MC-202
Árvores Balanceadas

Lehilton Pedrosa
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

Eficiência da busca, inserção e remoção

Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

Eficiência da busca, inserção e remoção

Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Eficiência da busca, inserção e remoção

Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós

Eficiência da busca, inserção e remoção

Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

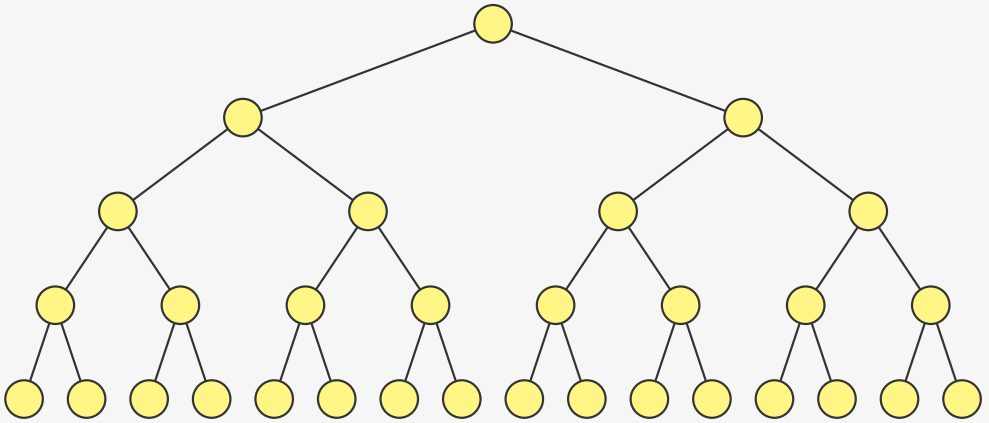
Ex: 31 nós

Eficiência da busca, inserção e remoção

Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



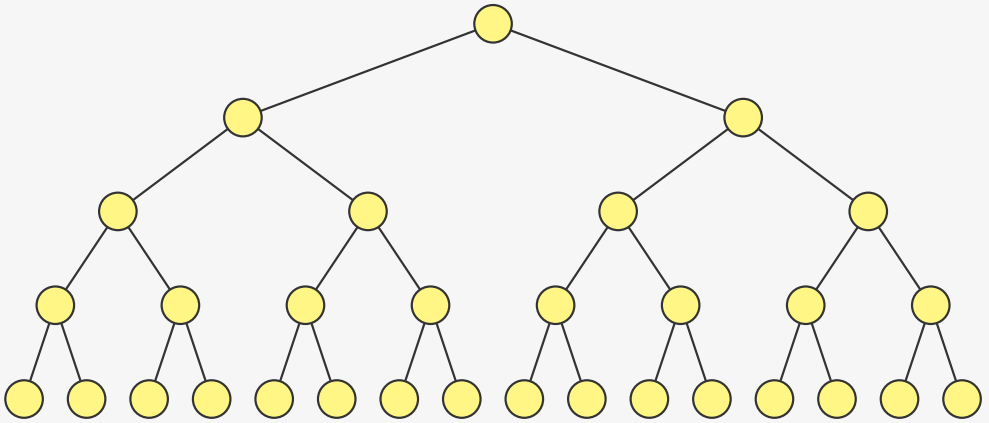
Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$

Eficiência da busca, inserção e remoção

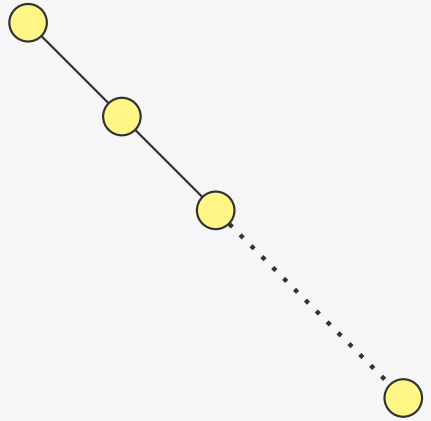
Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$



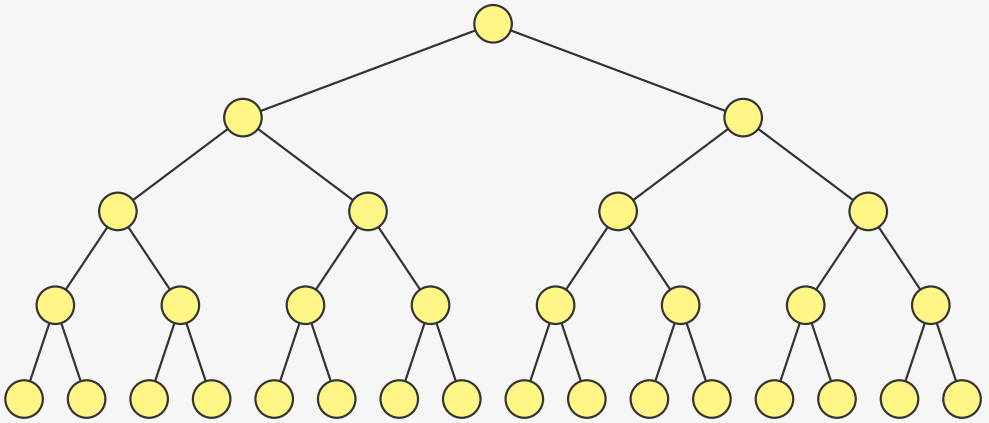
Pior árvore: n

Eficiência da busca, inserção e remoção

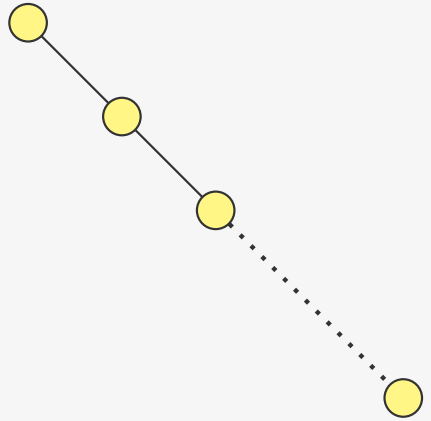
Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$



Pior árvore: n

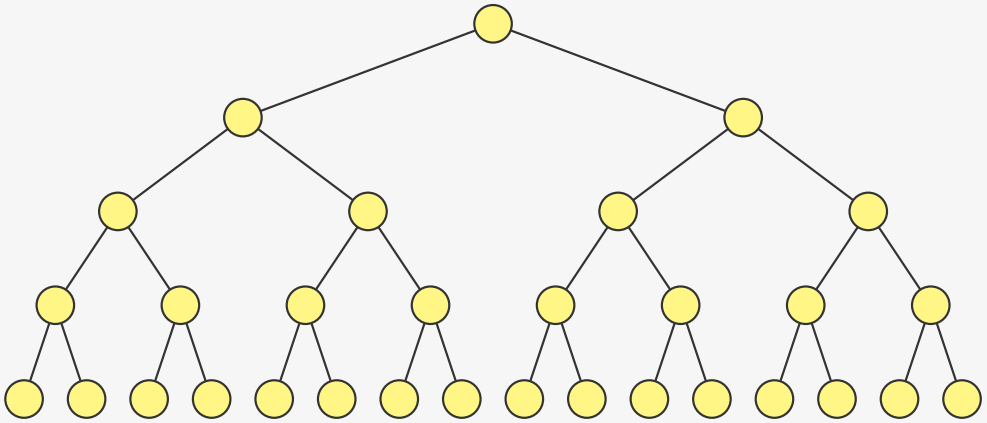
Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

Eficiência da busca, inserção e remoção

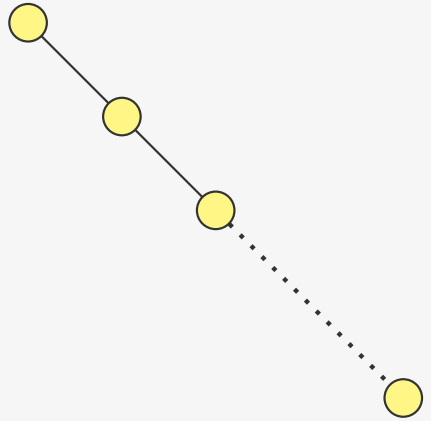
Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$



Pior árvore: n

Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

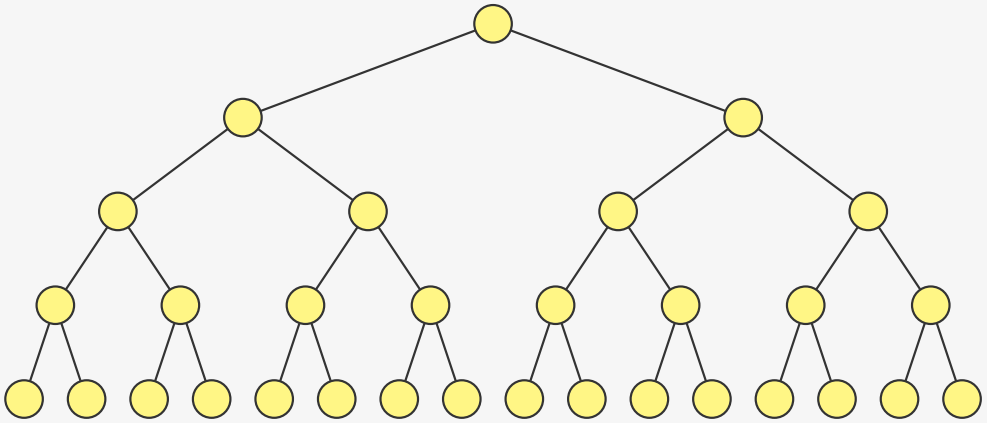
Veremos uma árvore balanceada

Eficiência da busca, inserção e remoção

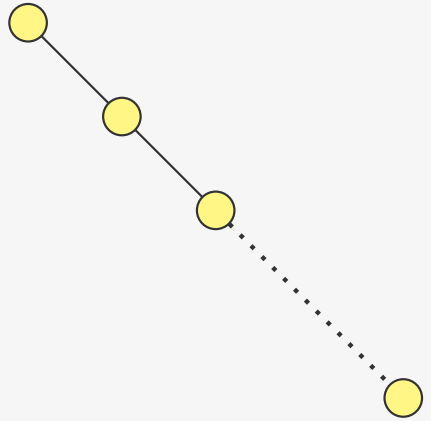
Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$



Pior árvore: n

Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

Veremos uma árvore balanceada

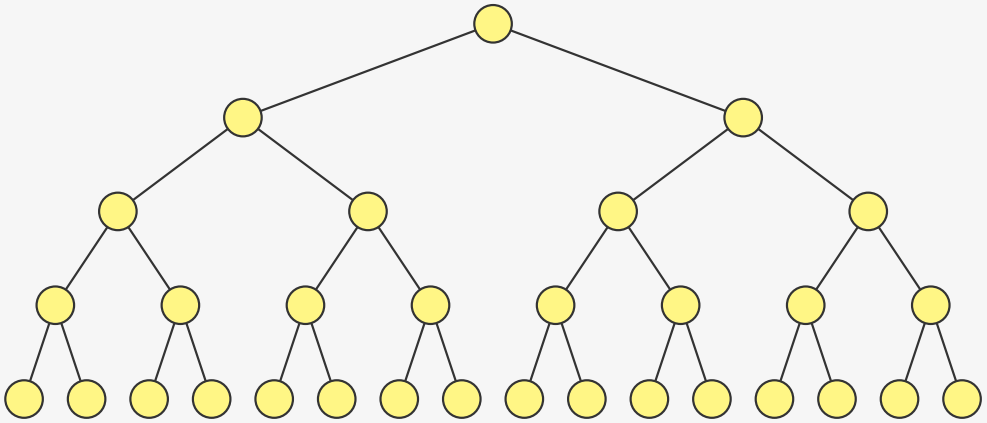
- Não é a melhor árvore possível, mas é "quase"

Eficiência da busca, inserção e remoção

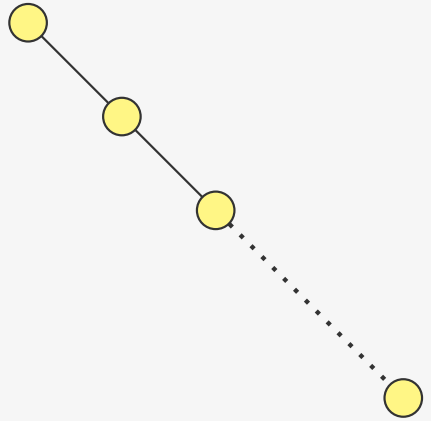
Qual é o tempo da busca, inserção e remoção em ABBs?

