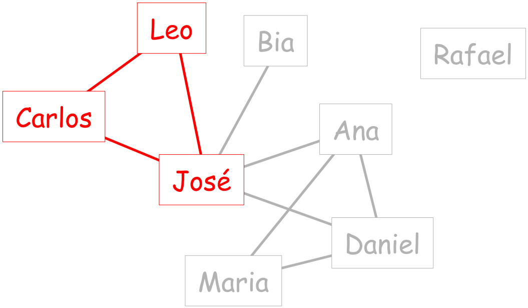
Concentrando-se numa parte

Qual o subgrafo induzido pelo alunos da computação?



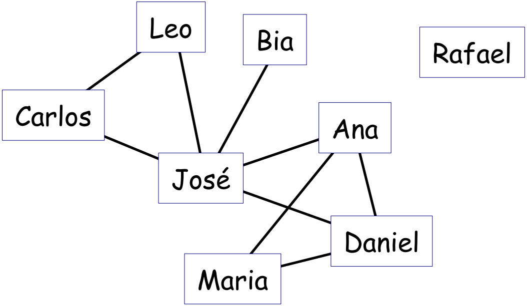
Concentrando-se numa parte

Qual o subgrafo induzido pelo alunos da computação?



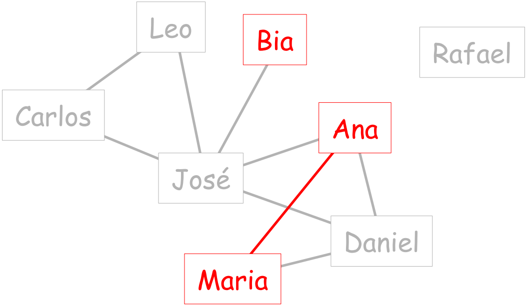
Concentrando-se numa parte

Qual o subgrafo induzido pelas mulheres?



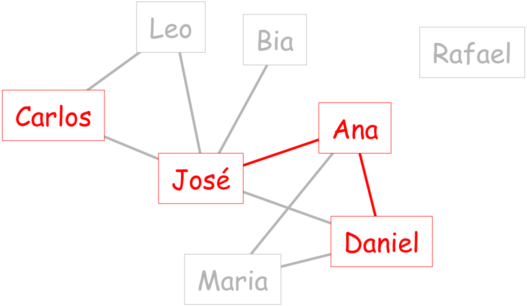
Concentrando-se numa parte

Qual o subgrafo induzido pelas mulheres?

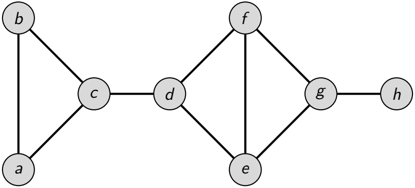


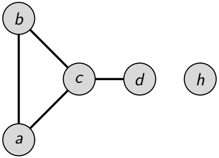
Concentrando-se numa parte

Um outro subgrafo qualquer



Subgrafo



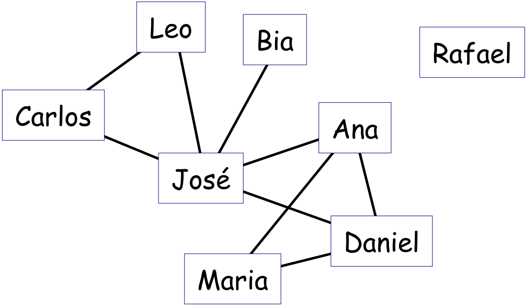


Subgrafo

Um **subgrafo** $H = (V', E')$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo em que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

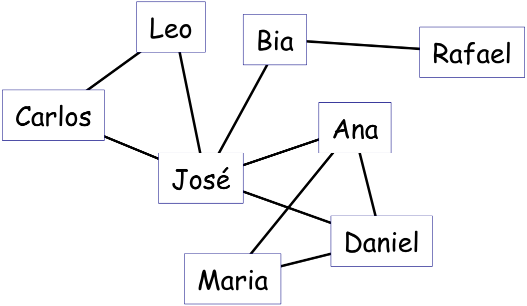
Um outro problema

Após conhecer Bia, Rafael é amigo de amigo de amigo... de Maria?



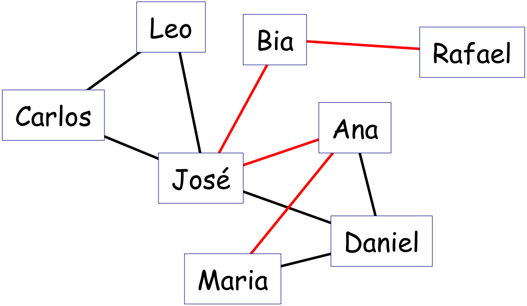
Um outro problema

Após conhecer Bia, Rafael é amigo de amigo de amigo... de Maria?

