

MC-202
Árvores Binárias

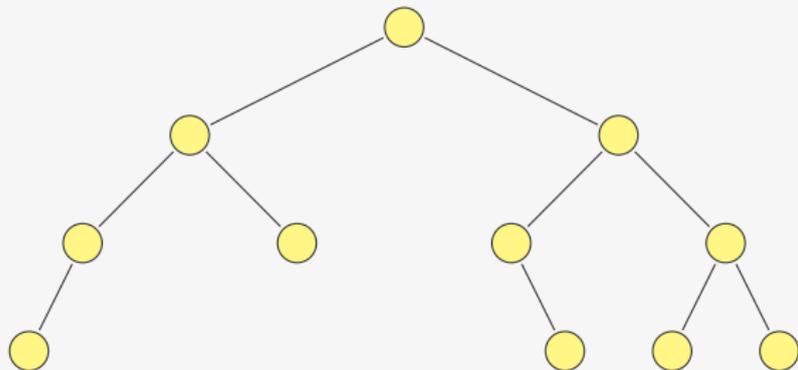
Lehilton Pedrosa
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

Árvores Binárias

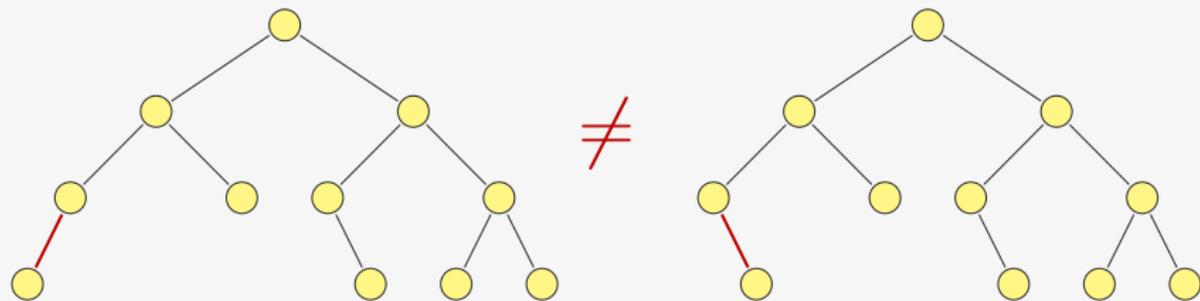
Exemplo de uma árvore binária:



Uma árvore binária é:

- Ou o conjunto vazio
- Ou um nó conectado a duas árvores binárias

Comparando com atenção

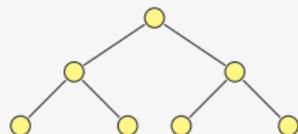
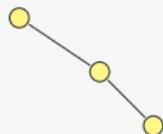


Ordem dos filhos é relevante!

Relação entre altura e número de nós

Se a altura é h , então a árvore:

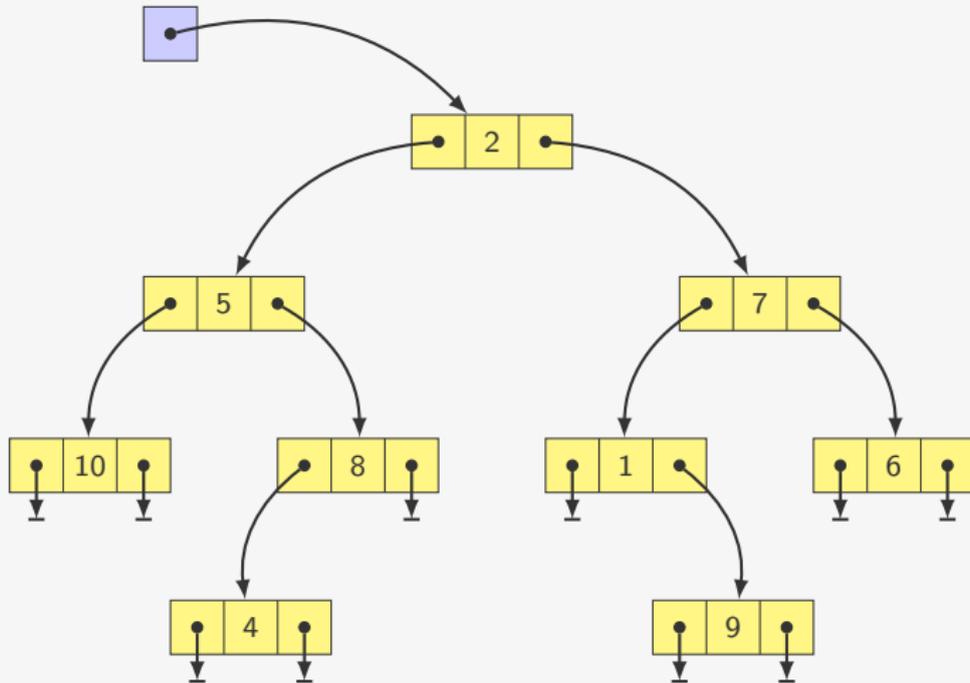
- tem no mínimo h nós
- tem no máximo $2^h - 1$ nós



