

**Observações:**

- Leia atentamente as questões. Várias das questões a seguir são abertas, isso é, não há uma solução correta. No entanto, você deve responder da maneira mais completa possível, atendo-se ao conteúdo de estrutura de dados.

**Terceira lista de exercícios**

1. Considere uma função de *hashing*  $h(k)$  que mapeia uma string a um número entre 0 e 10. A função é calculada da seguinte forma: dada uma palavra, conte o número de caracteres e devolva o resto da divisão desse número por 10.

a) Desenhe a tabela de espalhamento usando listas ligadas e endereçamento aberto com reespalhamento linear após a inserção das seguintes palavras: “De”, “tudo”, “ao”, “meu”, “amor”, “serei”, “atento”.

b) Essa é uma boa função de hashing? Justifique sua resposta descrevendo o que se espera de uma boa função de hashing e relacionando ao conjunto de chaves do domínio da função.

2. [GPT] Suponha que uma tabela de hashing vai armazenar chaves compostas por pares de inteiros  $(x, y)$ . Que estratégia poderia ser usada para computar uma função de hashing para o par que fosse independente da ordem dos elementos, isto é,  $h(x, y) = h(y, x)$ ?

3. Como visto, em geral uma boa função de hashing depende de todos os bits de sua chave. Isso pode ser entendido verificando o seguinte exemplo ruim de função: pegue a primeira letra de uma palavra e mapeie em um vetor com posições de 0 a 25. Um problema é que isso pode acarretar muitas colisões, já que as palavras não são divididas uniformemente; outro problema é que se o número de elementos for grande, então deveríamos gerar índices maiores que 25. Tendo isso em mente, explique porque a função de hashing  $h(k) = k \bmod 2^i$ , para algum  $i$  inteiro não é uma boa função de hashing.

4. O número de CPF é composto por 9 dígitos e mais 2 dígitos verificadores. Os números de CPF são distribuídos pela Receita Federal de acordo com a localidade. Assim, o nono dígito sempre é o mesmo para as pessoas que emitiram o CPF em uma cidade. Concorde ou discorde: em uma função de hashing, sempre devemos verificar todos os bits da entrada. Justifique.

5. A matriz  $A$  a seguir representa um grafo.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- a) Que tipo de grafo está representado e qual representação está sendo utilizada.
- b) Desenhe o grafo.
- c) Conte o número de componentes conexas e o número de ciclos no grafo.
- d) Desenhe uma representação do grafo usando listas de adjacências.
- e) Conte o número de vértices e arestas. Compare o uso de memória das várias formas de representação.
- f) Concorde ou discorde: para esse grafo, verificar se dois vértices são vizinhos é quase tão eficiente usando lista ou matriz de adjacências. Justifique.

6. Escreva um algoritmo que, dado um grafo de entrada  $G$ , conte e identifique as componentes conexas de um  $G$ , isso é, ele deve devolver uma função  $\theta : V \rightarrow N$  tal que  $\theta(u) = \theta(v)$  se, e somente se,  $u$  e  $v$  estão na mesma componente conexa (a função  $\theta$  pode ser representada por um vetor).

7. Uma imagem em escala de cinza pode ser representada simplesmente por uma matriz de inteiros em que cada célula representa um pixel cujo valor quanto mais próximo de 255 mais próximo do branco e quanto mais próximo de 0 mais próximo do preto. Uma operação comum de imagem é ressaltar as bordas, isso é, deixar escuros os pixels de bordas e claros os demais (ver detalhe na imagem). Infelizmente não há algoritmos de detecção de bordas perfeitos.



a) Supondo que as bordas fossem detectadas perfeitamente, descreva uma estratégia baseada em grafos para contar o número de pedras do sítio arqueológico de Sacsayhuaman a partir de uma foto.

b) Considerando que o algoritmo de detecção de bordas pode falhar, descreva que tipos de dificuldades poderiam fazer com que o algoritmo anterior falhasse e que sugestões você daria para minimizar esse problema. Tente descrever essas dificuldades em *termos de propriedades do grafo* (e.g., tamanho da componente).

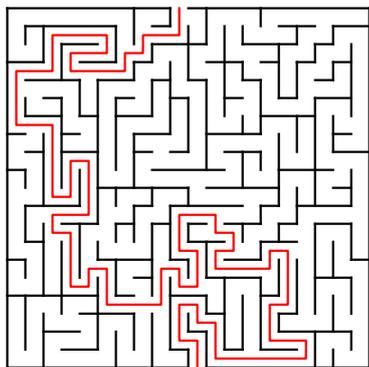
8. Uma rede de comunicação será formada por vários roteadores, cada um instalado em uma unidade de uma empresa. As unidades estão espalhadas pela cidade e a empresa pode conectar cada par de unidades  $a$  e  $b$  com um cabo. Acontece que, quando um dado é transmitido entre  $a$  e  $b$  existe um tempo de latência  $l_{ab}$  para que a informação saia de  $a$  e chegue em  $b$ . Um novo servidor de vendas será instalado em alguma unidade  $s$ . Para transmitir dados de  $s$  para  $b$ , é permitido que, primeiro, o dado seja transmitido para uma unidade  $a$  e, em seguida, retransmitindo de  $a$  para  $b$ . Mais genericamente, o dado pode passar por um caminho de unidades. Seu objetivo é escolher a unidade em que será instalado o servidor para minimizar o pior tempo de transmissão entre o servidor e alguma unidade.