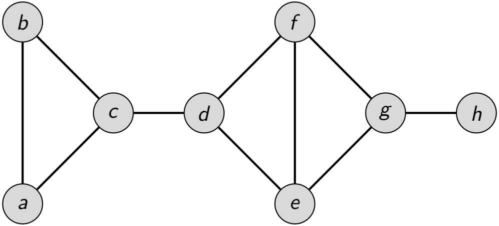


Um outro problema

Após conhecer Bia, Rafael é amigo de amigo de amigo... de Maria?



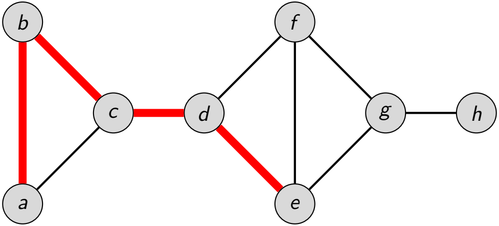
Caminho



Caminho

Um caminho P de v_1 a v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $k \geq 1$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i < k$.

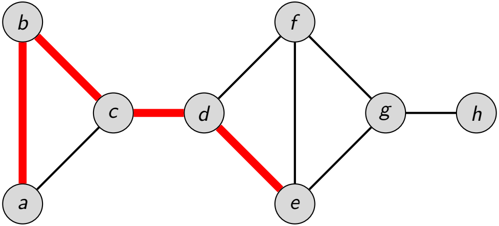
Caminho



Caminho

Um caminho P de v_1 a v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $k \geq 1$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i < k$.

Caminho

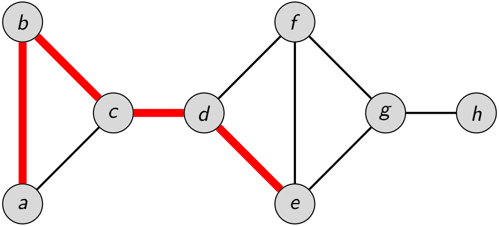


Caminho

Um caminho P de v_1 a v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $k \geq 1$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i < k$.

- um caminho é simples se seus vértices são distintos

Caminho

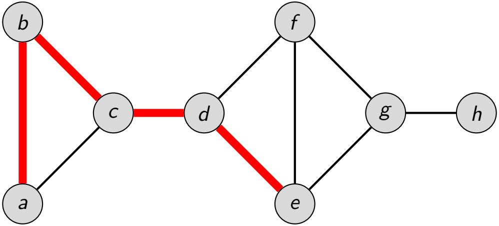


Caminho

Um caminho P de v_1 a v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1, \dots, v_k$ tal que $k \geq 1$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i < k$.

- um caminho é simples se seus vértices são distintos
- o tamanho de um caminho é o número de arestas

Caminho

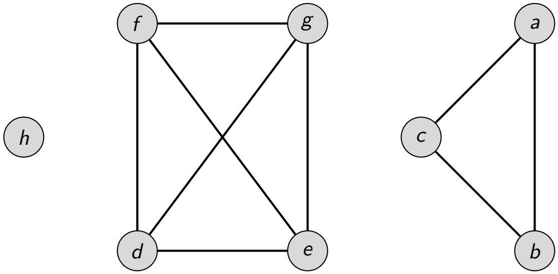


Caminho

Um caminho P de v_1 a v_k em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tal que $k \geq 1$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para $1 \leq i < k$.

- um caminho é simples se seus vértices são distintos
- o tamanho de um caminho é o número de arestas
- a distância entre dois vértices é o tamanho do menor caminho entre eles

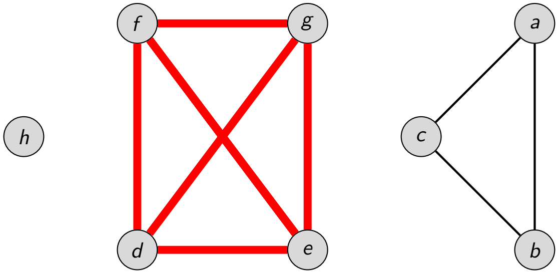
Conexidade



Conexidade

- um grafo é conexo se existe caminho entre todo par de vértices
- um subgrafo maximal conexo é chamado de componente conexo