- depende da altura da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\lceil \lg n + 1 \rceil$



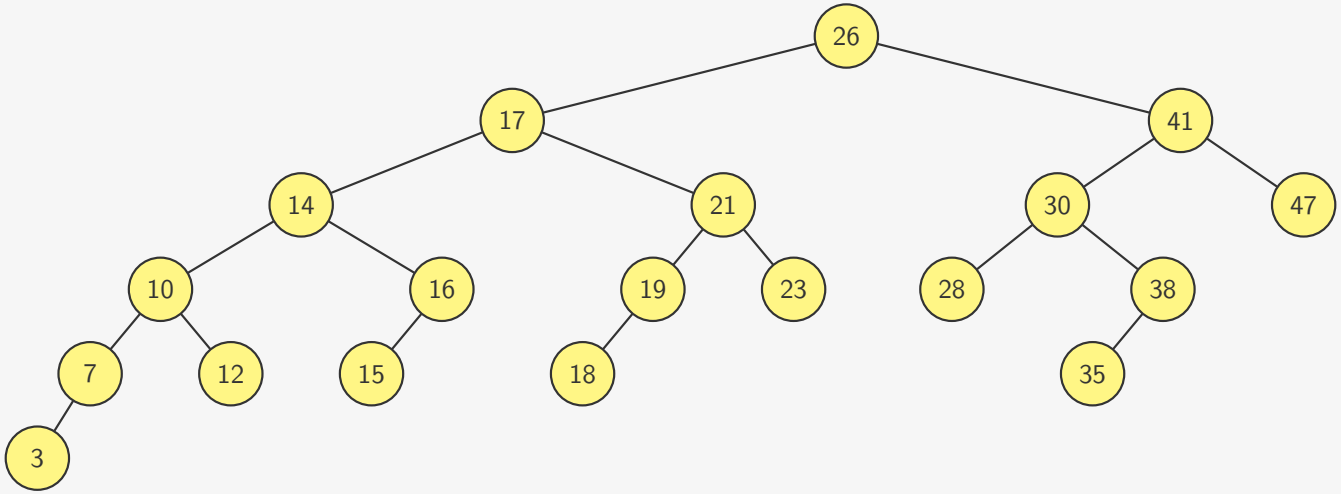
Pior árvore: n

Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

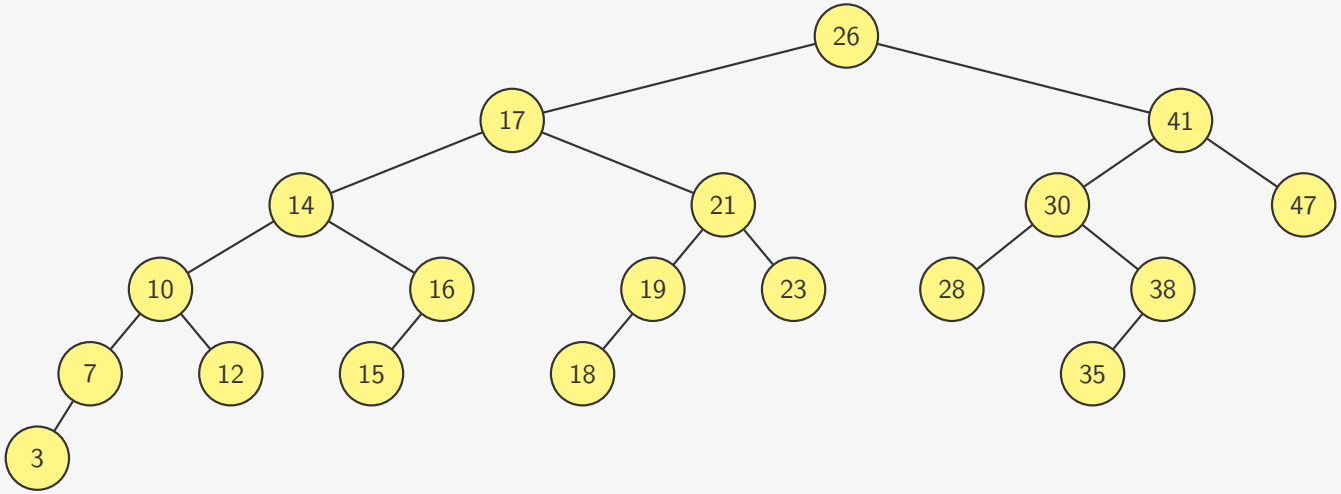
Veremos uma árvore balanceada

- Não é a melhor árvore possível, mas é "quase"
- Operações em $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores Rubro-Negras Esquerdistas

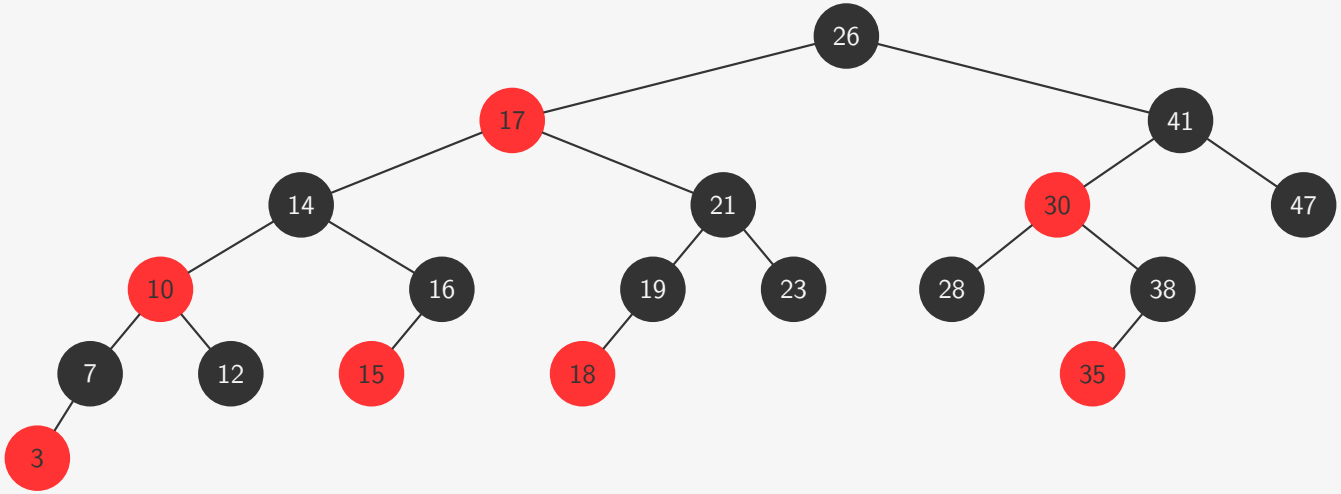


Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro**-**negra** esquerdista é uma ABB tal que:

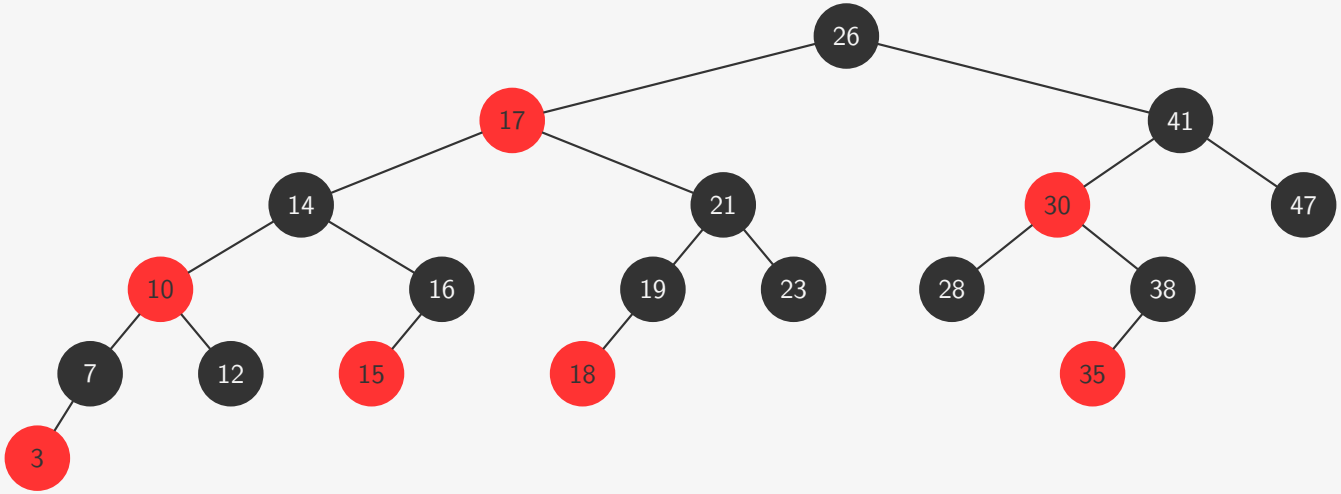
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**

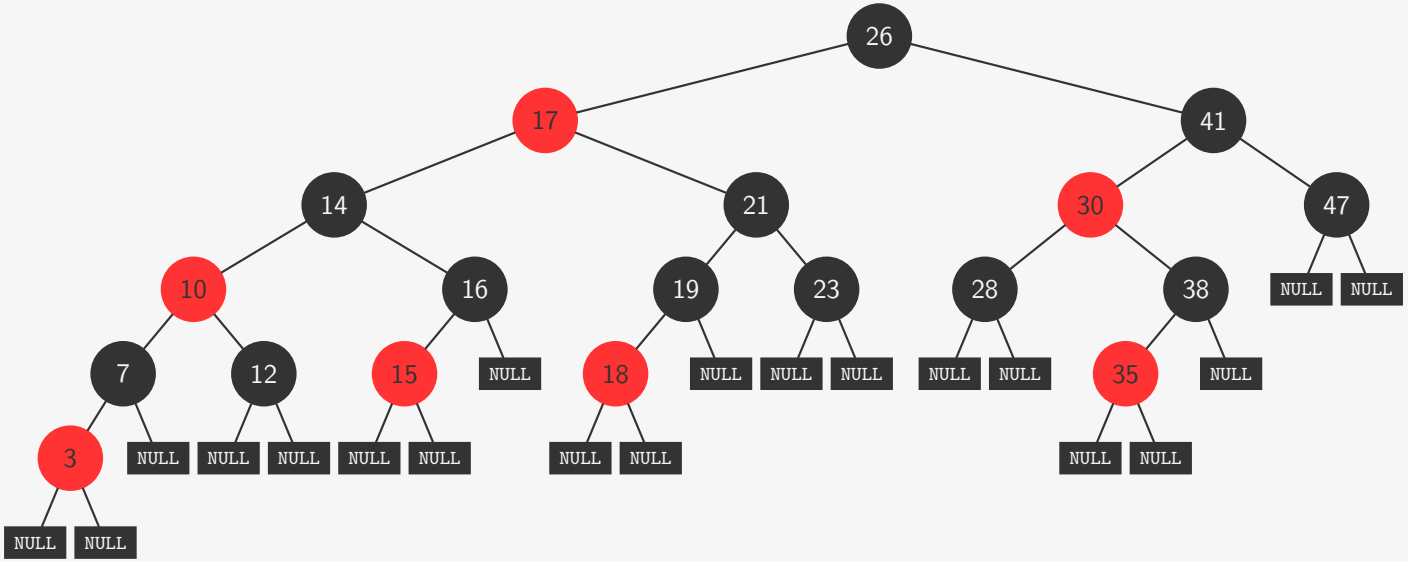
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**

