

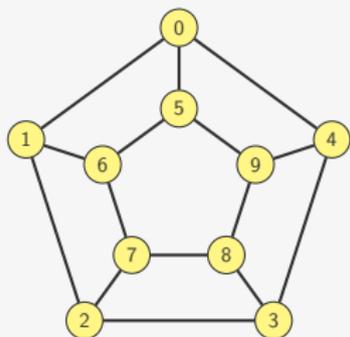
MC-202  
Percurso em Grafos

Lehilton Pedrosa  
lehilton@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Segundo semestre de 2024

# Caminhos em Grafos



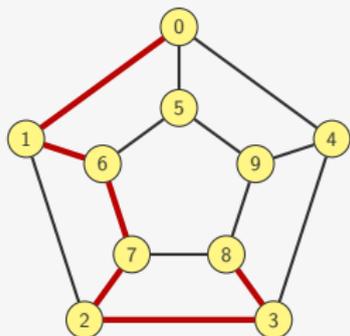
Um caminho de  $s$  para  $t$  em um grafo é:

- Uma sequência sem repetição de vértices vizinhos
- Começando em  $s$  e terminado em  $t$

Por exemplo:

- $0, 1, 6, 7, 2, 3, 8$  é um caminho de  $0$  para  $8$
- $0, 5, 8$  não é um caminho de  $0$  para  $8$
- $0, 1, 2, 7, 6, 1, 2, 3, 8$  não é um caminho de  $0$  para  $8$

# Caminhos em Grafos



Formalmente, um caminho de  $s$  para  $t$  em um grafo é:

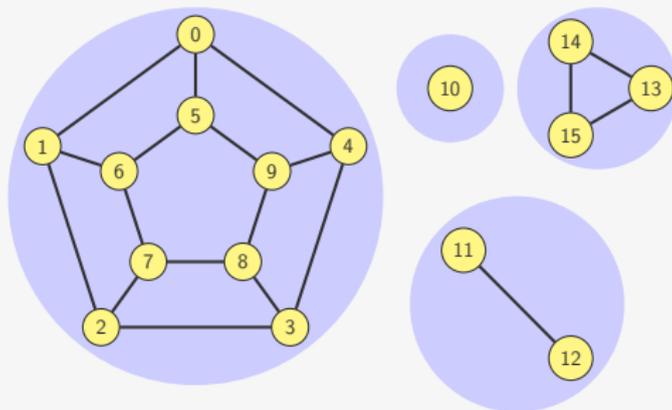
- Uma sequência de vértice  $v_0, v_1, \dots, v_k$  onde
- $v_0 = s$  e  $v_k = t$
- $\{v_i, v_{i+1}\}$  é uma aresta para todo  $0 \leq i \leq k - 1$
- $v_i \neq v_j$  para todo  $0 \leq i < j \leq k$

$k$  é o comprimento do caminho

- $k = 0$  se e somente se  $s = t$

# Componentes Conexas

Um grafo pode ter várias “partes”



Chamamos essas partes de **Componentes Conexas**

- Um par de vértices está na mesma componente se e somente se existe caminho entre eles
  - Não há caminho entre vértices de componentes distintas
- Um grafo **conexo** tem apenas uma componente conexa

## Existe caminho entre $s$ e $t$ ?

Queremos saber se  $s$  e  $t$  estão na mesma componente conexa

Se estiverem, existe algum caminho de  $s$  até  $t$



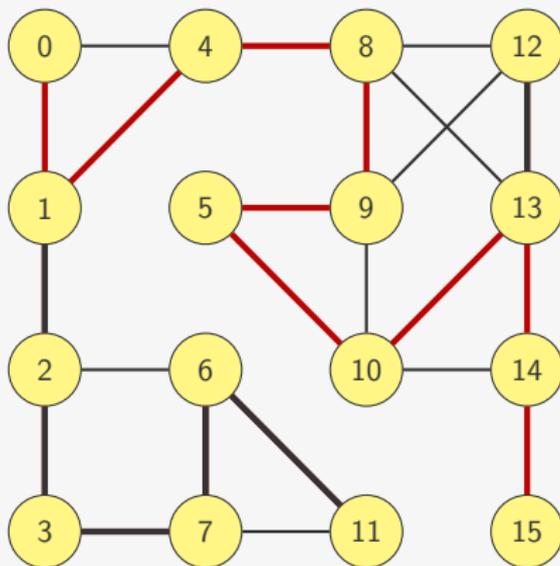
Se existe caminho e  $s \neq t$ , existe um segundo vértice  $v_1$

- E  $v_1$  é vizinho de  $s$
- Então, ou  $v_1 = t$ , ou existe um terceiro vértice  $v_2$ 
  - E  $v_2$  é vizinho de  $v_1$
- E assim por diante...