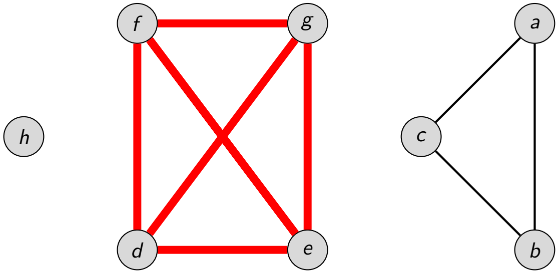
Conexidade



Conexidade

- um grafo é conexo se existe caminho entre todo par de vértices
- um subgrafo maximal conexo é chamado de componente conexo

Conexidade

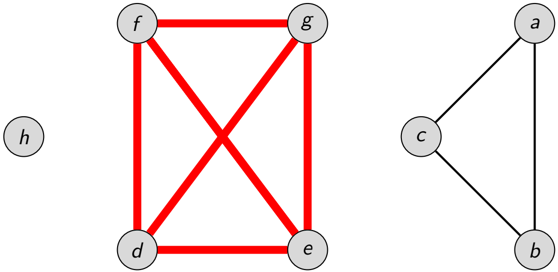


Conexidade

- um grafo é conexo se existe caminho entre todo par de vértices
- um subgrafo maximal conexo é chamado de componente conexo

Pergunta: O grafo inicial dos amigos era conexo?

Conexidade

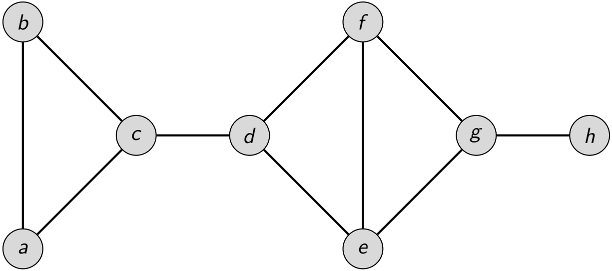


Conexidade

- um grafo é conexo se existe caminho entre todo par de vértices
- um subgrafo maximal conexo é chamado de componente conexo

Pergunta: O grafo inicial dos amigos era conexo? E após Rafael conhecer Bia?

Nomenclatura



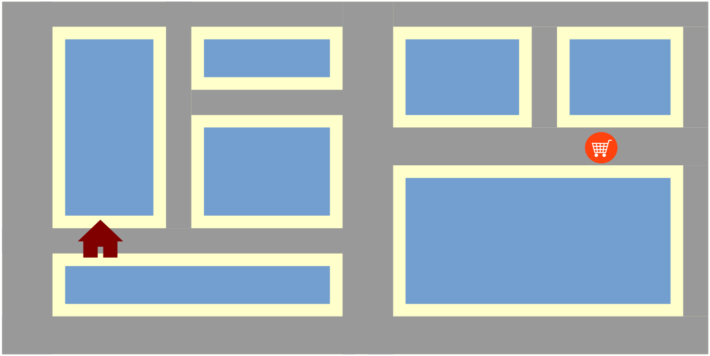
- Um **ciclo** ou caminho fechado é um caminho em que $v_1 = v_n$.
- Um ciclo é **simples** se todos os vértices dele são distintos.

Mais um problema

Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

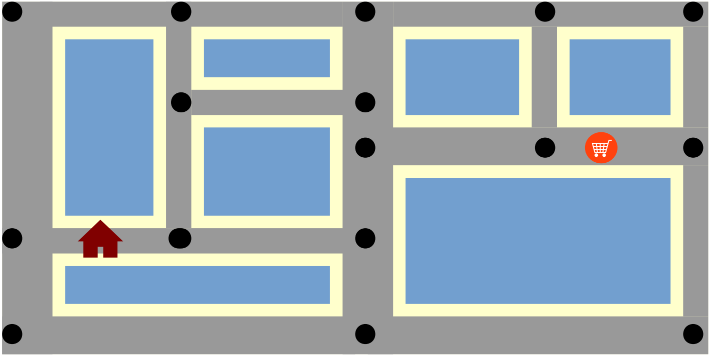
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

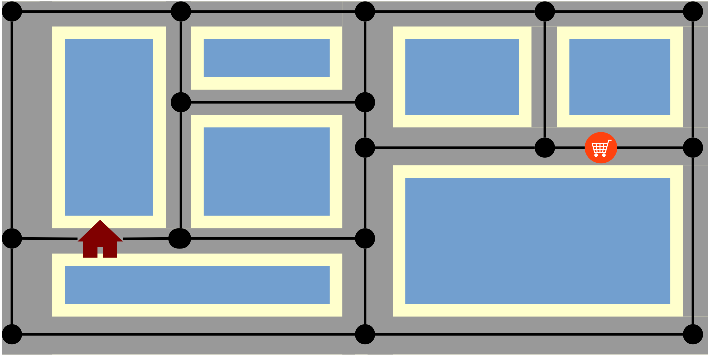
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