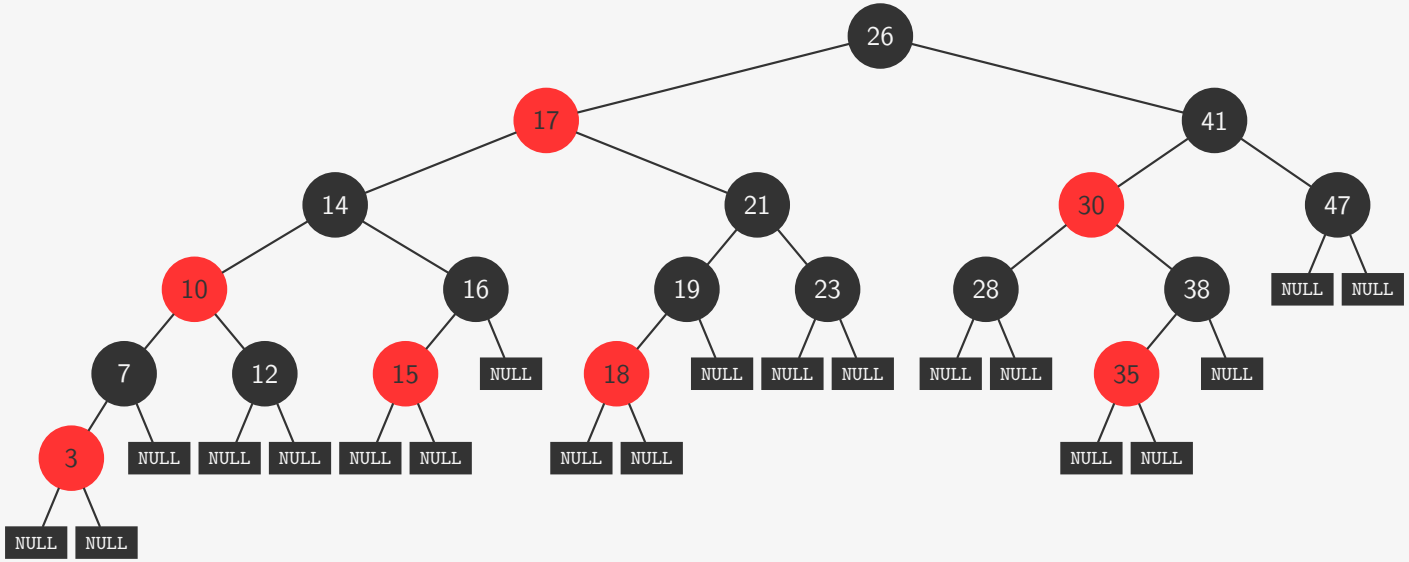
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**

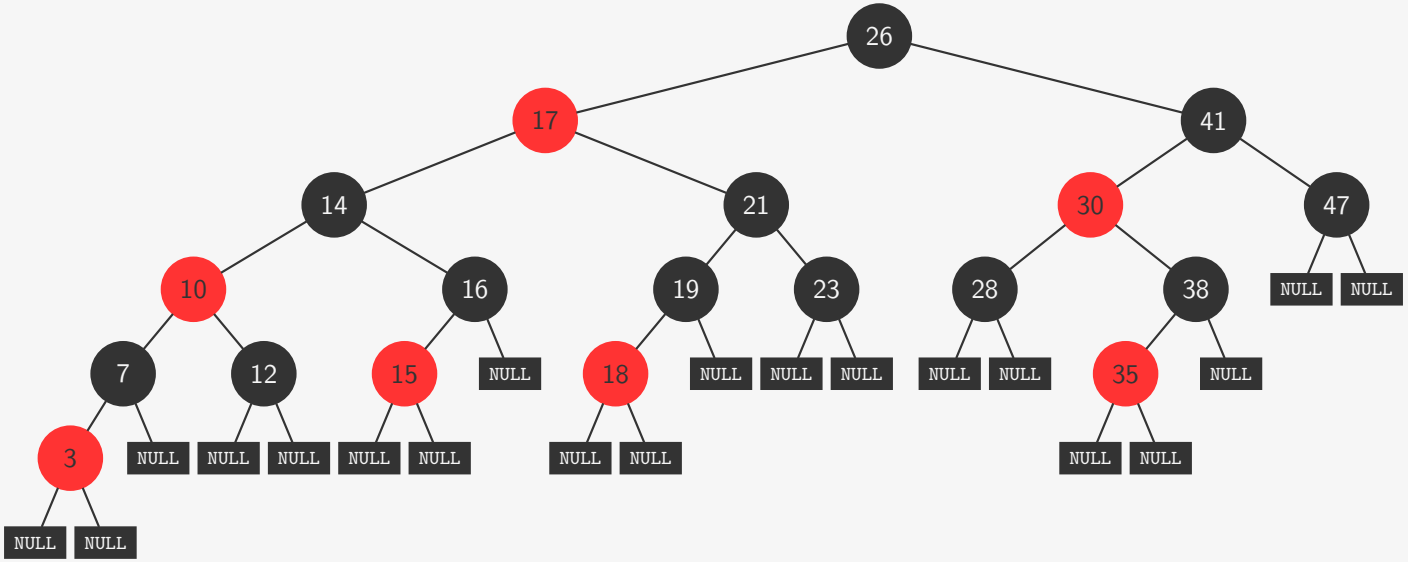
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus dois filhos são **pretos**

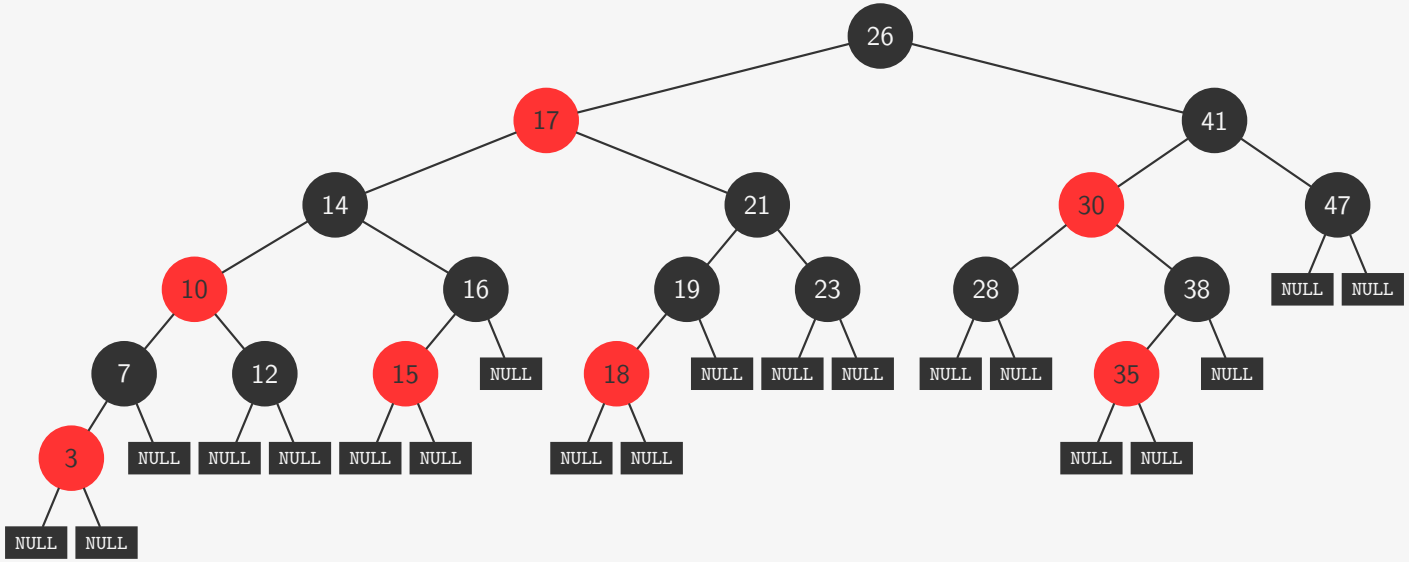
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus dois filhos são **pretos**
   - ele é o filho esquerdo do seu pai (por isso, *esquerdista*)

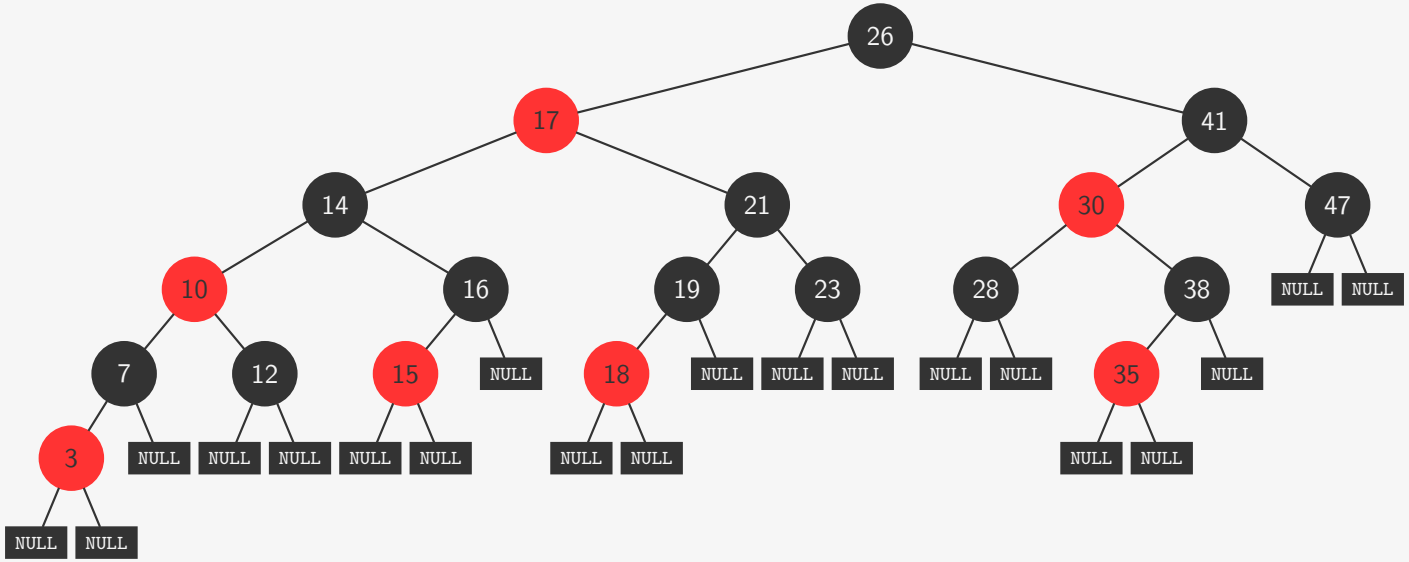
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus dois filhos são **pretos**
   - ele é o filho esquerdo do seu pai (por isso, *esquerdista*)
5. Em cada nó, todo caminho dele para uma de suas folhas descendentes tem a mesma quantidade de nós **pretos**

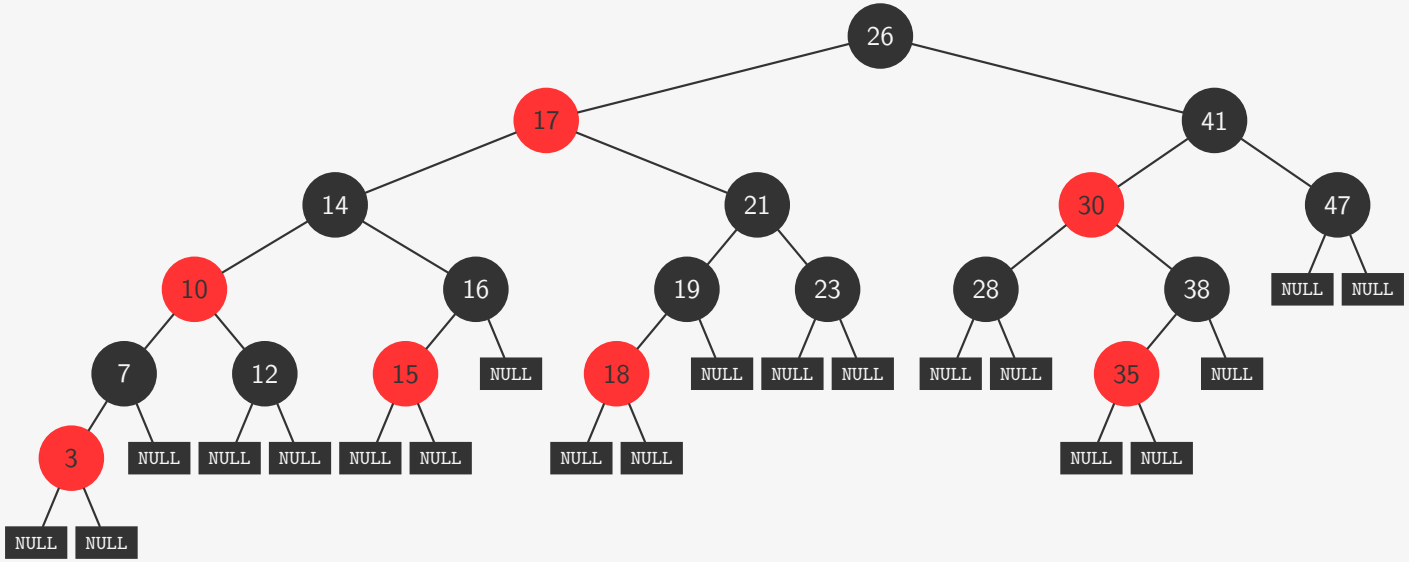
Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus dois filhos são **pretos**
   - ele é o filho esquerdo do seu pai (por isso, *esquerdista*)
5. Em cada nó, todo caminho dele para uma de suas folhas descendentes tem a mesma quantidade de nós **pretos**
   - Não contamos o nó

