MC-202
Noções de Eficiência de Algoritmos

Lehilton Pedrosa
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

Busca sequencial e consumo de tempo

Quantos segundos demora para executar a seguinte função?

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Depende...

- do computador onde ele for rodado
  - computador rápido vs lento
- da posição de x no vetor
  - no melhor caso, a linha 4 é executada 1 vez
  - no pior caso, a linha 4 é executada n vezes
- do valor de n
  - $n = 10$ vs $n = 10.000$

Busca sequencial e consumo de tempo

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Em geral, queremos analisar o pior caso do algoritmo

- A análise do melhor caso pode ser interesse, mas é rara
- A análise do caso médio é mais difícil
  - Normalmente é uma análise probabilística
  - Precisamos fazer suposições sobre os dados de entrada

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int *v, int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n+1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos, comparação e `if`)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e `return`)
- Linha 6: tempo c_6 (`return`)

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n \end{aligned}$$

Isto é, o crescimento do tempo é linear em n

- Se n dobra, o tempo de execução praticamente dobra

Notação Assintótica

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da ordem de n

- A ordem de crescimento do tempo é igual a de $f(n) = n$

Dizemos que

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 = \mathrm{O}(n)$$

Veremos uma definição formal de $\mathrm{O}(\cdot)$ em breve...

Busca Binária

```
int busca_binaria(int *dados, int l, int r, int x) {
  int m = (l + r) / 2;
  if (l > r)
    return -1;
  if (dados[m] == x)
    return m;
  else if (dados[m] < x)
    return busca_binaria(dados, m + 1, r, x);
  else
    return busca_binaria(dados, l, m - 1, x);
}
```

Se realizarmos t chamadas, quanto vale t?

- primeiro chamamos para n
- depois para $n/2$, $n/4$, $n/8$, ..., $n/2^{t-1}$
- no pior caso, só paramos quando $n/2^t < 1 \leq n/2^{t-1}$
  - Ou seja, $t \leq 1 + \lg n$
- gastamos um tempo constante c em cada chamada
  - operações aritméticas, comparações e `return`

Para $n \geq 1$, o consumo de tempo é no máximo:

- $ct \leq c + c \lg n \leq 2c \lg n = \mathrm{O}(\lg n)$

Objetivos

Temos dois objetivos para analisar algoritmo

- Entender o tempo de execução de um algoritmo
  - Exemplo: busca linear é $\mathrm{O}(n)$
  - Vamos dizer que o algoritmo é $\mathrm{O}(f(n))$

- Comparar dois algoritmos
  - Busca linear é $\mathrm{O}(n)$ e busca binária é $\mathrm{O}(\lg n)$
  - Veremos que um algoritmo $\mathrm{O}(\lg n)$ é melhor que um $\mathrm{O}(n)$
  - Prova formal que um algoritmo é melhor que o outro

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples de entender

- $f(n) = c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$ e $g(n) = n$
- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

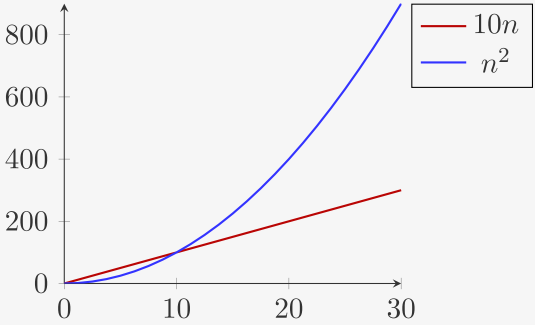
f e g podem ser os tempos de execução de dois algoritmos

- $f(n) = dn$ e $g(n) = c + c \lg n$

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



Solução: Ao invés de comparar todo n, comparar apenas para n suficientemente grande

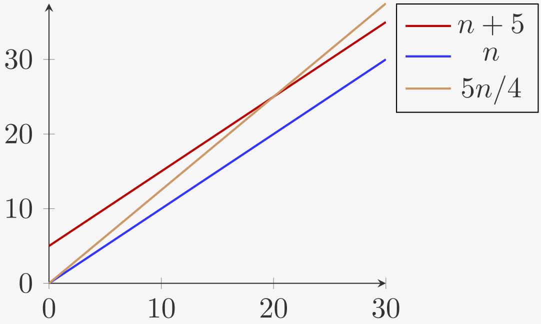
- Para todo $n \geq n_0$ para algum n_0

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é a mesma
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes



Solução: Ao invés de comparar f com g, comparar com $c \cdot g$, onde c é uma constante