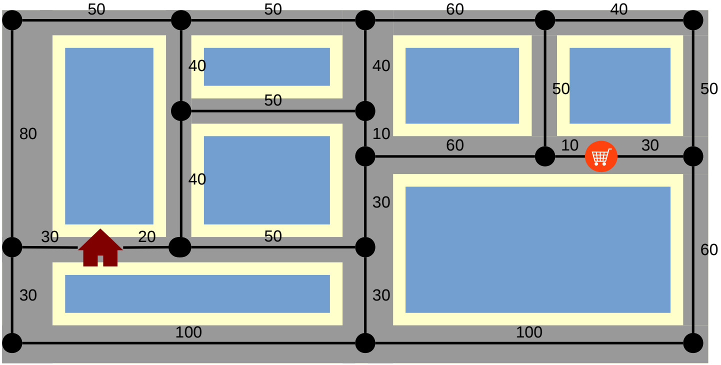
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

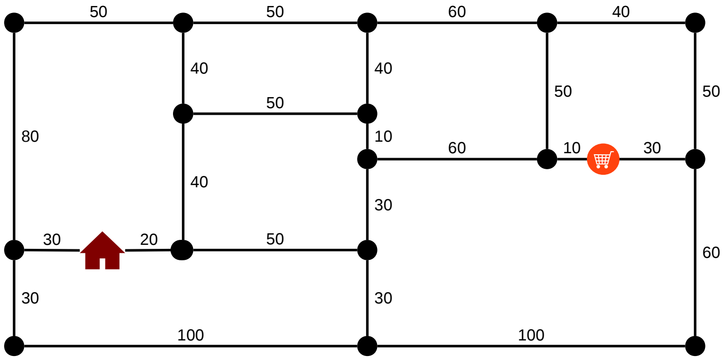
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

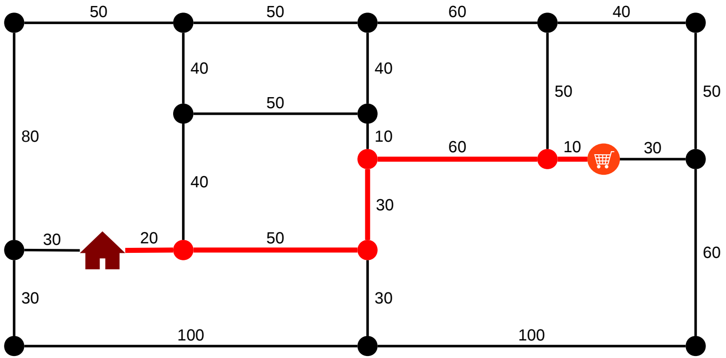
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

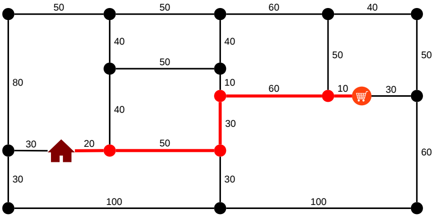
Mais um problema



Problema

Como ir andando de casa até o supermercado gastando menos tempo?

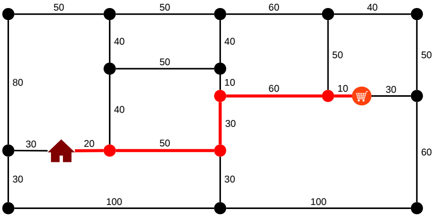
Grafo ponderado



Grafo ponderado

Um grafo $G = (V, E)$ é ponderado se estiver associado a uma uma função de pesos nas arestas $w : E \to R$.

Grafo ponderado



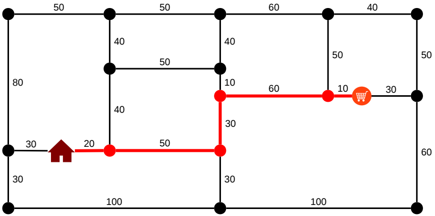
Grafo ponderado

Um grafo $G = (V, E)$ é ponderado se estiver associado a uma uma função de pesos nas arestas $w : E \to R$.