Árvores Rubro-Negras Esquerdistas



Uma árvore **rubro-negra** esquerdista é uma ABB tal que:

1. Todo nó é ou **vermelho** ou **preto**
2. A raiz é **preta**
3. As folhas são `NULL` e tem cor **preta**
4. Se um nó é **vermelho**, seus dois filhos são **pretos**
   - ele é o filho esquerdo do seu pai (por isso, *esquerdista*)
5. Em cada nó, todo caminho dele para uma de suas folhas descendentes tem a mesma quantidade de nós **pretos**
   - Não contamos o nó
   - É a altura-**negra** do nó

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos
  - ou seja, tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos
  - ou seja, tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

A altura-**negra** bh é pelo menos metade da altura h da árvore

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos
  - ou seja, tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

A altura-**negra** bh é pelo menos metade da altura h da árvore

- Não existe nó **vermelho** com filho **vermelho**

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos
  - ou seja, tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

A altura-**negra** bh é pelo menos metade da altura h da árvore

- Não existe nó **vermelho** com filho **vermelho**
- O número de nós não nulos n é $n \geq 2^{bh} - 1 \geq 2^{h/2} - 1$

Altura da Árvore Rubro-Negra Esquerdista

Seja bh a altura-**negra** da árvore.

A árvore tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

Para provar, basta utilizar indução matemática:

- Se $bh = 0$
  - a árvore é apenas uma folha `NULL`
  - tem exatamente $2^{bh} - 1 = 0$ nós não nulos
- Se $bh > 0$
  - seus filhos têm altura-**negra** pelo menos $bh - 1$
  - cada subárvore tem pelo menos $2^{bh-1} - 1$ nós não nulos
  - a árvore tem pelo menos $2(2^{bh-1} - 1) + 1$ nós não nulos
  - ou seja, tem pelo menos $2^{bh} - 1$ nós não nulos

A altura-**negra** bh é pelo menos metade da altura h da árvore

- Não existe nó **vermelho** com filho **vermelho**
- O número de nós não nulos n é $n \geq 2^{bh} - 1 \geq 2^{h/2} - 1$
- Ou seja, $h \leq 2 \lg(n + 1) = \mathrm{O}(\lg n)$

Alterando a Struct e testando a cor

```
1 enum cor {VERMELHO, PRETO};
2
3 typedef struct no *p_no;
4
5 struct no {
6   int chave;
7   enum cor cor;
8   p_no esq, dir;
9 };
```

Alterando a Struct e testando a cor

```
1 enum cor {VERMELHO, PRETO};
2
3 typedef struct no *p_no;
4
5 struct no {
6   int chave;
7   enum cor cor;
8   p_no esq, dir;
9 };
```

```
1 int ehVermelho(p_no x) {
2   if (x == NULL)
3     return 0;
4   return x->cor == VERMELHO;
5 }
```

Alterando a Struct e testando a cor

```
1 enum cor {VERMELHO, PRETO};
2
3 typedef struct no *p_no;
4
5 struct no {
6   int chave;
7   enum cor cor;
8   p_no esq, dir;
9 };
```

```
1 int ehVermelho(p_no x) {
2   if (x == NULL)
3     return 0;
4   return x->cor == VERMELHO;
5 }
```

```
1 int ehPreto(p_no x) {
2   if (x == NULL)
3     return 1;
4   return x->cor == PRETO;
5 }
```

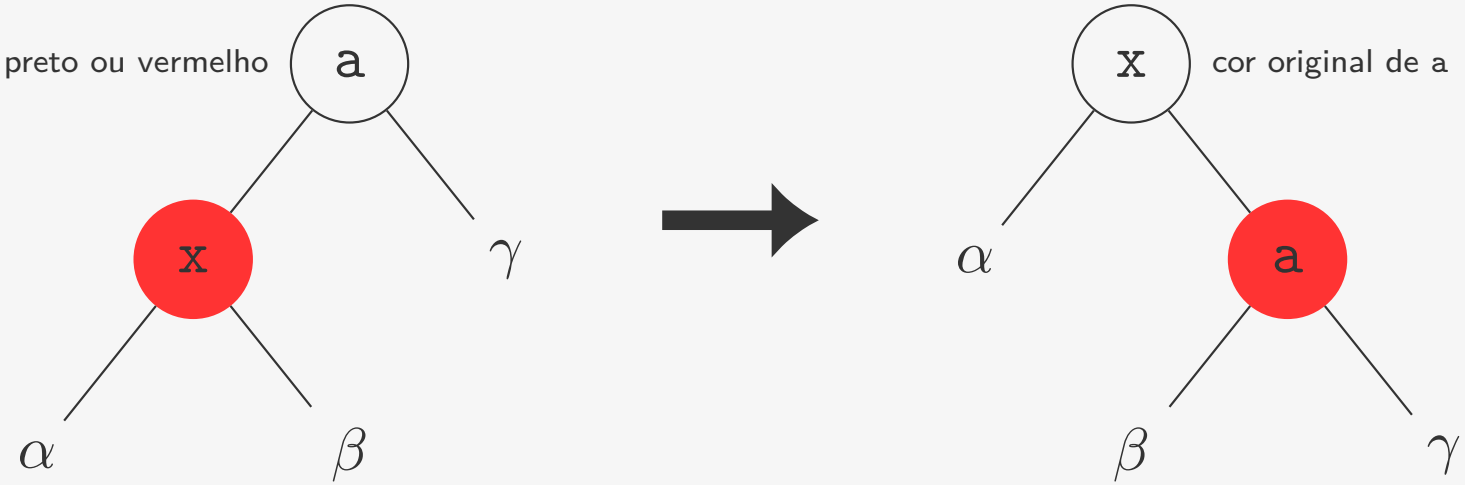
Rotação para a esquerda


```
1 p_no rotaciona_para_esquerda(p_no raiz) {
2   p_no x = raiz->dir;
3   raiz->dir = x->esq;
4   x->esq = raiz;
5   x->cor = raiz->cor;
6   raiz->cor = VERMELHO;
7   return x;
8 }
```

Note que a rotação:

- não estraga a propriedade de busca
- não estraga a propriedade da altura negra

Rotação para a direita

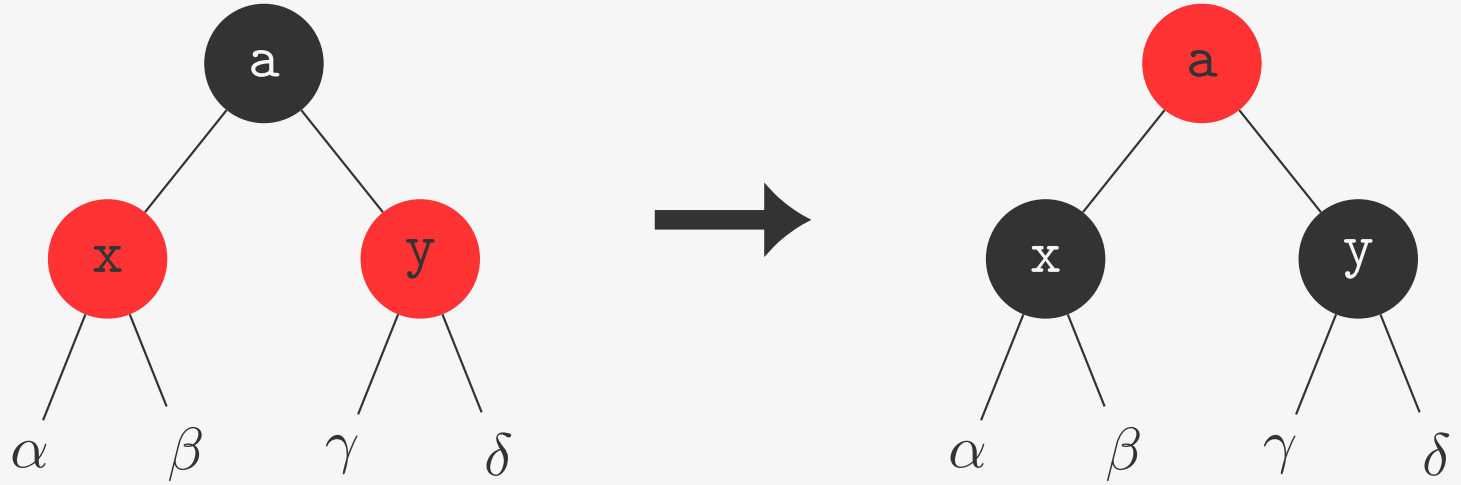



```
1 p_no rotaciona_para_direita(p_no raiz) {
2   p_no x = raiz->esq;
3   raiz->esq = x->dir;
4   x->dir = raiz;
5   x->cor = raiz->cor;
6   raiz->cor = VERMELHO;
7   return x;
8 }
```

Note que a rotação:

- não estraga a propriedade de busca
- não estraga a propriedade da altura negra

Subindo a cor




```
1 void sobe_vermelho(p_no raiz) {
2   raiz->cor = VERMELHO;
3   raiz->esq->cor = PRETO;
4   raiz->dir->cor = PRETO;
5 }
```

Subir a cor não estraga a propriedade da altura negra

- mas pode pintar a raiz de vermelho

Inserindo

Inserimos como em uma ABB, mas precisamos manter as propriedades da árvore **rubro-negra** esquerdista

```
1  p_no inserir_rec(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(struct no));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      novo->cor = VERMELHO;
8      return novo;
9    }
10   if (chave < raiz->chave)
11     raiz->esq = inserir_rec(raiz->esq, chave);
12   else
13     raiz->dir = inserir_rec(raiz->dir, chave);
14   /* corrige a árvore */
15   return raiz;
16 }
17
18 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
19   raiz = inserir_rec(raiz, chave);
20   raiz->cor = PRETO;
21   return raiz;
22 }
```

Inserindo

Inserimos como em uma ABB, mas precisamos manter as propriedades da árvore **rubro-negra** esquerdista

```
1  p_no inserir_rec(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(struct no));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      novo->cor = VERMELHO;
8      return novo;
9    }
10   if (chave < raiz->chave)
11     raiz->esq = inserir_rec(raiz->esq, chave);
12   else
13     raiz->dir = inserir_rec(raiz->dir, chave);
14   /* corrige a árvore */
15   return raiz;
16 }
17
18 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
19   raiz = inserir_rec(raiz, chave);
20   raiz->cor = PRETO;
21   return raiz;
22 }
```

Mantém a raiz preta

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
  raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
```

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
  raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
```

Nem que um nó **vermelho** seja filho esquerdo de nó **vermelho**:

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
  raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
```

Nem que um nó **vermelho** seja filho esquerdo de nó **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
  raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
```

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
  raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
```

Nem que um nó **vermelho** seja filho esquerdo de nó **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
  raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
```

Também não queremos que ambos filhos sejam **vermelhos**:

Corrigindo

- Iremos corrigir cada propriedade
  - supomos que as subárvores esquerda e direita já satisfazem todas propriedade, com exceção da raiz **preta**
  - e corrigimos as propriedades de `raiz`, uma por vez

Não queremos que só o filho direito seja **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
  raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
```

Nem que um nó **vermelho** seja filho esquerdo de nó **vermelho**:

```
if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
  raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
```

Também não queremos que ambos filhos sejam **vermelhos**:

```
if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
  sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 1

Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo

Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**

Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai

Inserção — Caso 1

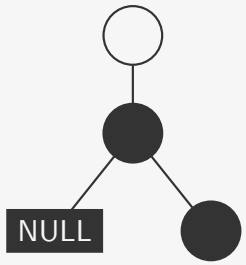
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito

Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)