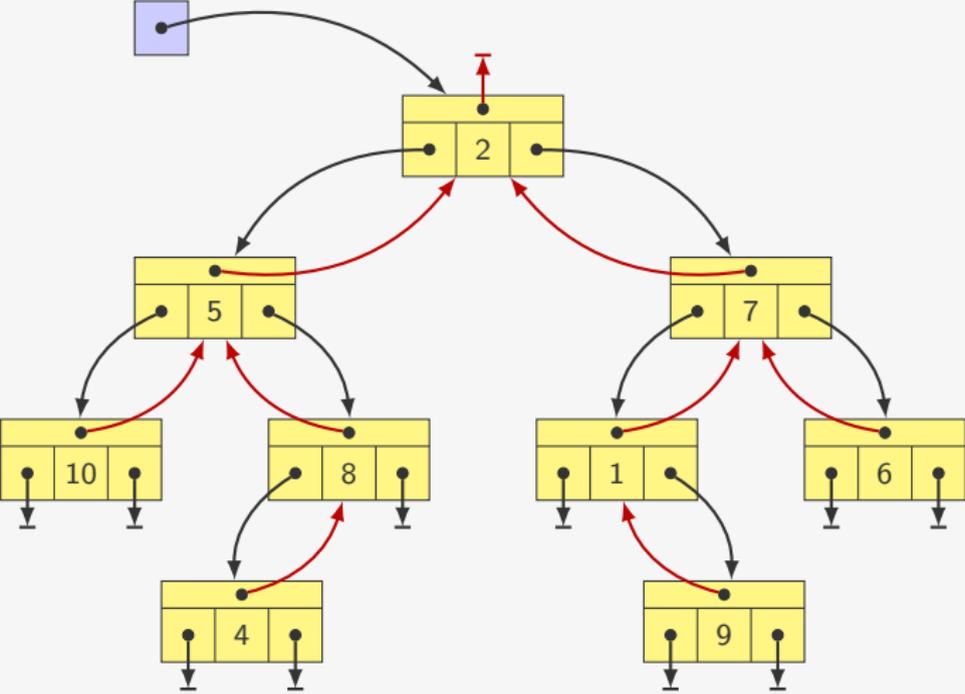
Se a árvore tem $n \geq 1$ nós, então:

- a altura é no mínimo $\lceil \lg(n + 1) \rceil$
 - quando a árvore é completa
- a altura é no máximo n
 - quando cada nó não-terminal tem apenas um filho

Implementação



Implementação com ponteiro para pai



Implementação em C

```
1 typedef struct no *p_no;
2
3 struct no {
4     int dado;
5     p_no esq, dir; /* pai */
6 };
7
8 p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir);
9
10 p_no procurar_no(p_no raiz, int x);
11
12 int numero_nos(p_no raiz);
13
14 int altura(p_no raiz);
```

Criando uma árvore e buscando

```
1 p_no criar_arvore(int x, p_no esq, p_no dir) {
2     p_no r = malloc(sizeof(struct no));
3     r->dado = x;
4     r->esq = esq;
5     r->dir = dir;
6     return r;
7 }
```

