MC-202
Ordenação em tempo linear

Lehilton Pedrosa
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

Ordenação em $\mathrm{O}(n \lg n)$

Vimos dois algoritmos de ordenação $\mathrm{O}(n \lg n)$:

- MergeSort
- HeapSort

E o caso médio do QuickSort é $\mathrm{O}(n \lg n)$...

Dá para fazer melhor que $\mathrm{O}(n \lg n)$?

- Não, se considerarmos algoritmos que usam comparação
  - algoritmos que precisam saber apenas se `v[i] < v[j]`
  - algoritmos de ordenação "genéricos"
- Sim, se não usarmos comparações
  - algoritmos que sabem a estrutura da chave
  - ex: a chave é um número inteiro com 32 bits

Algoritmos baseados em comparações

Um algoritmo de ordenação baseado em comparações

- recebe uma sequência de n valores
- precisa decidir qual das $n!$ permutações é a correta
- usando apenas comparações entre pares de elementos
  - pode ordenar `int`, `float`, strings, structs, etc...
  - desde que tenha uma função de comparação

Os algoritmos que vimos são baseados em comparações

Quantas comparações um tal algoritmo precisa fazer no mínimo para ordenar o vetor?

- Quão rápido pode ser um algoritmo baseado em comparações?

Árvore de decisão

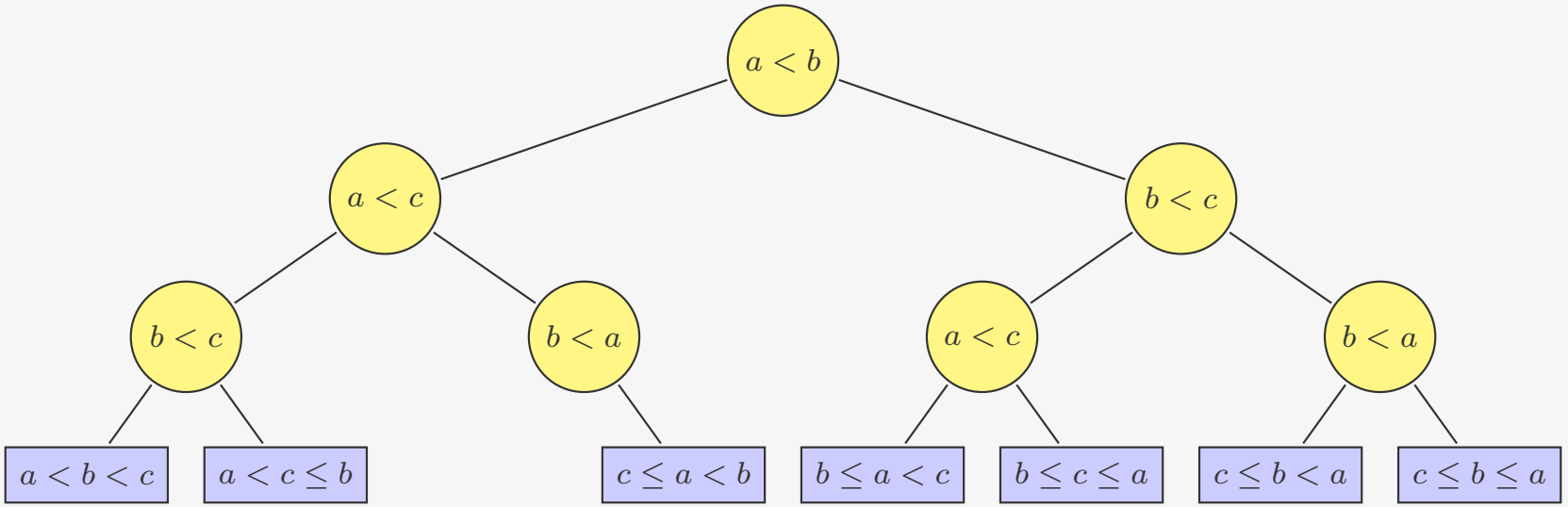
Um algoritmo baseado em comparações:

- compara dois elementos `v[i]` e `v[j]`
- e toma decisões diferentes dependendo do resultado

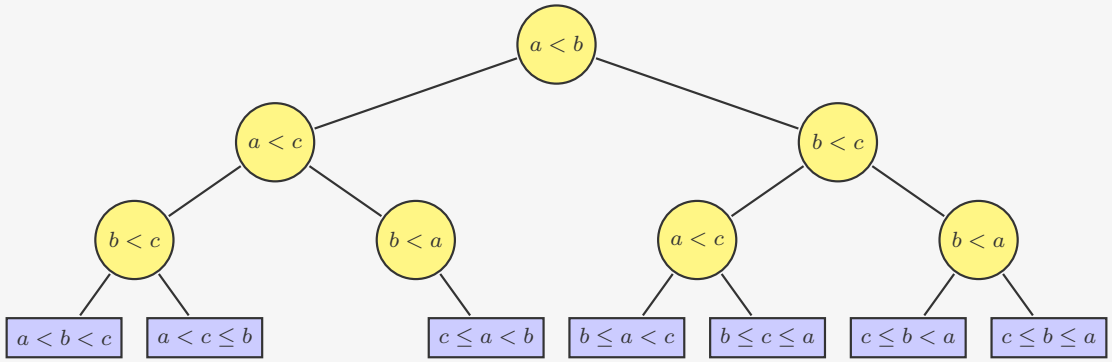
Podemos pensar a execução do algoritmo como uma árvore:

- cada nó interno representa um teste se `v[i] < v[j]`
- subárvore esquerda: comparações feitas se for verdade
- subárvore direita: comparações feitas se for falso

Ex: SelectionSort de (a, b, c)



Árvore de decisão



Qual é a altura mínima h de uma árvore de decisão?

- Temos pelo menos $n!$ folhas (uma para cada permutação)
- Uma árvore de altura h tem no máximo 2^h folhas
- Seja l o número de folhas, temos que $n! \leq l \leq 2^h$

Ou seja,

$$h \geq \lg(n!) \geq \lg \left(\frac{n}{e}\right)^n = n\,(\lg n - \lg e)$$

Não dá para fazer um algoritmo baseado em comparações melhor do que $\mathrm{O}(n \lg n)$

Ordenação em tempo linear

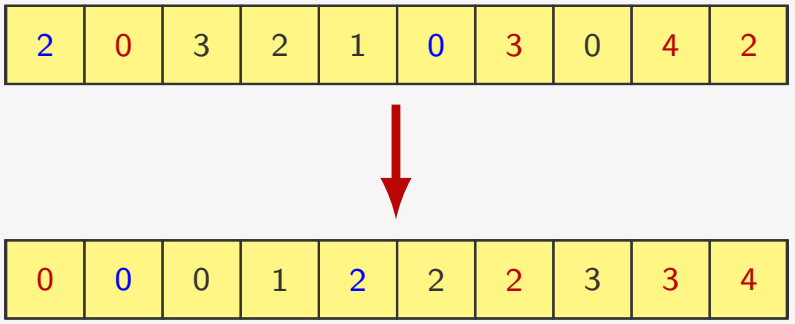
Quando falamos de ordenação em tempo linear:

- São algoritmos que não são baseados em comparação
- Eles não servem para qualquer tipo de chave
  - Já que não usamos apenas comparações
  - Eles usam a estrutura da chave de alguma forma
  - Ex: número inteiros entre `0` e `R-1`
  - Ex: número inteiros de 32 bits

Veremos dois algoritmos de ordenação em tempo linear

Ordenação Estável

Um algoritmo de ordenação é *estável* se ele mantém a ordem relativa original dos items com chaves de ordenação duplicadas



Algoritmos estáveis:

- InsertionSort, BubbleSort e MergeSort

Algoritmos não-estáveis:

- SelectionSort, Quicksort e Heapsort

Ordenação por Contagem — CountingSort

Se temos números inteiros entre `0` e `R-1`:

- Contamos o número de ocorrências de cada número
  - Fazemos um histograma dos números
- Colocamos os números na posição correta (de maneira estável)

Ex: Se queremos ordenar $2, 0, 3, 2, 1, 0, 3, 0, 4, 2$

- Temos três ocorrências do número 0
- Temos uma ocorrência do número 1
- Temos três ocorrências do número 2
- Temos duas ocorrências do número 3
- Temos uma ocorrência do número 4

Basta colocar, em ordem:

- três 0's, um 1, três 2's, dois 3's e um 4
- Ou seja, $0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4$

CountingSort

```
1  #define MAX 10000
2  #define R 5
3
4  int aux[MAX];
5
6  void countingsort(int *v, int l, int r) {
7    int i, count[R + 1];
8    for (i = 0; i <= R; i++)
9      count[i] = 0;
10   for (i = l; i <= r; i++)
11     count[v[i] + 1]++;
12   for (i = 1; i <= R; i++)
13     count[i] += count[i-1];
14   for (i = l; i <= r; i++) {
15     aux[count[v[i]]] = v[i];
16     count[v[i]]++;
17   }
18   for (i = l; i <= r; i++)
19     v[i] = aux[i-l];
20 }
```

count

aux

v

CountingSort

```
1  #define MAX 10000
2  #define R 5
3
4  int aux[MAX];
5
6  void countingsort(int *v, int l, int r) {
7    int i, count[R + 1];
8    for (i = 0; i <= R; i++)
9      count[i] = 0;
10   for (i = l; i <= r; i++)
11     count[v[i] + 1]++;
12   for (i = 1; i <= R; i++)
13     count[i] += count[i-1];
14   for (i = l; i <= r; i++) {
15     aux[count[v[i]]] = v[i];
16     count[v[i]]++;
17   }
18   for (i = l; i <= r; i++)
19     v[i] = aux[i-l];
20 }
```

count

aux

v

CountingSort

```
1  #define MAX 10000
2  #define R 5
3
4  int aux[MAX];
5
6  void countingsort(int *v, int l, int r) {
7    int i, count[R + 1];
8    for (i = 0; i <= R; i++)
9      count[i] = 0;
10   for (i = l; i <= r; i++)
11     count[v[i] + 1]++;
12   for (i = 1; i <= R; i++)
13     count[i] += count[i-1];
14   for (i = l; i <= r; i++) {
15     aux[count[v[i]]] = v[i];
16     count[v[i]]++;
17   }
18   for (i = l; i <= r; i++)
19     v[i] = aux[i-l];
20 }
```