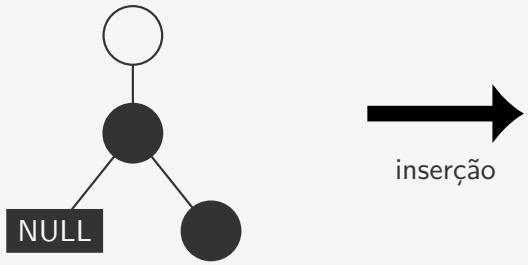
Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)



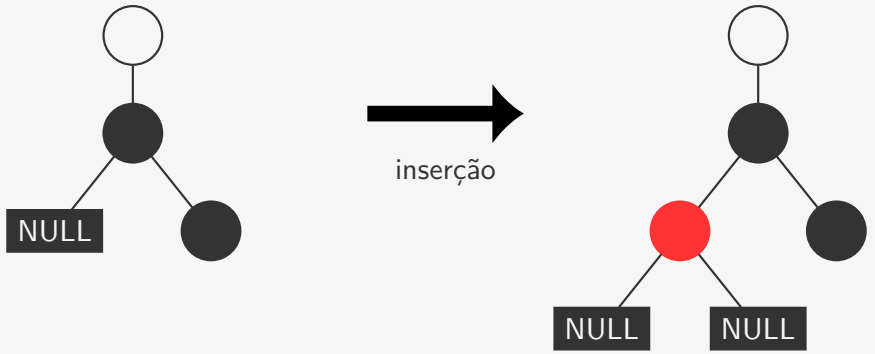
Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)



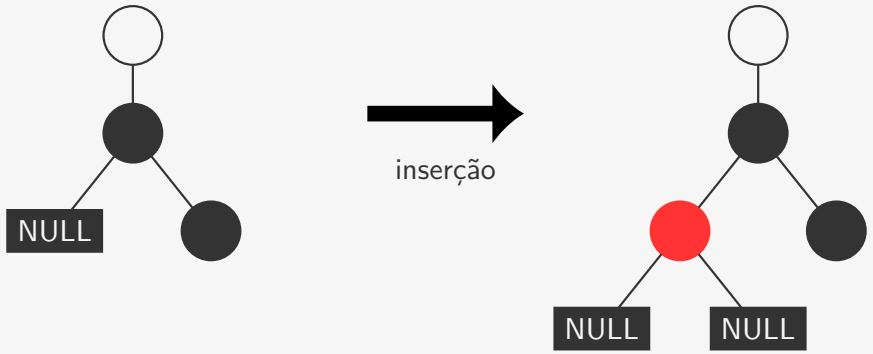
Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)



Inserção — Caso 1

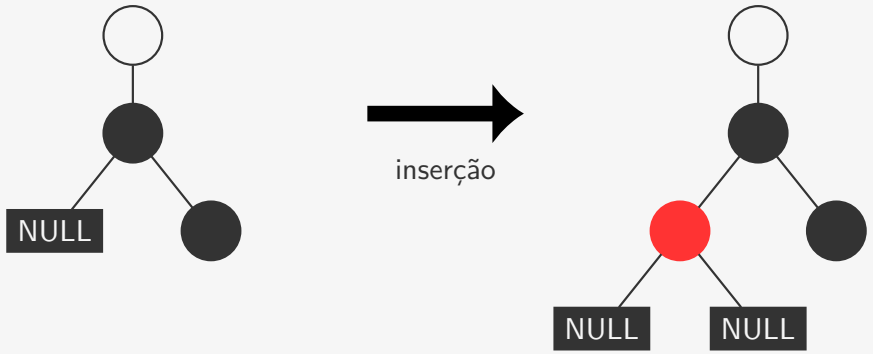
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 1

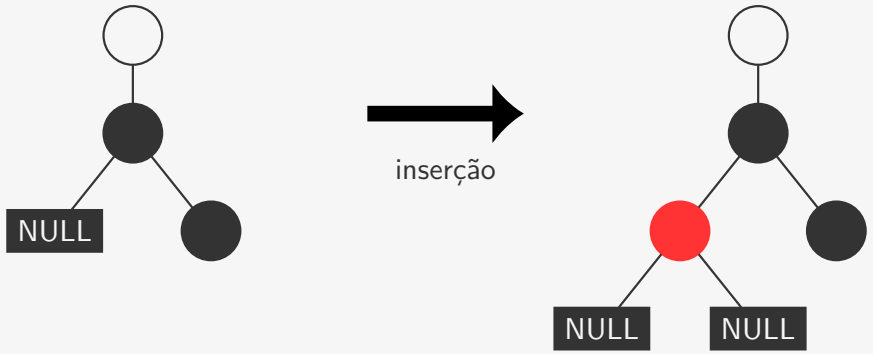
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 1

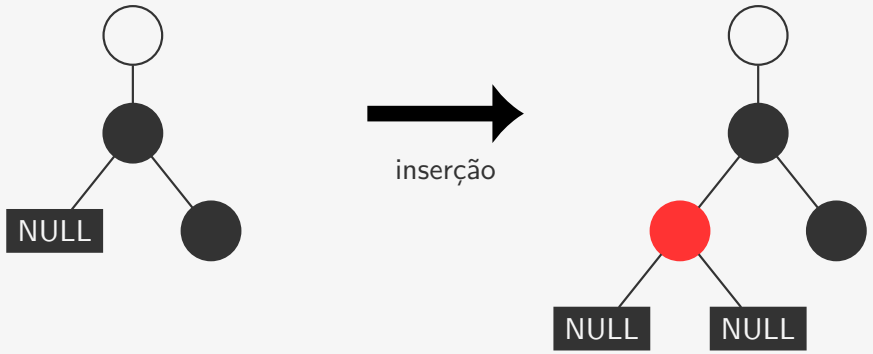
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 1

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho direito é **preto** (tem que ser — por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

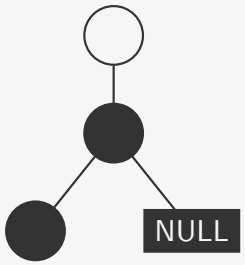
Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

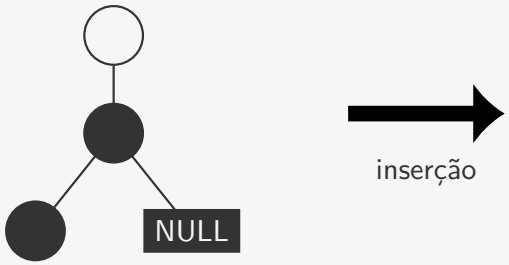
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

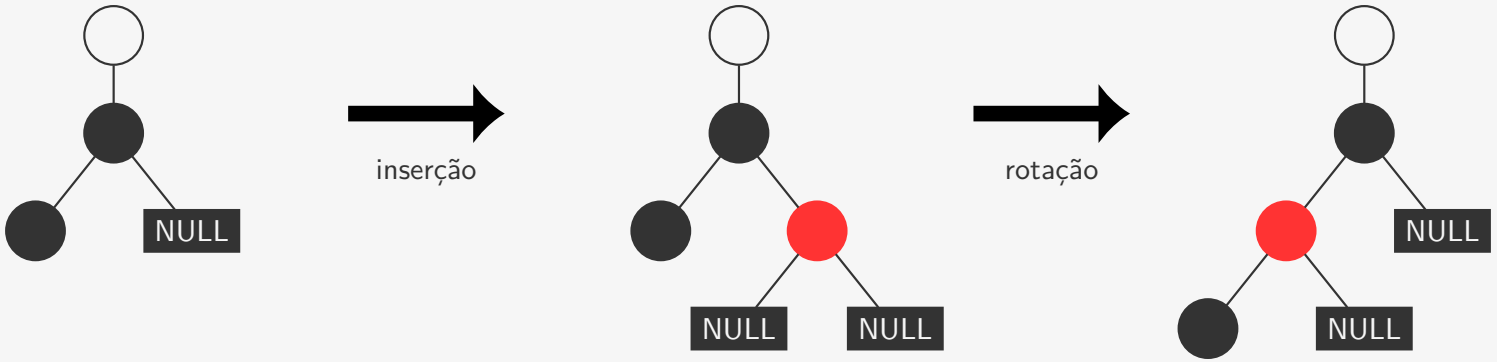
Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

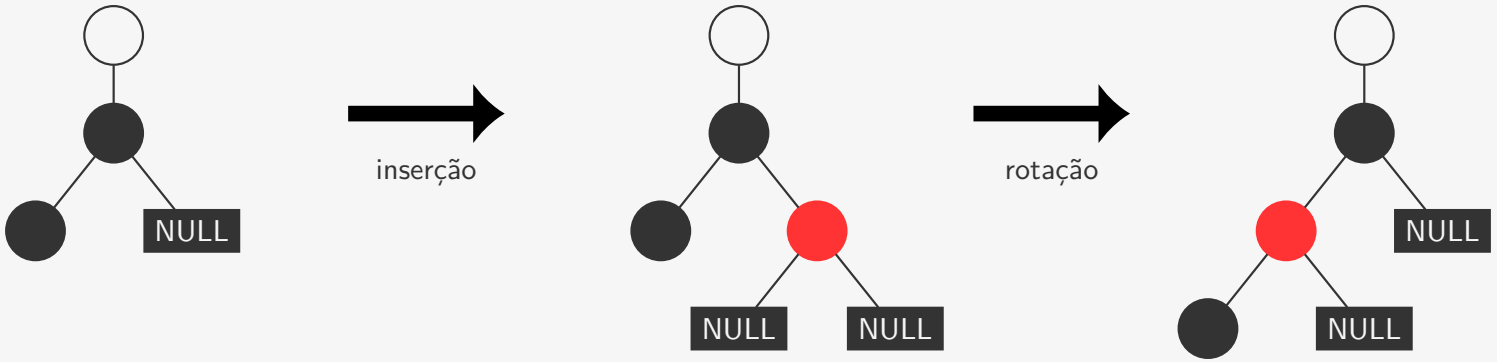
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

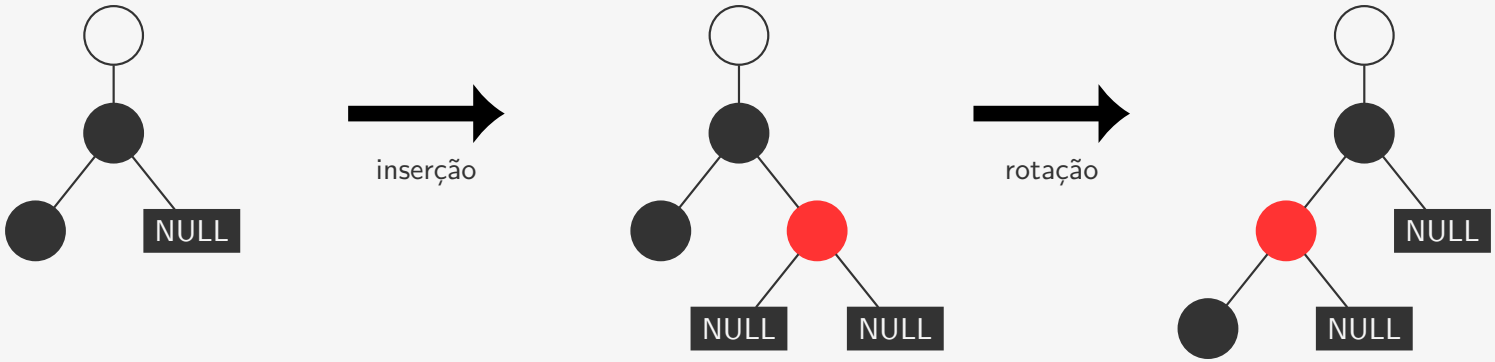
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 2

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **preto**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

- Inserimos no filho direito

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

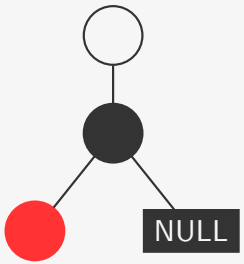
Inserção — Caso 3

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

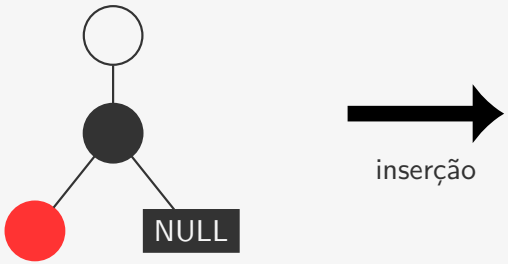
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