Árvores são estruturas definidas recursivamente

- basta observar a função `criar_arvore`
- faremos muitos algoritmos recursivos

```
1 p_no procurar_no(p_no raiz, int x) {
2     p_no esq;
3     if (raiz == NULL || raiz->dado == x)
4         return raiz;
5     esq = procurar_no(raiz->esq, x);
6     if (esq != NULL)
7         return esq;
8     return procurar_no(raiz->dir, x);
9 }
```

Número de nós e altura

Como calcular o número de nós da árvore?

```
1 int numero_nos(p_no raiz) {
2     if (raiz == NULL)
3         return 0;
4     return numero_nos(raiz->esq) + numero_nos(raiz->dir) + 1;
5 }
```

Como calcular a altura da árvore?

```
1 int altura(p_no raiz) {
2     int h_esq, h_dir;
3     if (raiz == NULL)
4         return 0;
5     h_esq = altura(raiz->esq);
6     h_dir = altura(raiz->dir);
7     return 1 + (h_esq > h_dir ? h_esq : h_dir);
8 }
```

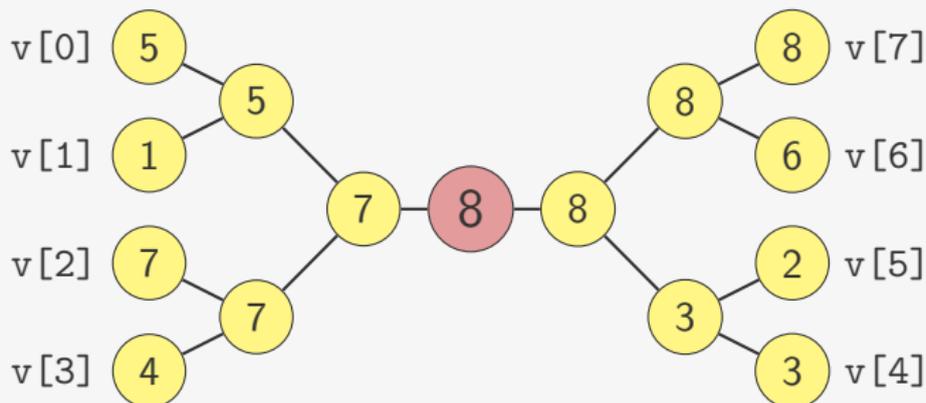
Exercício: faça versões sem recursão dos algoritmos acima

- você vai precisar de uma pilha...

Exemplo: Criando um torneio

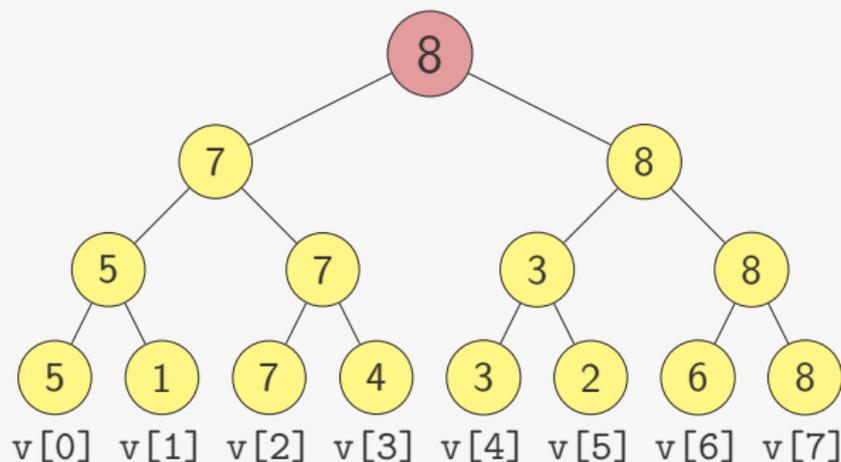
Dado um vetor v com n números, queremos criar um torneio

- Decidir qual é o maior número em um esquema de chaves
 - Ex.: para $n = 8$, temos quartas de final, semifinal e final