Para um grafo ponderado com pesos não negativos:

- o tamanho de um caminho é a soma dos pesos de suas arestas
- a distância entre dois vértices é o tamanho do menor caminho

Grafo ponderado



Grafo ponderado

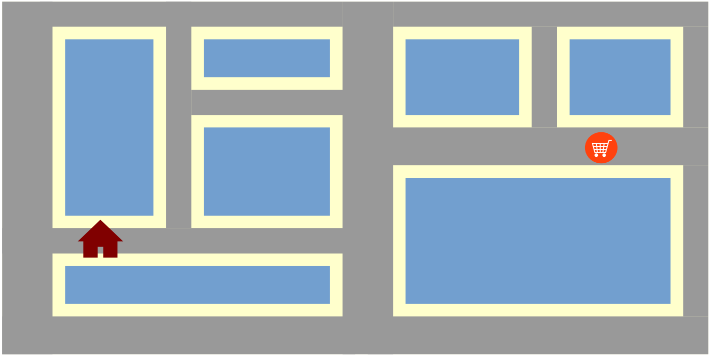
Um grafo $G = (V, E)$ é ponderado se estiver associado a uma uma função de pesos nas arestas $w : E \to R$.

Para um grafo ponderado com pesos não negativos:

- o tamanho de um caminho é a soma dos pesos de suas arestas
- a distância entre dois vértices é o tamanho do menor caminho

Observação: Também podemos considerar pesos nos vértices!

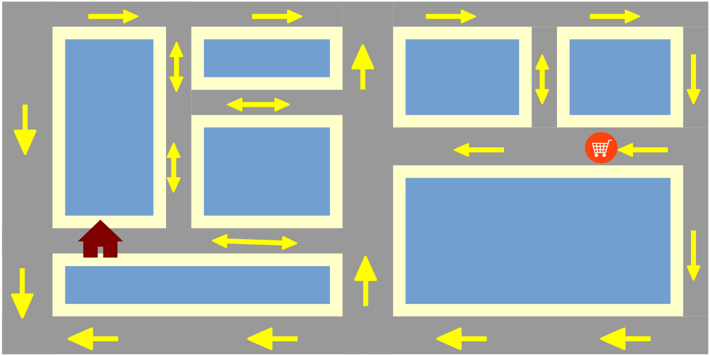
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

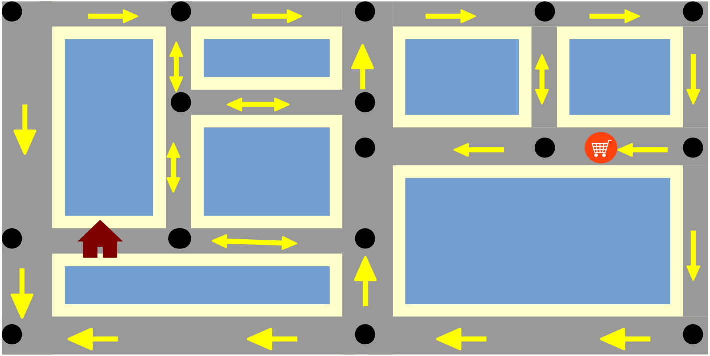
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

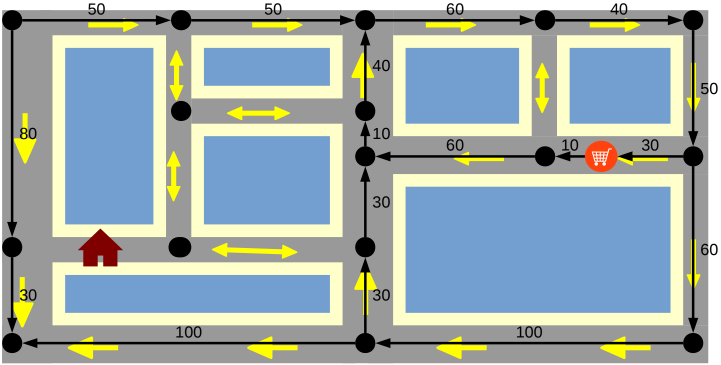
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

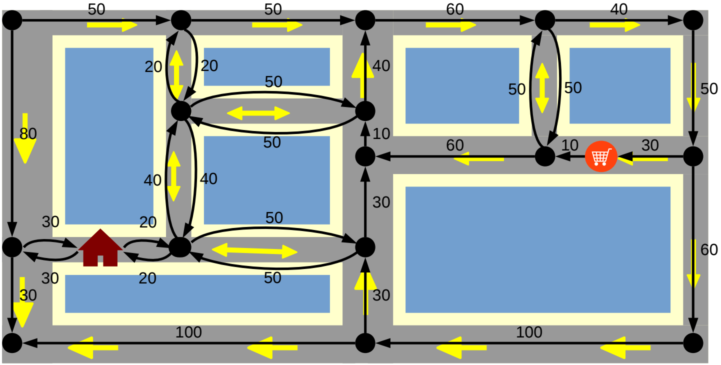
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