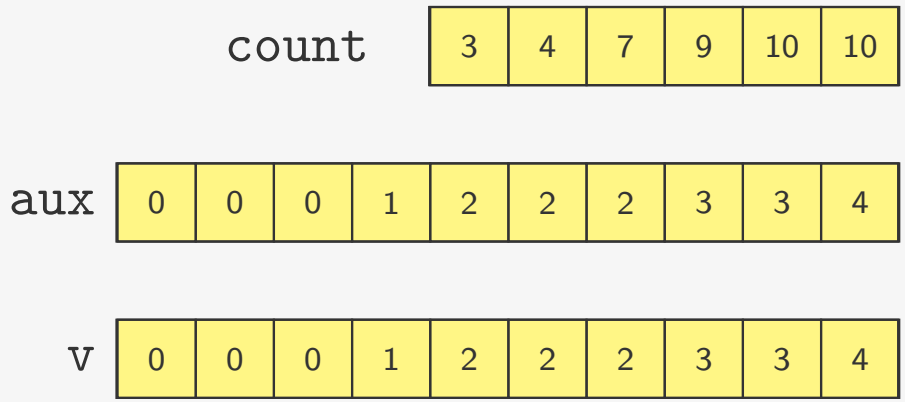
count

aux

v

CountingSort

```
1  #define MAX 10000
2  #define R 5
3
4  int aux[MAX];
5
6  void countingsort(int *v, int l, int r) {
7    int i, count[R + 1];
8    for (i = 0; i <= R; i++)
9      count[i] = 0;
10   for (i = l; i <= r; i++)
11     count[v[i] + 1]++;
12   for (i = 1; i <= R; i++)
13     count[i] += count[i-1];
14   for (i = l; i <= r; i++) {
15     aux[count[v[i]]] = v[i];
16     count[v[i]]++;
17   }
18   for (i = l; i <= r; i++)
19     v[i] = aux[i-l];
20 }
```



Ordenando datas

Ideia: ordena por ano, depois por mês e depois por dia

30/09/2017	26/06/**2000**	19/**01**/2010
01/12/2005	03/04/**2000**	03/**04**/2000
09/09/2003	13/12/**2000**	10/**04**/2004
26/06/2000	21/09/**2002**	01/**04**/2014
19/01/2010	09/09/**2003**	28/**05**/2007
03/04/2000	10/04/**2004**	26/**06**/2000
01/04/2014	01/12/**2005**	01/**06**/2006
13/12/2000	17/07/**2005**	17/**07**/2005
21/09/2002	01/06/**2006**	27/**08**/2014
28/05/2007	28/05/**2007**	21/**09**/2002
27/08/2014	19/01/**2010**	09/**09**/2003
10/04/2004	01/04/**2014**	30/**09**/2017
01/06/2006	27/08/**2014**	28/**10**/2014
17/07/2005	28/10/**2014**	13/**12**/2000
28/10/2014	30/09/**2017**	01/**12**/2005

Ordenando datas

Ordena por dia, depois por mês e depois por ano

30/09/2017	**01**/12/2005	19/**01**/2010	03/04/**2000**
01/12/2005	**01**/04/2014	01/**04**/2014	26/06/**2000**
09/09/2003	**01**/06/2006	03/**04**/2000	13/12/**2000**
26/06/2000	**03**/04/2000	10/**04**/2004	21/09/**2002**
19/01/2010	**09**/09/2003	28/**05**/2007	09/09/**2003**
03/04/2000	**10**/04/2004	01/**06**/2006	10/04/**2004**
01/04/2014	**13**/12/2000	26/**06**/2000	17/07/**2005**
13/12/2000 →	**17**/07/2005 →	17/**07**/2005 →	01/12/**2005**
21/09/2002	**19**/01/2010	27/**08**/2014	01/06/**2006**
28/05/2007	**21**/09/2002	09/**09**/2003	28/05/**2007**
27/08/2014	**26**/06/2000	21/**09**/2002	19/01/**2010**
10/04/2004	**27**/08/2014	30/**09**/2017	01/04/**2014**
01/06/2006	**28**/05/2007	28/**10**/2014	27/08/**2014**
17/07/2005	**28**/10/2014	01/**12**/2005	28/10/**2014**
28/10/2014	**30**/09/2017	13/**12**/2000	30/09/**2017**

Funciona se o algoritmo for estável!