a) Modele o problema como um problema em grafo. Escreva como o grafo é definido e formalize as noções do problema como propriedades desse grafo. Diga qual pergunta deve ser feita sobre o grafo para resolver o problema (da maneira mais formal que conseguir).

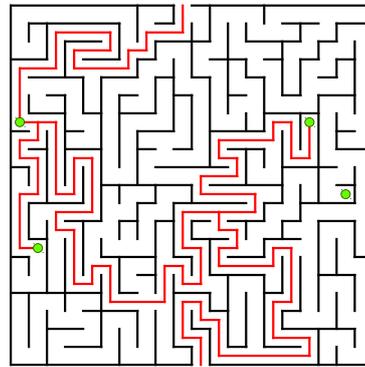
b) Escreva um algoritmo para resolver o problema.

9. Modele o problema do labirinto como um grafo e proponha uma solução.

10. Considere a seguinte variante do labirinto: seu objetivo é sair do ponto inicial e chegar ao ponto final colhendo pelo menos  $x$  de  $n$  itens distribuídos pelo mapa. Modifique o algoritmo da questão anterior para resolver esse problema.

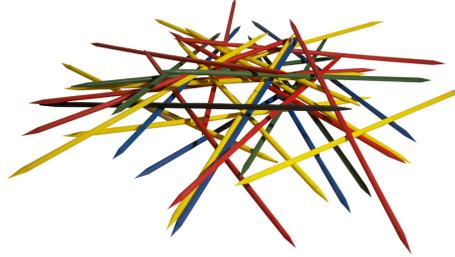


Labirinto convencional.



Labirinto com recompensa:  $x = 3, n = 4$ .

11. No jogo pega-varetas as regras são simples: você só pode mover uma vareta por vez e o objetivo é pegar todas as varetas; o primeiro que mover mais de uma vareta perde.



a) Modele o problema como um grafo! Aqui você também deve definir qual problema você está resolvendo para aumentar as chances de vencer o jogo. Diga qual estratégia você utilizaria numa partida.

b) Escreva um algoritmo que verifique se é possível empatar, isso é, se é possível que todas as varetas sejam removidas. Nesse caso, o algoritmo deve mostrar a ordem em que as varetas devem ser retiradas.

**Modelem o problema abaixo como um grafo (não é necessário dar um algoritmo para ele):**

12. [Tanenbaum] Escreva um programa em C que leia as seguintes informações sobre uma rede elétrica:

- $n$ , o número de cabos na rede;
- a quantidade de corrente entrando pelo primeiro cabo e saindo pelo  $n$ ésimo;
- a resistência de cada um dos cabos 2 até  $n - 1$ ;
- um conjunto de pares ordenados,  $(i, j)$  indicando que o cabo  $i$  está conectado ao cabo  $j$  e que a eletricidade flui através do cabo  $i$  até o cabo  $j$ .

O programa deve calcular o valor da corrente fluindo através de cada um dos cabos 2 até  $n - 1$ , aplicando a lei de Kirchoff e a lei de Ohm. A lei de Kirchoff diz que a quantidade de corrente fluindo para uma junção é igual à quantidade saindo da junção. Segundo a lei de Ohm, se existirem dois caminhos entre duas junções, as somas das correntes vezes as resistências sobre todos os cabos nos dois caminhos serão iguais.

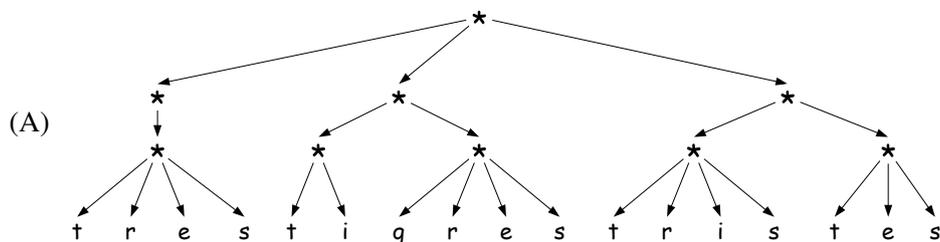
13. Quantas árvores orientadas há com nós  $A, B$  e  $C$ ? E quantas árvores não-orientadas?