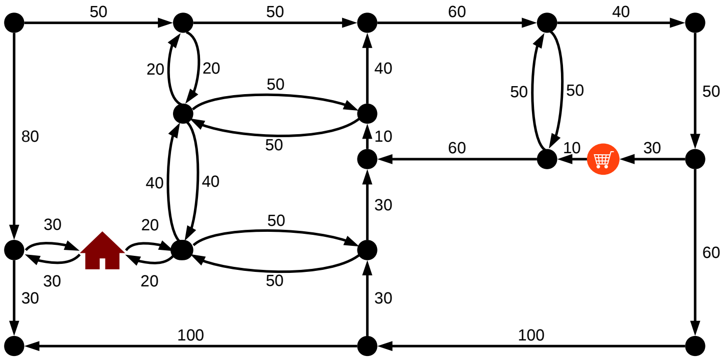
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

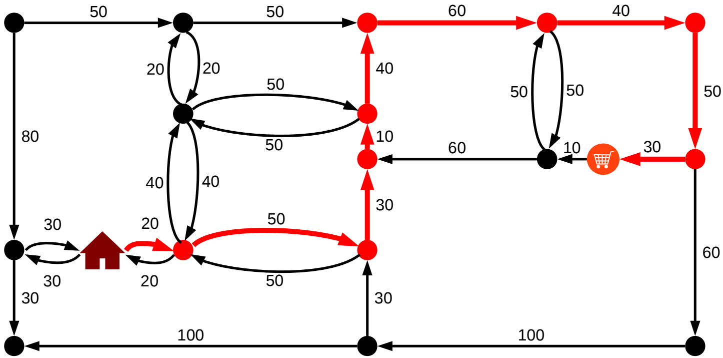
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

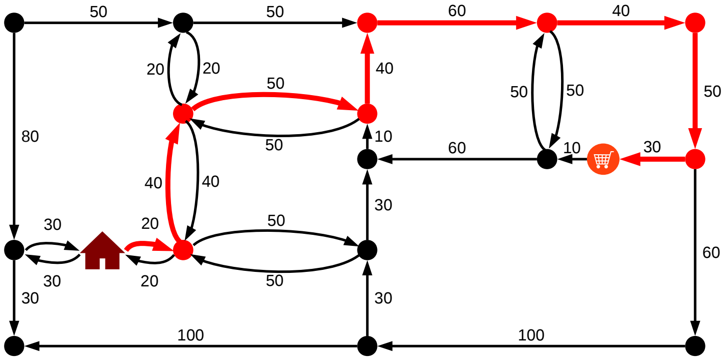
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

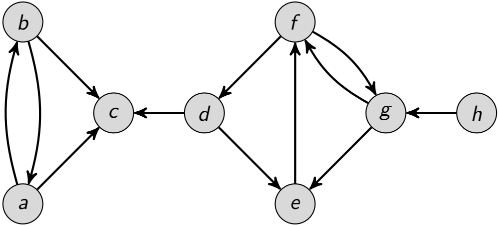
Complicando o problema



Problema

Como ir de carro de casa até o supermercado gastando menos tempo?

Digrafos



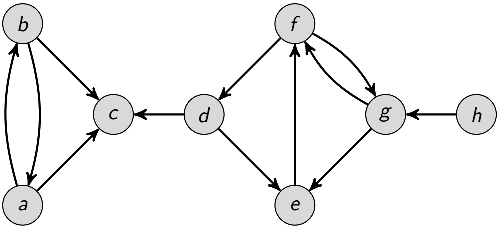
Digrafo

Um grafo orientado, grafo direcionado ou digrafo é um grafo cujas arestas são pares **ordenados** de vértices.

Dado uma aresta $\mathrm{e} = (u, v)$, então dizemos que

- u é o vértice inicial ou calda: e *sai de u*
- v é o vértice terminal ou cabeça: e *entra em v*

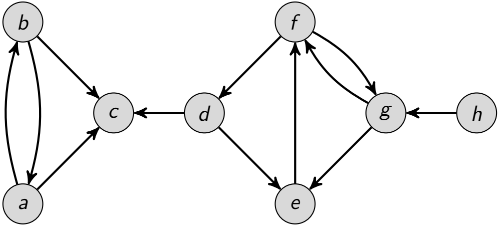
Nomenclatura: adjacência



Adjacência

- **vizinho de u:** v é vizinho de u se existe aresta (u, v)
- **vizinhança de u:** é conjunto de vizinhos de u
- **grau de saída de u:** o número de arestas que saem de u, $\deg^+(u)$