RadixSort

Ideia:

- Usar o mesmo princípio da ordenação de datas
- Ordenar números comparando sequências de bits
  - do menos significativo para o mais significativo
  - usando ordenação estável
- Radix é o mesmo que a base do sistema numeral

Vamos ordenar números inteiros de 4 bytes, i.e., 32 bits

- Poderia ser números maiores
- Nosso radix será 256 (1 byte)
  - Poderia ser outro número
  - É melhor escolher uma potência de 2
- Precisaremos extrair o i-ésimo byte do número
  - contando da direita para esquerda

Deslocamento de bits

Desloca para a esquerda (<<) — "multiplica por 2^k"

- Ex: `00000101 << 3 == 00101000` (`5 << 3 == 40`)
- Ex: `01000101 << 3 == 00101000` (`69 << 3 == 40`)

Desloca para a direita (>>) — divide por 2^k

- Ex: `00101000 >> 3 == 00000101` (`40 >> 3 == 5`)
- Ex: `00101011 >> 3 == 00000101` (`43 >> 3 == 5`)

Bits e Bytes

```
1 #define bitsword 32
2
3 #define bitsbyte 8
4
5 #define bytesword 4
6
7 #define R 256
8
9 #define digit(N,D) (((N) >> (D)*bitsbyte) % R)
```

RadixSort

```
1  void radixsort(int *v, int l, int r) {
2    int i, w, count[R+1];
3    for (w = 0; w < bytesword; w++) {
4      for (i = 0; i <= R; i++)
5        count[i] = 0;
6      for (i = l; i <= r; i++)
7        count[digit(v[i], w) + 1]++;
8      for (i = 1; i <= R; i++)
9        count[i] += count[i-1];
10     for (i = l; i <= r; i++) {
11       aux[count[digit(v[i], w)]] = v[i];
12       count[digit(v[i], w)]++;
13     }
14     for (i = l; i <= r; i++)
15       v[i] = aux[i-l];
16   }
17 }
```

CountingSort no `w`-ésimo dígito

Tempo: $\mathrm{O}(\texttt{bytesword} \cdot (R + n))$

Se a chave tem k bits, tempo: $\mathrm{O}\left(\frac{k}{\lg R}(n + R)\right)$

Comparação do algoritmos

Limite de tempo=0.05s

- `bubblesort` ordena 5.000 números em 0.034s
- `insertionsort_v4` ordena 20.000 números em 0.038s
- `quicksort_mdt_v3` ordena 640.000 números em 0.05s
- `radixsort` ordena 2.560.000 números em 0.04s

Comparação Assintótica

Algoritmo	Melhor Caso	Caso Médio	Pior Caso	Memória
BubbleSort	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(1)$
SelectionSort	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(1)$
InsertionSort	$\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(1)$
QuickSort	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n^2)$	$\mathrm{O}(n)$
MergeSort	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n)$
HeapSort	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(n \lg n)$	$\mathrm{O}(1)$
RadixSort	$\mathrm{O}((n+R)\frac{k}{\lg R})$	$\mathrm{O}((n+R)\frac{k}{\lg R})$	$\mathrm{O}((n+R)\frac{k}{\lg R})$	$\mathrm{O}(R)$

onde k é o número de bits na chave de ordenação

Lembrando que RadixSort não pode ser usado sempre

- não é baseado em comparações

Conclusão

Escolher entre dois algoritmos de mesmo tempo tem resultado na prática

- Ex: `bubblesort` vs. `insertionsort`
- Ex: `heapsort` vs. `mergesort`

Otimizar o código dos algoritmos pode trazer boas melhoras

- Ex: `insertionsort` vs. `insertionsort_v2`
- Ex: `quicksort` vs. `quicksort_mdt`

No fim do dia, o que mais faz diferença é o tempo assintótico

- Se n for grande...
  - Se n for pequeno, o overhead pode não compensar
- Ex: `insertionsort_v2` vs. `heapsort`
- Ex: `quicksort_mdt` vs. `radixsort`

Exercício

Mostre um esquema para tornar qualquer algoritmo em um algoritmo estável. Quanto espaço e tempo adicional é necessário para o seu esquema?

Solução

Basta adicionar um índice de ordenação ao vetor. Se dois elementos tiverem o mesmo valor, o índice de ordenação é usado para desempatar.

- O tempo adicional é o tempo de fazer a comparação em caso de empate
- O espaço adicional é o espaço para o índice de ordenação

Dúvidas?