Notação Assintótica

Dizemos que uma função $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ se

- existe uma constante c
- existe uma constante n_0

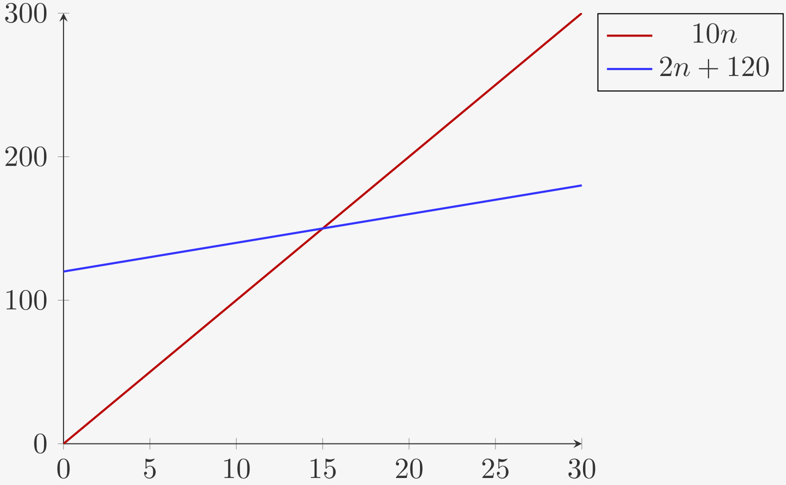
tal que

$$f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0$$

$f(n) = \mathrm{O}(g(n))$ se, para todo n suficientemente grande, $f(n)$ é menor ou igual a um múltiplo de $g(n)$

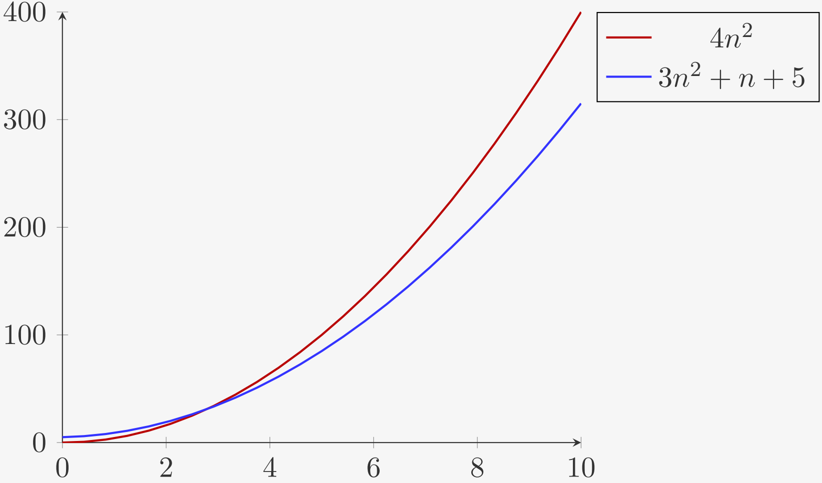
Exemplo: $2n + 120 = \mathrm{O}(n)$

Basta escolher, por exemplo, $c = 10$ e $n_0 = 15$



Exemplo: $3n^2 + n + 5 = \mathrm{O}(n^2)$

Basta escolher, por exemplo, $c = 4$ e $n_0 = 4$



Outros exemplos

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathrm{O}(1) \\
1.000.000 &= \mathrm{O}(1) \\
5n + 2 &= \mathrm{O}(n) \\
5n^2 + 5n + 2 &= \mathrm{O}(n^2) \\
\log_2 n &= \mathrm{O}(\log_{10} n) \\
\log_{10} n &= \mathrm{O}(\log_2 n)
\end{aligned}
$$

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$
  - quando n dobra, o tempo aumenta em uma constante
  - Ex: Busca binária
  - Outros exemplos durante o curso

Nomenclatura e consumo de tempo

- $\mathrm{O}(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $\mathrm{O}(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

- $\mathrm{O}(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadruplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

- $\mathrm{O}(n^3)$: cúbico
  - quando n dobra, o tempo octuplica
  - Ex: multiplicação de matrizes $n \times n$

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é menor ou igual a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Ou seja, podemos ter feito uma análise "folgada"

- achamos que o algoritmo é muito pior do que é realmente

No curso, não faremos análises "folgadas"

- existe uma maneira formal de lidar com isso (notação Θ)
- mas não precisamos desse formalismo em MC202

Exercício

1. Mostre que $n + \lg n = \mathrm{O}(n)$
2. Mostre que $15n = \mathrm{O}(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq \mathrm{O}(n)$
   - Essa análise é folgada, já que $15n = \mathrm{O}(n)$
3. Mostre que $42n = \mathrm{O}(n^2)$ mas que $n^2 \neq \mathrm{O}(42n)$
   - Essa análise é folgada, já que $42n = \mathrm{O}(n)$

Soluções

1. $(n + \lg n = O(n))$ Para $n > 0$, $n + \lg n \leq n + n = 2n$. Portanto basta escolher $c = 2$ e $n_0 = 1$.

2. $(15n = O(n \lg n))$ Para $n \geq 2$, $15n \leq 15n \lg n$. Portanto basta escolher $c = 15$ e $n_0 = 2$.

$(n \lg n \neq \mathrm{O}(n))$ Suponha que existam c e n_0 tal que $n \lg n \leq cn$ para todo $n \geq n_0$. Seja $n' > \max\{n_0, 2^c\}$, temos que $n' \lg n' > n' \lg 2^c = cn'$, uma contradição.

3. $(42n = O(n^2))$ Para $n \geq 42$, $42n \leq n \cdot n = n^2$. Portanto basta escolher $c = 1$ e $n_0 = 42$.

$(n^2 \neq \mathrm{O}(42n))$ Suponha que existam c e n_0 tal que $n^2 \leq 42cn$ para todo $n \geq n_0$. Seja $n' > \max\{n_0, 42c\}$, temos que $n'^2 = n' \cdot n' > 42cn'$, uma contradição.

Dúvidas?