Nomenclatura: adjacência

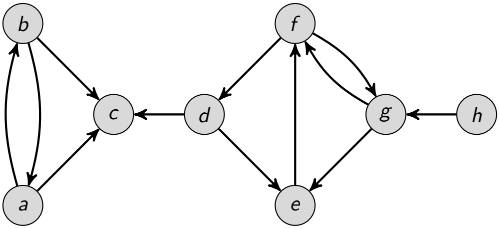


Adjacência

- **vizinho de u:** v é vizinho de u se existe aresta (u, v)
- **vizinhança de u:** é conjunto de vizinhos de u
- **grau de saída de u:** o número de arestas que saem de u, $\deg^+(u)$

Observação: vizinhança de entrada e grau de entrada são análogos

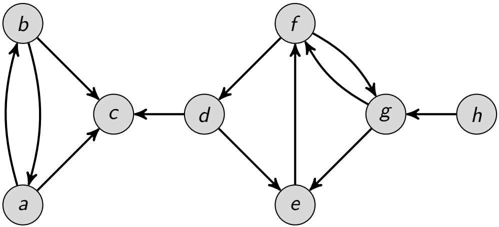
Nomenclatura: caminho orientado



Caminhos orientados

Caminhos e ciclos em grafos orientados devem ser formados por arestas com a mesma orientação.

Nomenclatura: caminho orientado

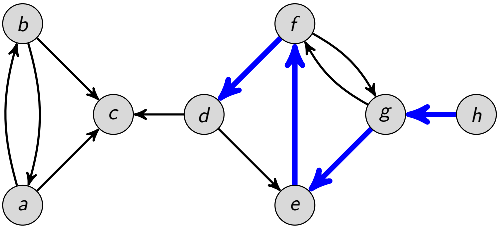


Caminhos orientados

Caminhos e ciclos em grafos orientados devem ser formados por arestas com a mesma orientação.

- é caminho orientado: (h, g, e, f, d)

Nomenclatura: caminho orientado

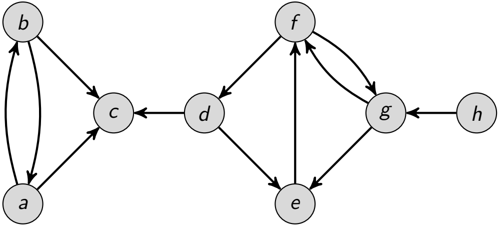


Caminhos orientados

Caminhos e ciclos em grafos orientados devem ser formados por arestas com a mesma orientação.

- é caminho orientado: (h, g, e, f, d) ✓

Nomenclatura: caminho orientado

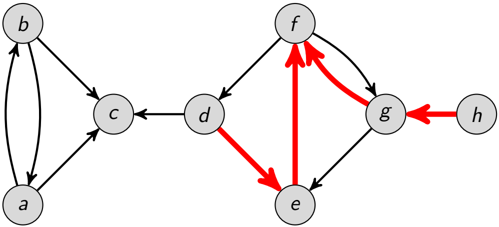


Caminhos orientados

Caminhos e ciclos em grafos orientados devem ser formados por arestas com a mesma orientação.

- é caminho orientado: (h, g, e, f, d) ✓
- **não** é caminho orientado: (h, g, f, e, d)

Nomenclatura: caminho orientado

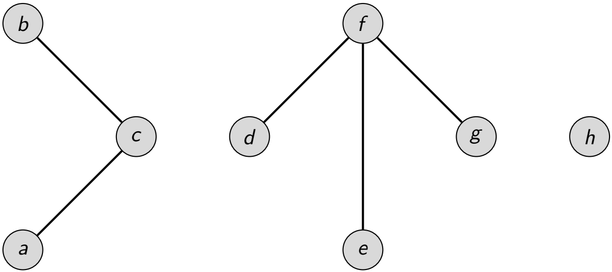


Caminhos orientados

Caminhos e ciclos em grafos orientados devem ser formados por arestas com a mesma orientação.

- é caminho orientado: (h, g, e, f, d) ✓
- **não** é caminho orientado: (h, g, f, e, d) ✗

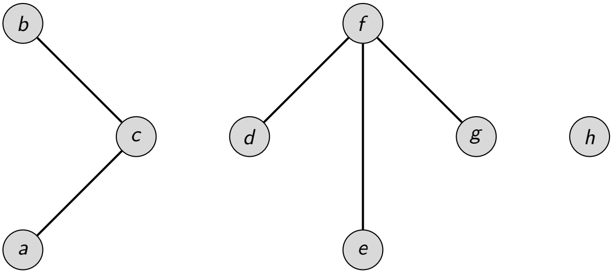
Árvores e Floresta



Grafos acíclicos

Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos.