É uma **árvore binária**, onde o valor do pai é o maior valor dos seus filhos

Exemplo: Criando um torneio

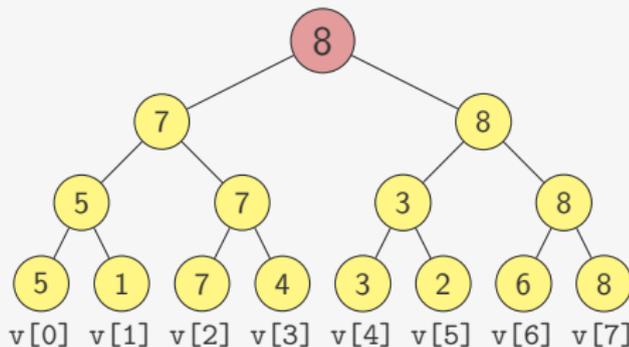


Para resolver o torneio:

- resolva o torneio das duas subárvores recursivamente
- decida o vencedor

Exemplo: Criando um torneio

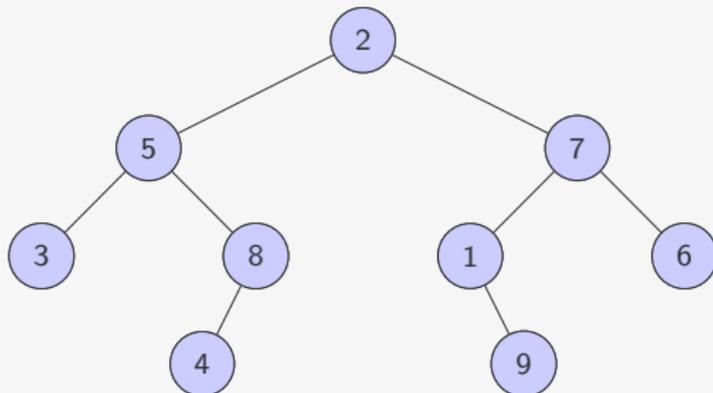
```
1 p_no torneio(int *v, int l, int r) {
2   p_no esq, dir;
3   int valor, m = (l + r) / 2;
4   if (l == r)
5     return criar_arvore(v[l], NULL, NULL);
6   esq = torneio(v, l, m);
7   dir = torneio(v, m + 1, r);
8   valor = esq->dado > dir->dado ? esq->dado : dir->dado;
9   return criar_arvore(valor, esq, dir);
10 }
```



Percorrendo os nós - Pré-ordem

A pré-ordem

- primeiro visita (processa) a raiz
- depois a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita

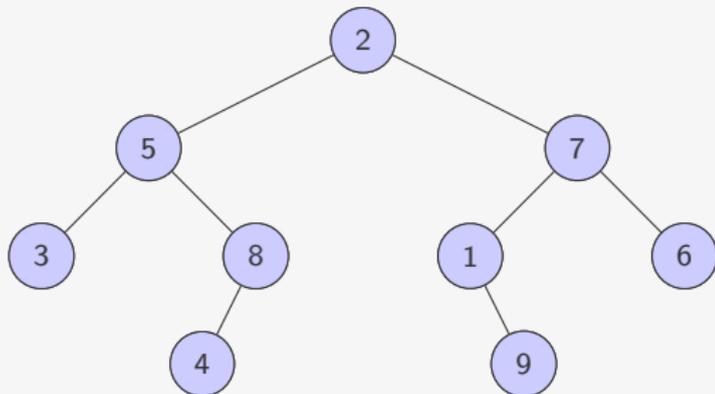


Ex: 2, 5, 3, 8, 4, 7, 1, 9, 6

Percorrendo os nós - Pós-ordem

A pós-ordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois a subárvore direita
- e por último visita a raiz