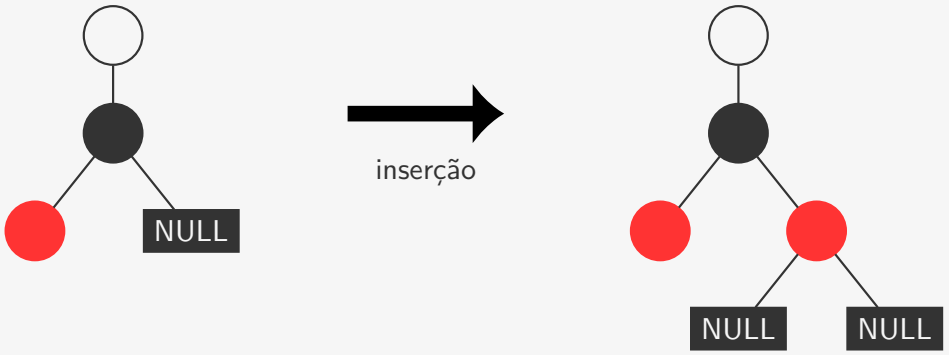
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

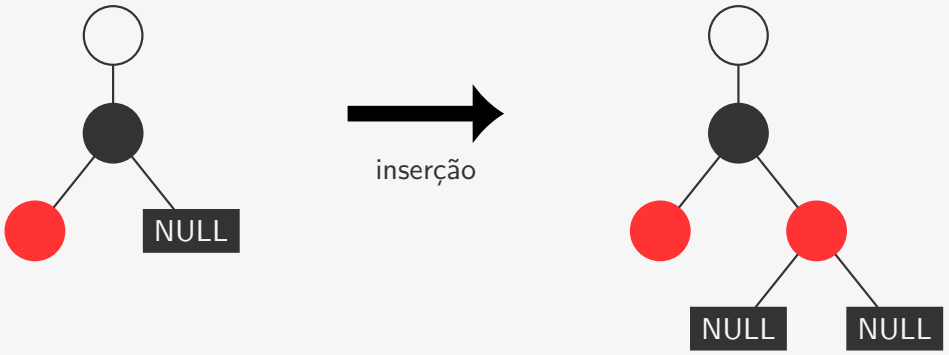
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

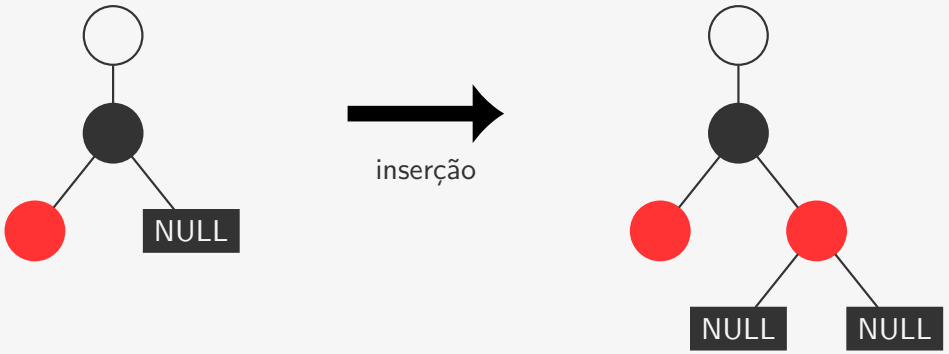
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

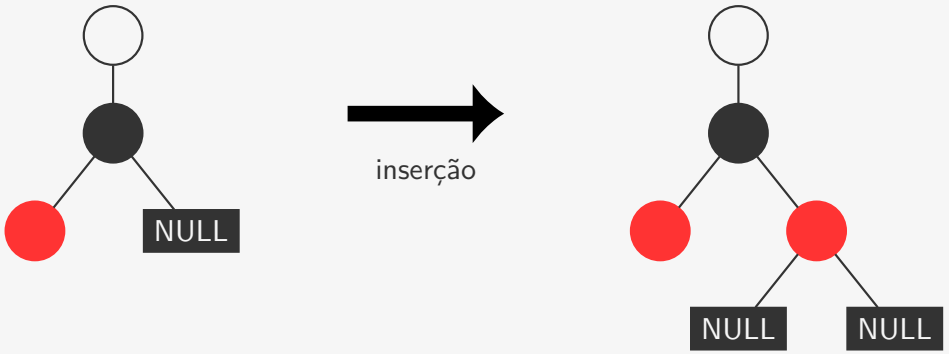
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

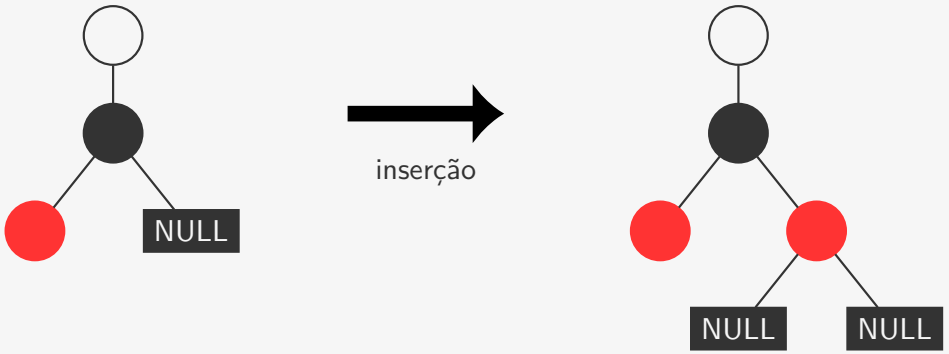
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

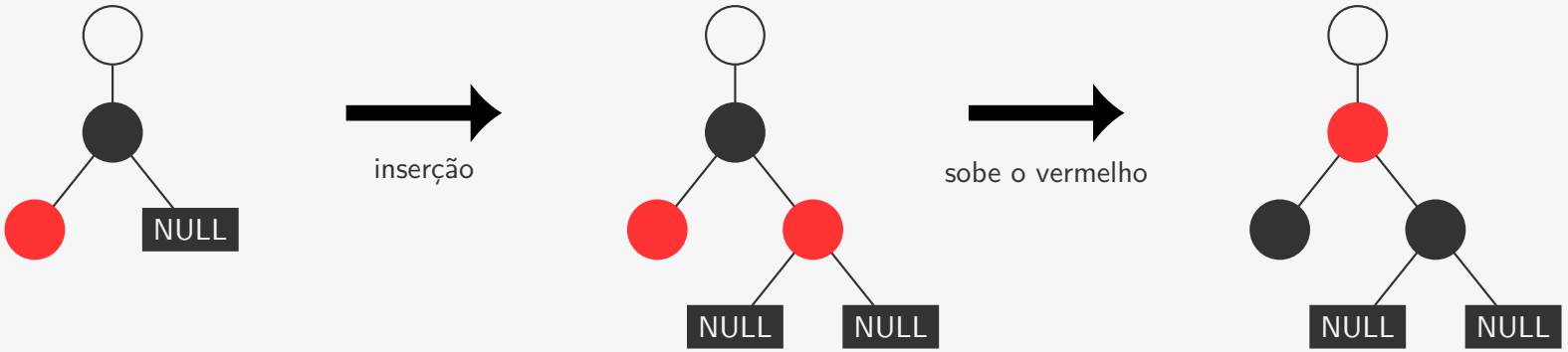
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 3

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **preto**
  - não sabemos a cor do seu pai
  - nem se ele é o filho esquerdo ou direito
- Filho esquerdo é **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

- Inserimos no filho esquerdo

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

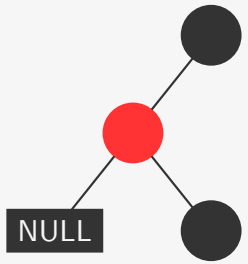
Inserção — Caso 4

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

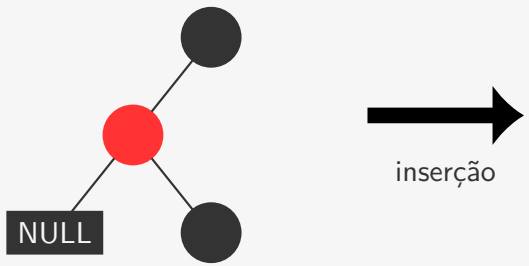
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

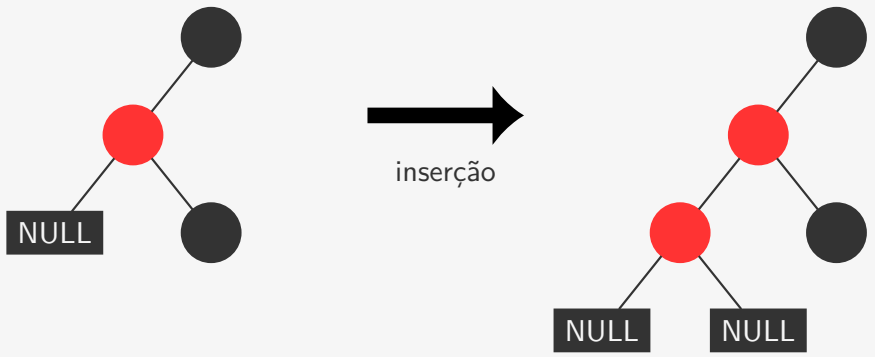
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

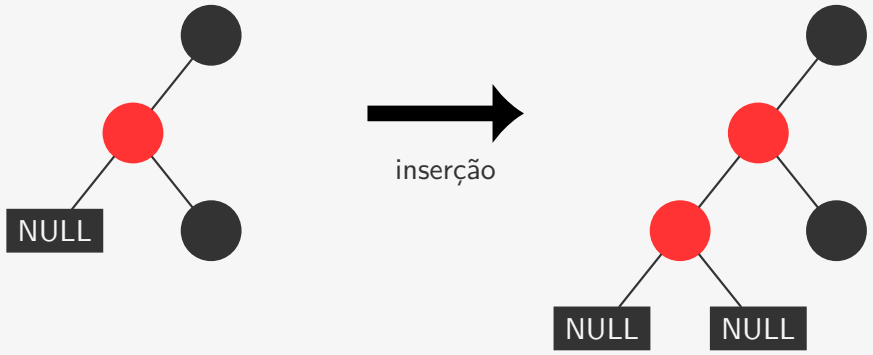
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

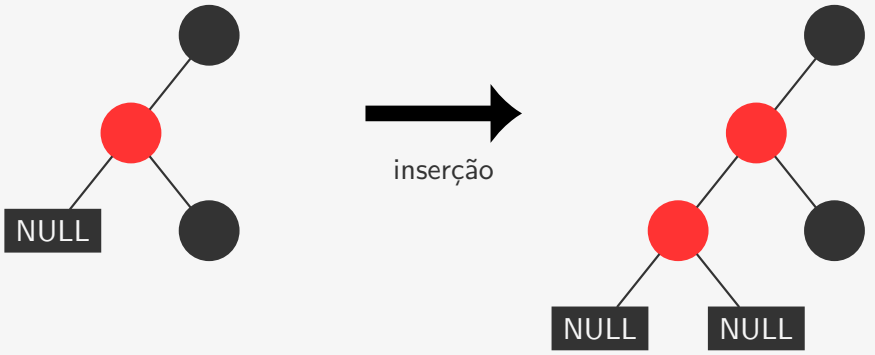
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

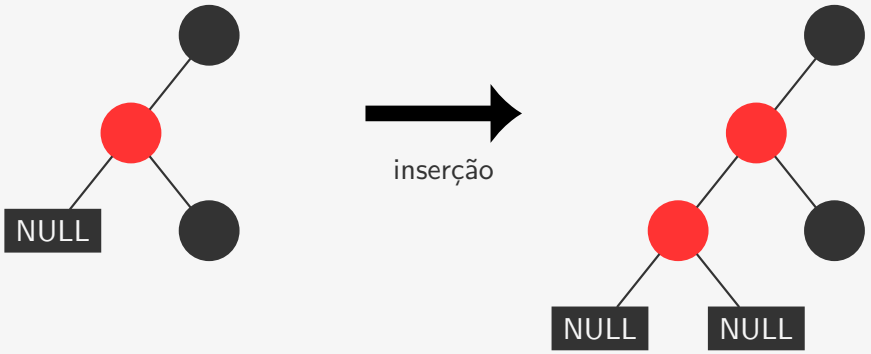
- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 4

- Inserimos no filho esquerdo
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz — por que?)
  - é o filho esquerdo (por que?)