Árvores e Floresta

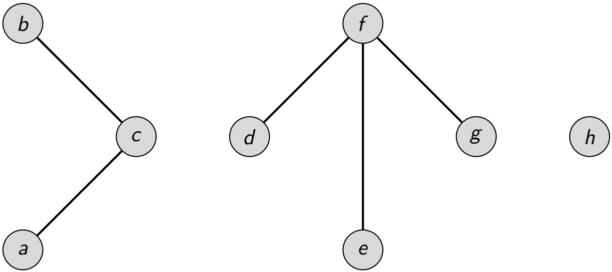


Grafos acíclicos

Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos.

- um grafo acíclico e conexo é chamado de árvore

Árvores e Floresta

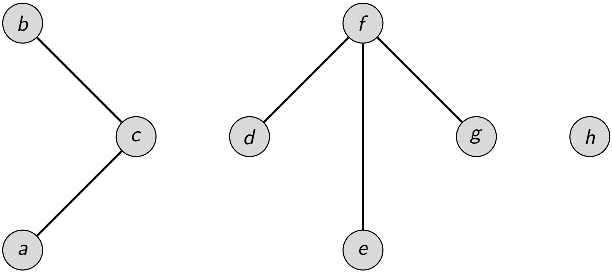


Grafos acíclicos

Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos.

- um grafo acíclico e conexo é chamado de árvore
- um grafo acíclico também é chamado de floresta

Árvores e Floresta

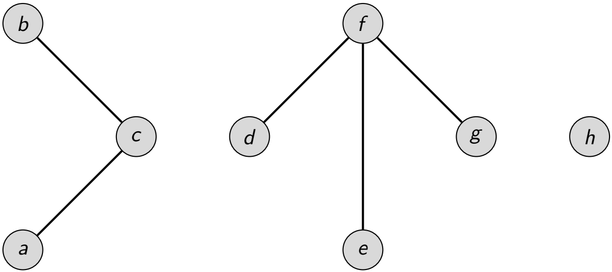


Grafos acíclicos

Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos.

- um grafo acíclico e conexo é chamado de árvore
- um grafo acíclico também é chamado de floresta (por quê?)

Árvores e Floresta



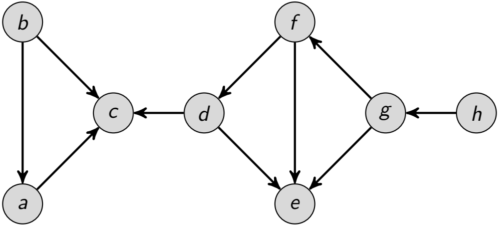
Grafos acíclicos

Um grafo acíclico é um grafo sem ciclos.

- um grafo acíclico e conexo é chamado de árvore
- um grafo acíclico também é chamado de floresta (por quê?)

Importante: Não confundir com árvores de busca!

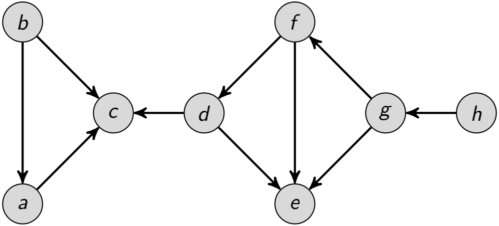
Grafo direcionado acíclico



DAG

Um grafo direcionado acíclico ou DAG (*directed acyclic graph*) é um grafo orientado sem ciclos orientados.

Grafo direcionado acíclico



DAG

Um grafo direcionado acíclico ou DAG (*directed acyclic graph*) é um grafo orientado sem ciclos orientados.

Observação: O grafo orientado induzido não é necessariamente floresta.

Exercício

Em uma jogo de tabuleiro, há n posições e o objetivo é sair a primeira posição e chegar na última. Cada posição $i = 1, \ldots, n$ tem um número v_i. A cada rodada um jogador joga um dado e:

- se o valor for par, ele avança v_i casas (se for possível);
- se o valor for ímpar, ele retrocede v_i casas (se for possível).

Exercício

1. Modele o jogo acima como um grafo.
2. Desenhe o grafo correspondente para quando os valores do tabuleiro forem $\{1, 3, 2, 5, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 2\}$.
3. Escreva um algoritmo (em português) que, dada uma sequência de m lançamentos de dado, decida se essa sequência de lançamentos é vencedora.
4. Escreva um algoritmo para verificar se é possível ganhar.