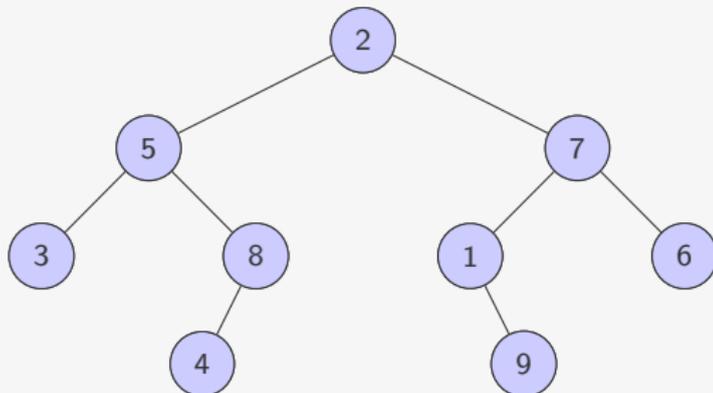


Ex: 3, 4, 8, 5, 9, 1, 6, 7, 2

Percorrendo os nós - Inordem

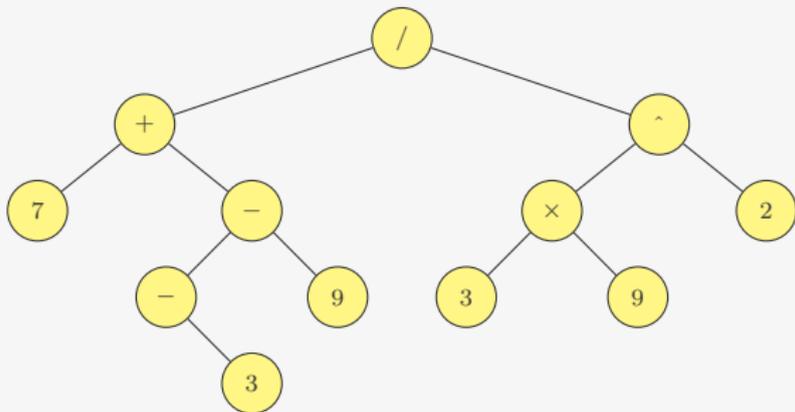
A inordem

- primeiro visita a subárvore esquerda
- depois visita a raiz
- e por última visita a subárvore direita



Ex: 3, 5, 4, 8, 2, 1, 9, 7, 6

Percurso em profundidade e expressões



Notação

- **Pré-fixa:** / + 7 - - 3 9 ^ × 3 9 2
- **Pós-fixa:** 7 3 - 9 - + 3 9 × 2 ^ /
- **Infixa:** 7 + - 3 - 9 / 3 × 9 ^ 2

Implementação de percurso em profundidade

```
1 void pre_ordem(p_no raiz) {
2     if (raiz != NULL) {
3         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
4         pre_ordem(raiz->esq);
5         pre_ordem(raiz->dir);
6     }
7 }
```

```
1 void pos_ordem(p_no raiz) {
2     if (raiz != NULL) {
3         pos_ordem(raiz->esq);
4         pos_ordem(raiz->dir);
5         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
6     }
7 }
```

```
1 void inordem(p_no raiz) {
2     if (raiz != NULL) {
3         inordem(raiz->esq);
4         printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
5         inordem(raiz->dir);
6     }
7 }
```

Percurso em profundidade com pilha

Como implementar sem usar recursão?

```
1 void pre_ordem(p_no raiz) {
2     p_pilha p; /* pilha de p_no */
3     p = criar_pilha();
4     empilhar(p, raiz);
5     while(!pilha_vazia(p)) {
6         raiz = desempilhar(p);
7         if (raiz != NULL) {
8             empilhar(p, raiz->dir);
9             empilhar(p, raiz->esq);
10            printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11        }
12    }
13    destruir_pilha(p);
14 }
```

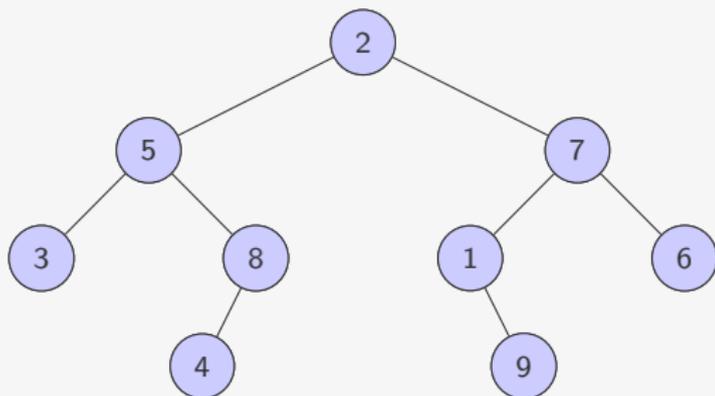
Por que empilhamos `raiz->dir` primeiro?