A dificuldade é acertar qual vizinho  $v_1$  de  $s$  devemos usar...

- Solução: testar todos!

## Exemplo — Existe caminho de 0 até 15?



Essa é uma **busca em profundidade**:

- Vá o máximo possível em uma direção
- Se não encontrarmos o vértice, volte o mínimo possível
- E pegue um novo caminho por um vértice não visitado

## Implementação (com Matriz de Adjacências)

```
1 int existe_caminho(p_grafo g, int s, int t) {
2     int encontrou, i, *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         visitado[i] = 0;
5     encontrou = busca_rec(g, visitado, s, t);
6     free(visitado);
7     return encontrou;
8 }
```

```
1 int busca_rec(p_grafo g, int *visitado, int v, int t) {
2     int w;
3     if (v == t)
4         return 1; /*sempre existe caminho de t para t*/
5     visitado[v] = 1;
6     for (w = 0; w < g->n; w++)
7         if (g->adj[v][w] && !visitado[w])
8             if (busca_rec(g, visitado, w, t))
9                 return 1;
10    return 0;
11 }
```

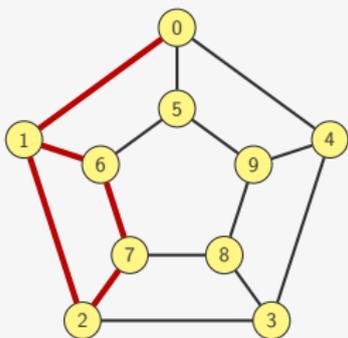
E se quisermos saber quais são as componentes conexas?

## Componentes Conexas (Listas de Adjacência)

```
1 int * encontra_componentes(p_grafo g) {
2     int s, c = 0, *componentes = malloc(g->n * sizeof(int));
3     for (s = 0; s < g->n; s++)
4         componentes[s] = -1;
5     for (s = 0; s < g->n; s++)
6         if (componentes[s] == -1) {
7             visita_rec(g, componentes, c, s);
8             c++;
9         }
10    return componentes;
11 }
```

```
1 void visita_rec(p_grafo g, int *componentes, int comp, int v) {
2     p_no t;
3     componentes[v] = comp;
4     for (t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)
5         if (componentes[t->v] == -1)
6             visita_rec(g, componentes, comp, t->v);
7 }
```

## Ciclos em Grafos



Um **ciclo** em um grafo é:

- Uma sequência de vértices vizinhos sem repetição exceto pelo primeiro e o último vértice que são idênticos

Por exemplo:

- **5, 6, 7, 8, 9, 5** é um ciclo
- **1, 2, 3** não é um ciclo
- **1, 2, 7, 6, 1** é um ciclo
- **1, 2, 7, 6, 1, 0** não é um ciclo (mas contém um ciclo)

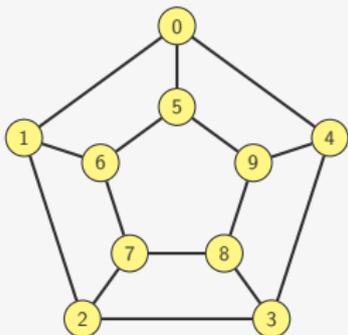
# Árvores, Florestas e Subgrafos

Uma **árvore** é um grafo **conexo acíclico**

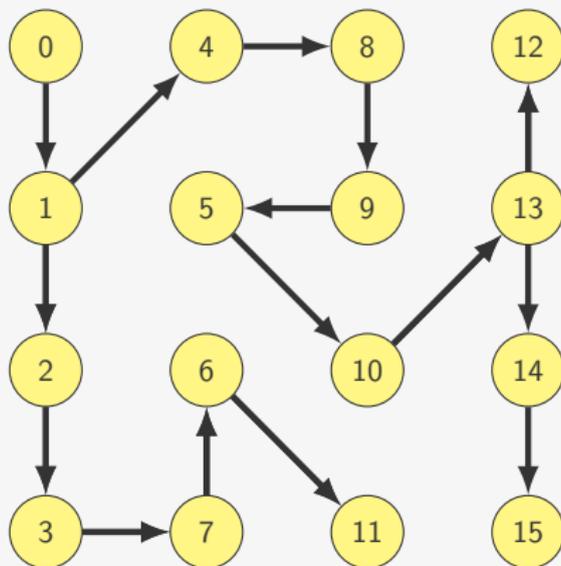
- Uma **floresta** é um grafo **acíclico**
- Suas componentes conexas são árvores