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

- Inserimos no filho direito

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

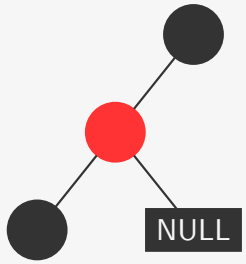
Inserção — Caso 5

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

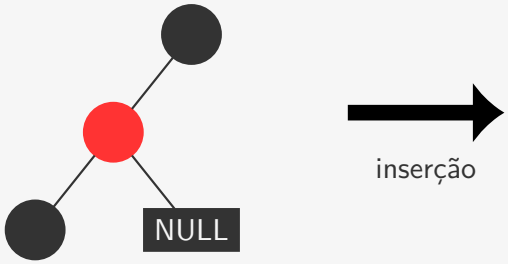
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1  /* corrige a árvore */
2  if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3    raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4  if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5    raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6  if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7    sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

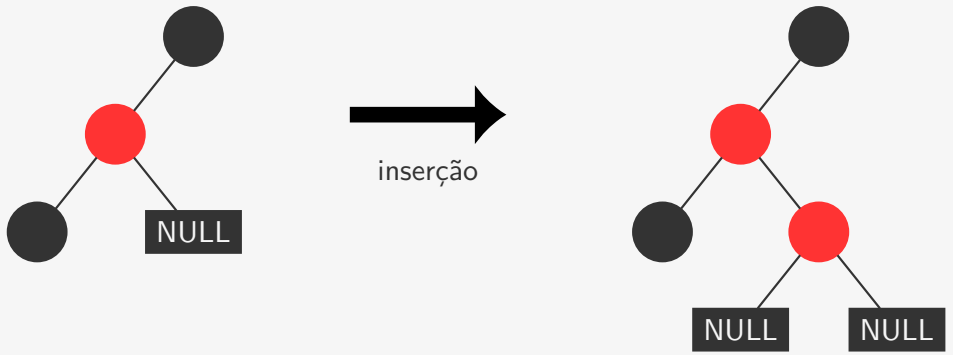
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

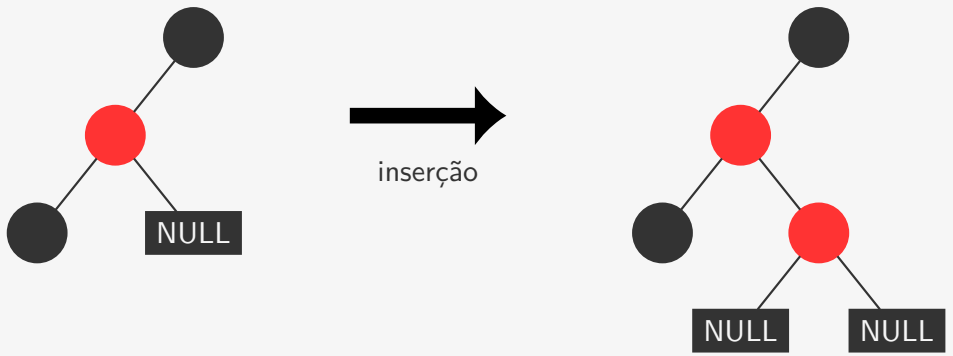
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

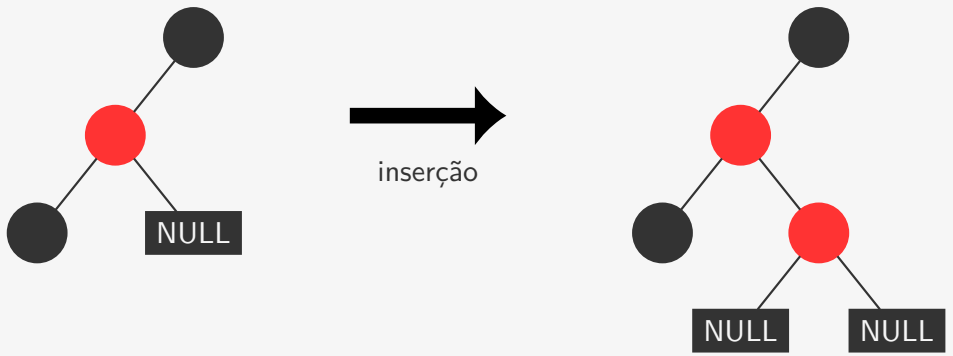
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

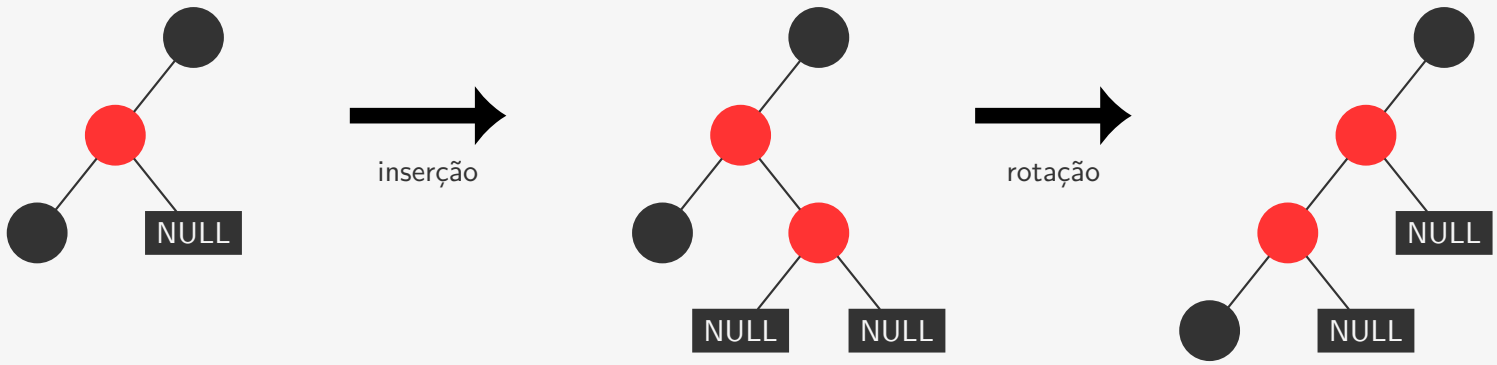
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

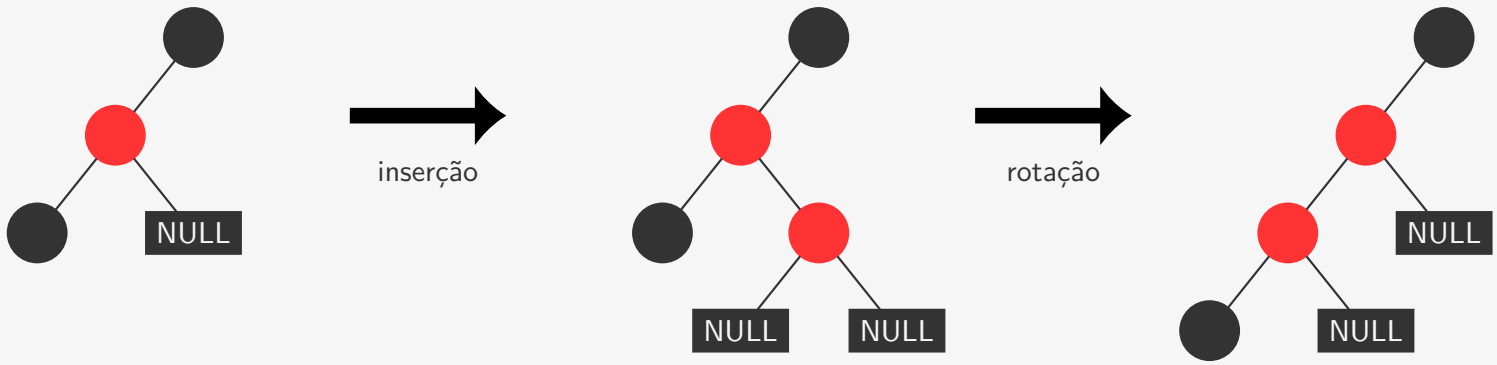
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

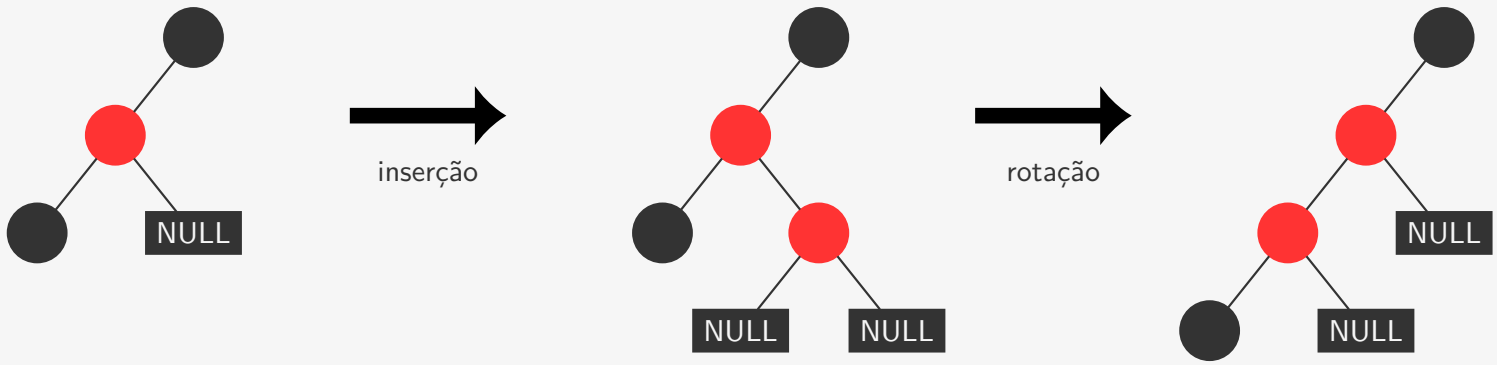
- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Caso 5

- Inserimos no filho direito
- Nó atual é **vermelho**
  - seu pai é **preto** (ele não é a raiz)
  - é o filho esquerdo




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda

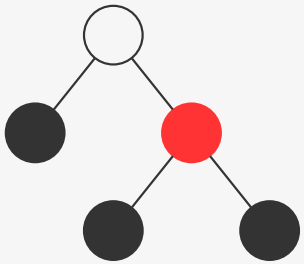
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda



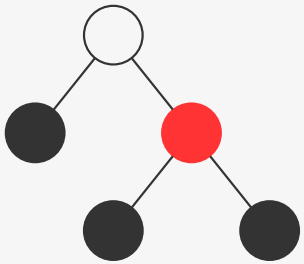
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda



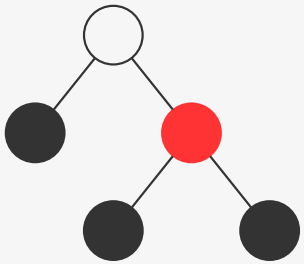
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda



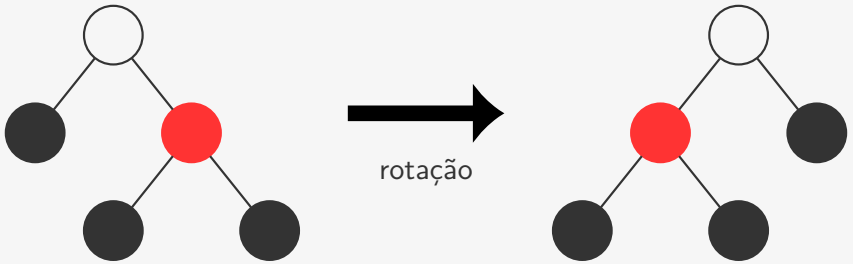
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda



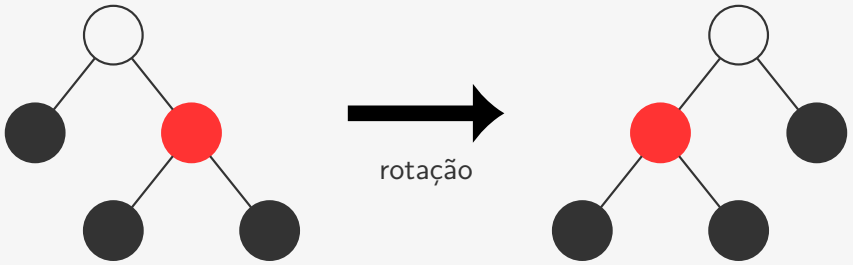

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda



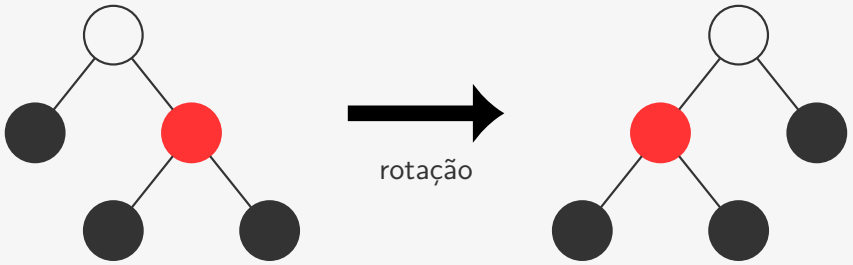

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **preto**, basta rotacionar para a esquerda