- E se fosse o contrário?

Percorrendo os nós — em largura

O percurso em largura

- visita os nós por níveis
- da esquerda para a direita

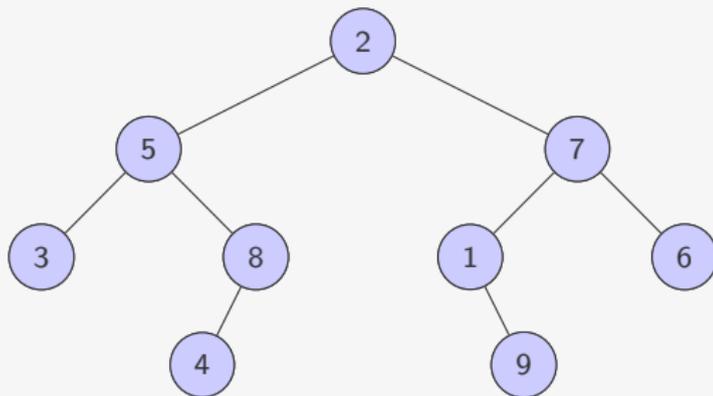


Ex: 2, 5, 7, 3, 8, 1, 6, 4, 9

Implementação do percurso em largura

Como implementar o percurso em largura?

- Usamos uma fila
- Colocamos a raiz na fila e depois
- pegamos um elemento da fila e enfileiramos seus filhos



Fila

Percurso em largura

```
1 void percurso_em_largura(p_no raiz) {
2     p_fila f;
3     f = criar_fila();
4     enfileirar(f, raiz);
5     while(!fila_vazia(f)) {
6         raiz = desenfileirar(f);
7         if (raiz != NULL) {
8             enfileirar(f, raiz->esq);
9             enfileirar(f, raiz->dir);
10            printf("%d ", raiz->dado); /* visita raiz */
11        }
12    }
13    destruir_fila(f);
14 }
```

Agora enfileiramos `raiz->esq` primeiro

- E se fosse o contrário?

Exercício

Escreva uma função que calcula o número de folhas em uma árvore dada.

Solução

```
1 int folhas(p_no raiz) {
2     if (raiz == NULL)
3         return 0;
4     if (raiz->esq == NULL && raiz->dir == NULL)
5         return 1;
6     return folhas(raiz->esq) + folhas(raiz->dir);
7 }
```

Exercício

Escreva uma função recursiva que apaga todas as folhas de uma árvore que tenham a chave igual a um valor dado.

Solução

```
1 p_no apaga_folhas(p_no raiz, int x) {
2     if (raiz == NULL)
3         return NULL;
4     if (raiz->esq == NULL && raiz->dir == NULL &&
5         raiz->dado == x) {
6         free(raiz);
7         return NULL;
8     }
9     raiz->esq = apaga_folhas(raiz->esq, x);
10    raiz->dir = apaga_folhas(raiz->dir, x);
11    return raiz;
12 }
```

Exercício

Escreva uma função que compara se duas árvores binárias são iguais.

Solução

```
1 int iguais(p_no arvore1, p_no arvore2) {
2     if (arvore1 == NULL && arvore2 == NULL)
3         return 1;
4     if (arvore1 == NULL || arvore2 == NULL)
5         return 0;
6     return arvore1->dado == arvore2->dado &&
7         iguais(arvore1->esq, arvore2->esq) &&
8         iguais(arvore1->dir, arvore2->dir);
9 }
```

Dúvidas?