Um **subgrafo** é um grafo obtido a partir da remoção de vértices e arestas

- Podemos considerar também árvores/florestas que são subgrafos de um grafo dado



## Caminhos de $s$ para outros vértices da componente



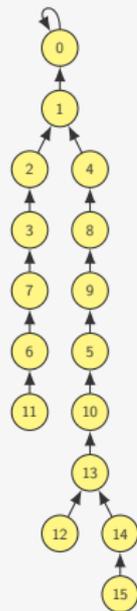
As arestas usadas formam uma árvore!

- Essa árvore dá um caminho de qualquer vértice até a raiz
- Basta ir subindo na árvore

## Caminhos de $s$ para outros vértices da componente

```
1 int * encontra_caminhos(p_grafo g, int s) {  
2     int i, *pai = malloc(g->n * sizeof(int));  
3     for (i = 0; i < g->n; i++)  
4         pai[i] = -1;  
5     busca_em_profundidade(g, pai, s, s);  
6     return pai;  
7 }
```

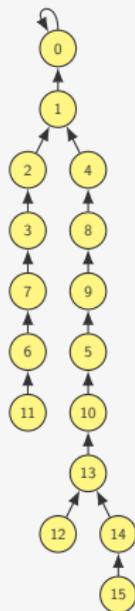
```
1 void busca_em_profundidade(p_grafo g, int *pai, int p, int v) {  
2     p_no t;  
3     pai[v] = p;  
4     for(t = g->adj[v]; t != NULL; t = t->prox)  
5         if (pai[t->v] == -1)  
6             busca_em_profundidade(g, pai, v, t->v);  
7 }
```



# Imprimindo o caminho

```
1 void imprimi_caminho_reverso(int v, int *pai) {  
2     printf("%d", v);  
3     if(pai[v] != v)  
4         imprimi_caminho_reverso(pai[v], pai);  
5 }
```

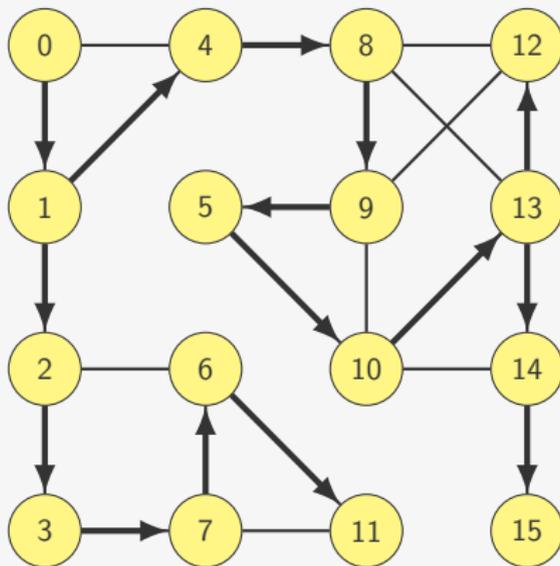
```
1 void imprimi_caminho(int v, int *pai) {  
2     if(pai[v] != v)  
3         imprimi_caminho(pai[v], pai);  
4     printf("%d", v);  
5 }
```



## Busca em Profundidade usando uma Pilha

Podemos fazer uma busca em profundidade usando pilha:

- A cada passo, desempilhamos um vértice não visitado
- E inserimos os seus vizinhos não visitados na pilha