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor

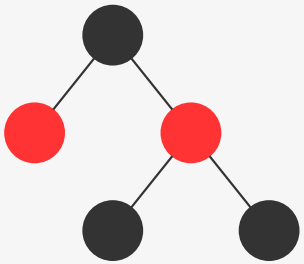
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor



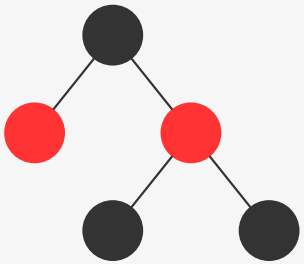
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor



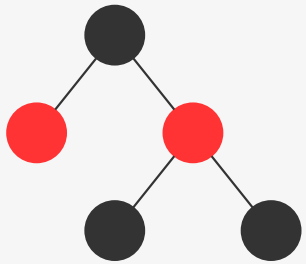
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor



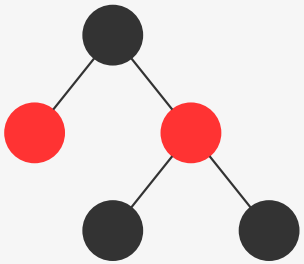
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor



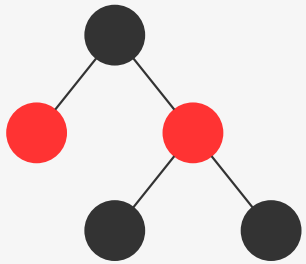
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor



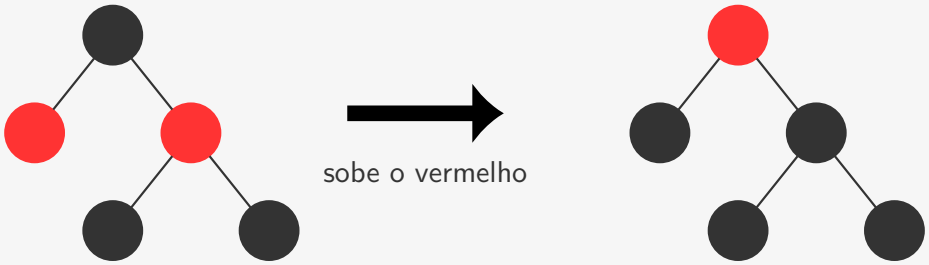
```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho direito seja **vermelho** (não é esquerdista)
- Só pode ter acontecido porque a cor **vermelha** subiu

Se o filho esquerdo for **vermelho**, basta subir a cor




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

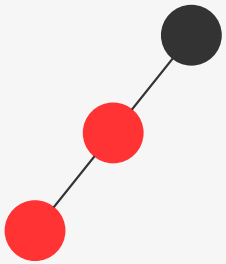
- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

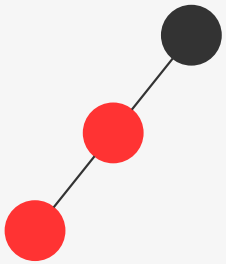


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

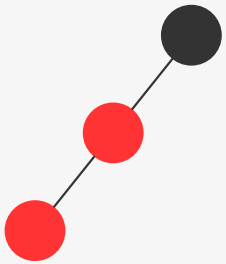


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

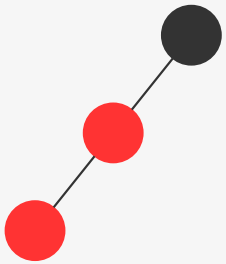


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

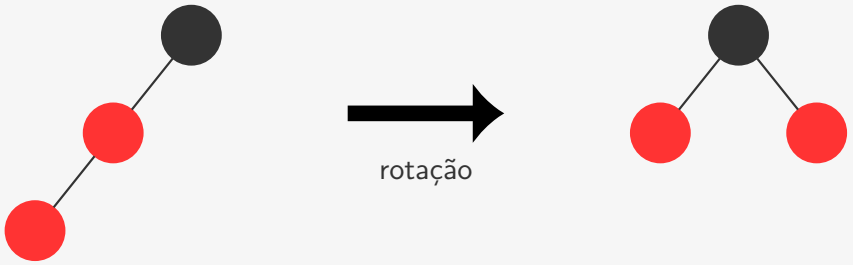


```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

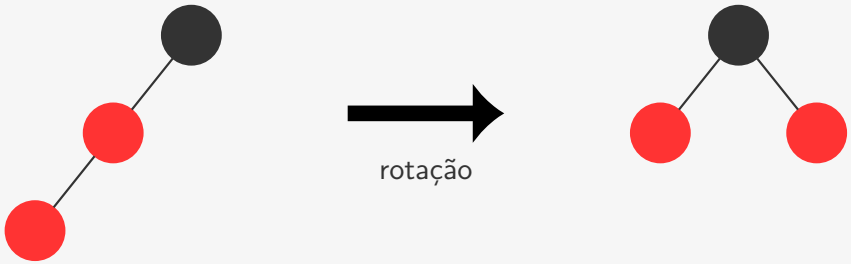



```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

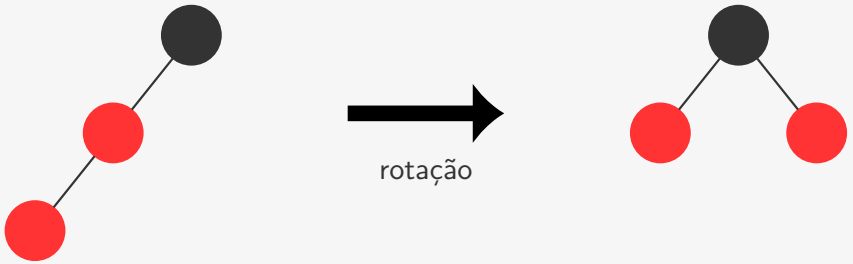



```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**

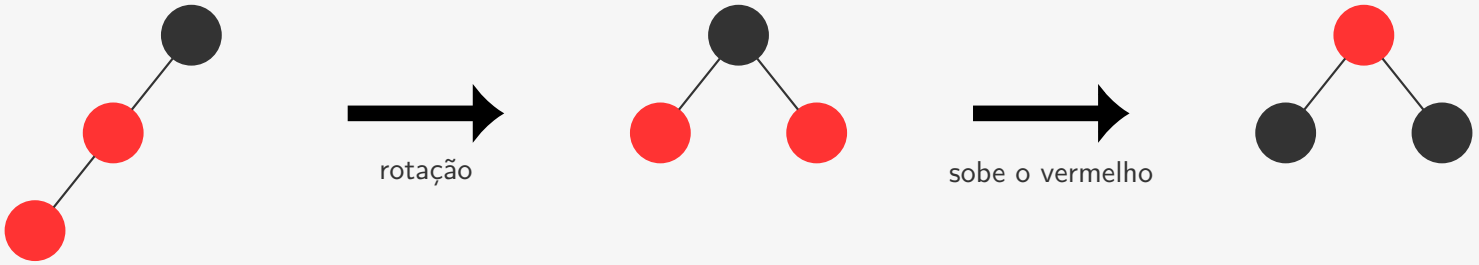



```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Resolvendo problemas no pai

Quais problemas sobraram para o pai resolver?

- Talvez o filho esquerdo seja **vermelho**
- E o neto mais a esquerda seja **vermelho**




```
1   /* corrige a árvore */
2   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
3     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
4   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
5     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
6   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
7     sobe_vermelho(raiz);
```

Inserção — Implementação

Inserção — Implementação

```
1  p_no inserir_rec(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(struct no));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      novo->cor = VERMELHO;
8      return novo;
9    }
10   if (chave < raiz->chave)
11     raiz->esq = inserir_rec(raiz->esq, chave);
12   else
13     raiz->dir = inserir_rec(raiz->dir, chave);
14   /* corrige a árvore */
15   if (ehVermelho(raiz->dir) && ehPreto(raiz->esq))
16     raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
17   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->esq->esq))
18     raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
19   if (ehVermelho(raiz->esq) && ehVermelho(raiz->dir))
20     sobe_vermelho(raiz);
21   return raiz;
22 }
```

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

- encontrar operações que corrijam a árvore

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

- encontrar operações que corrijam a árvore
- operações locais que mantêm as propriedades globais

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

- encontrar operações que corrijam a árvore
- operações locais que mantêm as propriedades globais

Sugestão de leitura:

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

- encontrar operações que corrijam a árvore
- operações locais que mantêm as propriedades globais

Sugestão de leitura:

- Sedgewick e Wayne, Algorithms, 4th Edition, Addison-Wesley Professional, 2011.

Remoção

É possível fazer remoções em árvores **rubro-negras**

- Mas não veremos aqui...

A ideia é basicamente a mesma:

- encontrar operações que corrijam a árvore
- operações locais que mantêm as propriedades globais

Sugestão de leitura:

- Sedgewick e Wayne, Algorithms, 4th Edition, Addison-Wesley Professional, 2011.
- Cormen, Leiserson, Rivest e Stein, Introduction to Algorithms, Third Edition, MIT Press, 2009.

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca
- Inserção

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca
- Inserção
- Remoção

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca
- Inserção
- Remoção

todas em tempo $\mathrm{O}(\lg n)$

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca
- Inserção
- Remoção

todas em tempo $\mathrm{O}(\lg n)$

É uma variante da árvore **rubro-negra** com menos operações para corrigir a árvore na inserção e na remoção

Rubro-Negras — Conclusão

As árvores **rubro-negras** esquerdistas suportam as seguintes operações:

- Busca
- Inserção
- Remoção

todas em tempo $\mathrm{O}(\lg n)$

É uma variante da árvore **rubro-negra** com menos operações para corrigir a árvore na inserção e na remoção

Árvores **rubro-negras** são usadas como a árvore padrão no C++, no JAVA e no kernel do Linux

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz
- Altura "média" (esperada): $\mathrm{O}(\lg n)$

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz
- Altura "média" (esperada): $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores Splay:

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz
- Altura "média" (esperada): $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores Splay:

- Sobe os nós no caminho da busca/inserção

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz
- Altura "média" (esperada): $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores Splay:

- Sobe os nós no caminho da busca/inserção
- Nós mais acessados ficam mais próximos da raiz

Outras árvores balanceadas

Existem também outras ABBs balanceadas:

- Uma árvore balanceada é uma árvore com altura $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores AVL:

- A altura das subárvores pode variar de no máximo 1
- Tem altura $\mathrm{O}(\lg n)$

ABB aleatorizada:

- Decide de maneira aleatória como inserir o nó
  - inserção normal como folha
  - inserção na raiz — rotações trazem o nó até a raiz
- Altura "média" (esperada): $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvores Splay:

- Sobe os nós no caminho da busca/inserção
- Nós mais acessados ficam mais próximos da raiz
- Não é balanceada, mas o custo de m inserções/buscas em uma árvore Splay com n nós é $\mathrm{O}((n+m)\lg(n+m))$

Exercício

Faça uma função que insere uma nova chave na raiz de uma árvore binária de busca. A função deve retornar a nova raiz da árvore.

Solução

```
1  p_no insere_raiz(p_no raiz, int chave) {
2      if (raiz == NULL) {
3          p_no novo = malloc(sizeof(No));
4          novo->chave = chave;
5          novo->esq = novo->dir = NULL;
6          return novo;
7      }
8      if (chave < raiz->chave) {
9          raiz->esq = insere_raiz(raiz->esq, chave);
10         raiz = rotaciona_para_direita(raiz);
11     } else {
12         raiz->dir = insere_raiz(raiz->dir, chave);
13         raiz = rotaciona_para_esquerda(raiz);
14     }
15     return raiz;
16 }
```

Dúvidas?