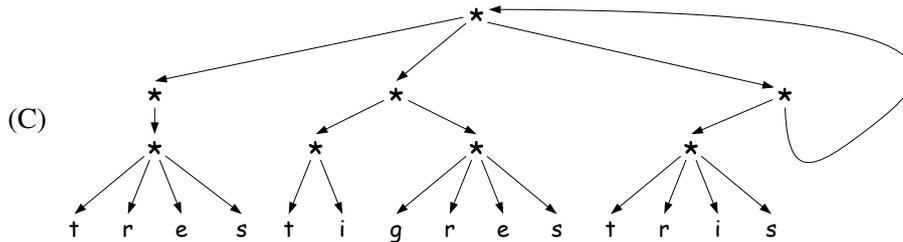
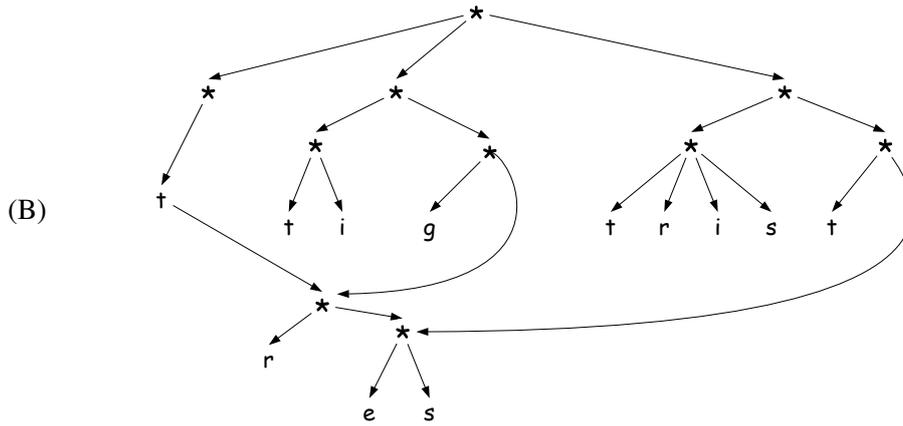
14. Uma família  $\mathcal{L}$  de conjuntos é laminar se para qualquer par de conjuntos  $A, B \in \mathcal{L}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ . Mostre que o conjunto de subárvores de uma árvore é uma família laminar.

15. [GPT] A profundidade de um átomo é 0. A profundidade de uma lista generalizada vazia é 0. A profundidade de uma lista generalizada não-vazia é igual à profundidade máxima dentre os elementos dela mais 1. Escreva uma função para calcular a profundidade de uma lista generalizada.

16. [GPT] Escreva uma função para fazer uma cópia de uma lista generalizada.

17. Considere os três desenhos a seguir:





- Quais são árvores? Quais são listas?
- Represente cada um deles usando uma notação com parênteses conveniente.
- Esboce ou desenhe uma representação em memória de cada objeto usando listas.
- Escreva uma função para percorrer uma árvore em profundidade e imprimir o conteúdo dos nós átomos (aqueles que não forem \*).
- Qual o resultado da função quando for passado como parâmetro cada um dos objetos acima.

**18.** Uma rádio está com problemas de audiência e está analisando a sua programação. Pra isso contratou um consultor que tem a seguinte desconfiança: “o problema é as mesmas música são tocadas repetidas vezes na programação”. Para verificar isso, ele definiu o seguinte critério: uma música é “repetida” se ela já foi tocada anteriormente em um intervalo de tempo menor que 30min. Por sorte, a lista das músicas e o horário de início está facilmente disponível em um arquivo e ele pode contar o número de músicas repetidas que foram tocadas durante um ano. O consultor escreveu um programa (em uma linguagem com coleta de lixo) que implementa o seguinte algoritmo:

- $a \leftarrow \text{NULL}, n \leftarrow 0$
- para cada musica  $m$  lida do arquivo:
  - $r \leftarrow \text{falso}, p \leftarrow a$
  - enquanto  $r = \text{falso}, p \neq \text{NULL}$ :
    - se  $m.\text{id} = p.\text{id}$  e  $m.\text{inicio} - p.\text{inicio} < 30\text{min}$ , então faça  $n \leftarrow n + 1, r \leftarrow \text{verdadeiro}$
    - $p \leftarrow p.\text{anterior}$
  - $m.\text{anterior} \leftarrow a$
  - $a \leftarrow m$
- devolva  $n$

a) Ao executar o programa, em certo momento ele apresentava uma mensagem de erro indicando falta de memória e a execução era finalizada. Explique porque isso acontecia. Lembre-se de que a coleta de lixo é chamada automaticamente sempre que a memória livre está por acabar.

b) Dê sugestões para melhorar o programa e corrigir o problema. Reescreva do programa corrigindo a falta de memória.

c) (extra) O algoritmo proposto pelo consultor é quadrático no número de músicas (no pior caso). Como você poderia melhorar a eficiência? Considere que, como descrito acima, a quantidade de memória é bastante limitada.