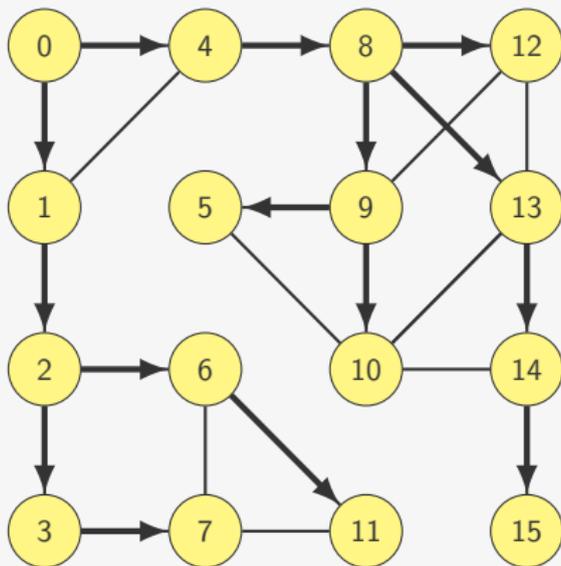


Pilha

# Implementação

```
1 int * busca_em_profundidade(p_grafo g, int s) {
2     int w, v;
3     int *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
4     int *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
5     p_pilha p = criar_pilha();
6     for (v = 0; v < g->n; v++) {
7         pai[v] = -1;
8         visitado[v] = 0;
9     }
10    empilhar(p,s);
11    pai[s] = s;
12    while(!pilha_vazia(p)) {
13        v = desempilhar(p);
14        if (visitado[v])
15            continue;
16        visitado[v] = 1;
17        for (w = 0; w < g->n; w++)
18            if (g->adj[v][w] && !visitado[w]) {
19                pai[w] = v;
20                empilhar(p, w);
21            }
22    }
23    destroi_pilha(p);
24    free(visitado);
25    return pai;
```

E se tivéssemos usado uma Fila?





# Implementação da Busca em Largura

```
1 int * busca_em_largura(p_grafo g, int s) {
2     int w, v;
3     int *pai = malloc(g->n * sizeof(int));
4     int *visitado = malloc(g->n * sizeof(int));
5     p_fila f = criar_fila();
6     for (v = 0; v < g->n; v++) {
7         pai[v] = -1;
8         visitado[v] = 0;
9     }
10    enfileira(f,s);
11    pai[s] = s;
12    visitado[s] = 1;
13    while(!fila_vazia(f)) {
14        v = desenfileira(f);
15        for (w = 0; w < g->n; w++)
16            if (g->adj[v][w] && !visitado[w]) {
17                visitado[w] = 1; /*evita repetição na fila*/
18                pai[w] = v;
19                enfileira(f, w);
20            }
21    }
22    destroi_fila(f);
23    free(visitado);
24    return pai;
25 }
```

## Tempo para fazer a busca

Quanto tempo demora para fazer uma busca?

- em profundidade ou em largura
- em um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas

Suponha que inserir e remover de pilha/fila leva  $O(1)$

- Podemos usar vetores ou listas ligadas

A busca percorre todos os vértices

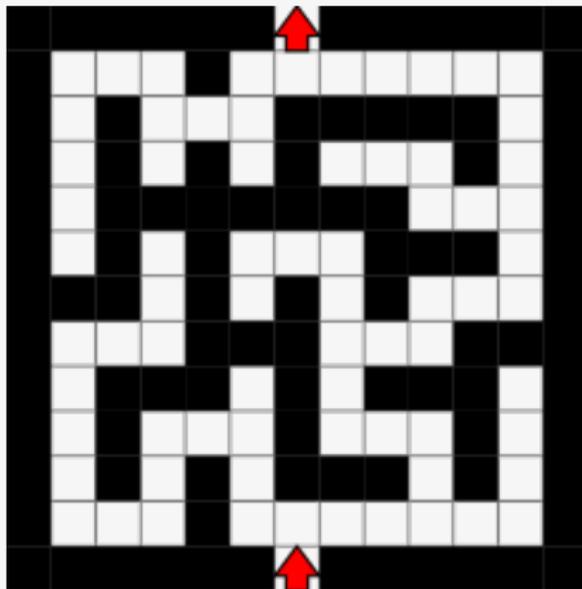
- E empilha/enfileira seus vizinhos não visitados
- Se usarmos uma Matriz de Adjacências, leva  $O(n^2)$

E se usarmos Listas de Adjacência?

- Cada aresta é analisada apenas duas vezes
- Gastamos tempo  $O(\max\{n, m\}) = O(n + m)$ 
  - Linear no tamanho do grafo

## Discussão

Como você modelaria e resolveria o problema de encontrar um caminho em um labirinto?



Dúvidas?