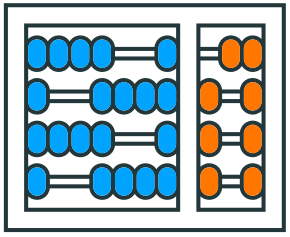


Instituto de Computação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

MC102 – Aula 13
Algoritmos de Ordenação Recursivos

Algoritmos e Programação de Computadores

Zanoni Dias

2020

Instituto de Computação

Roteiro

O Problema da Ordenação

Divisão e Conquista

Merge Sort

Quicksort

Tempo de Execução

Exercícios

O Problema da Ordenação

O Problema da Ordenação

- Iremos continuar o estudo de algoritmos para o problema de ordenação visto anteriormente:

Definição do Problema

Dada uma coleção de elementos, com uma relação de ordem entre eles, ordenar os elementos da coleção de forma crescente.

- Nos nossos exemplos, a coleção de elementos será representada por uma lista de inteiros.
  - Números inteiros possuem uma relação de ordem entre eles.
- Apesar de usarmos números inteiros, os algoritmos que estudaremos servem para ordenar qualquer coleção de elementos que possam ser comparados entre si.
- Ambos os algoritmos recursivos de ordenação que veremos usam o paradigma de Divisão e Conquista.

Divisão e Conquista

Divisão e Conquista

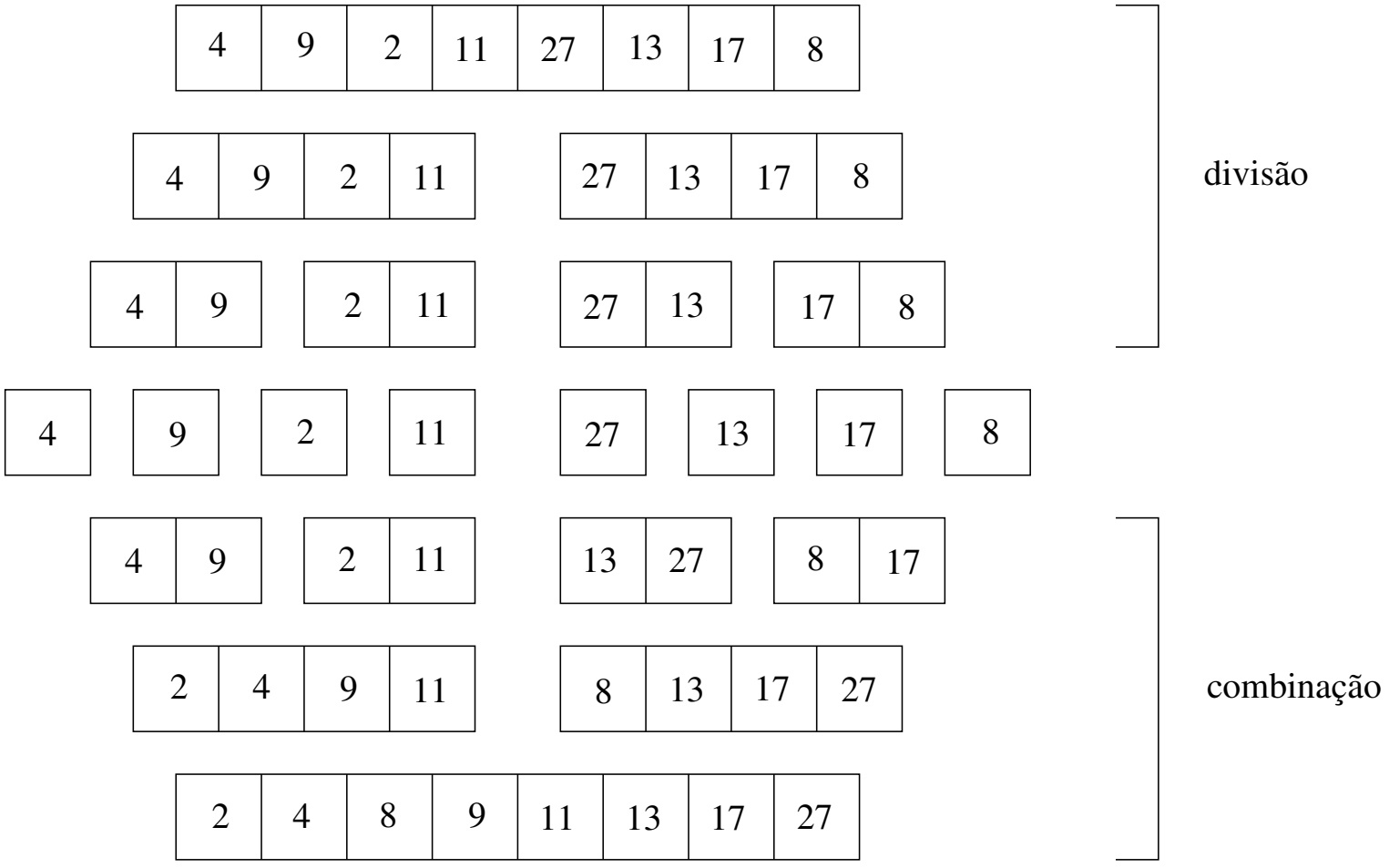
- Esta técnica consiste em dividir um problema maior recursivamente em problemas menores até que ele possa ser resolvido diretamente.
- A solução do problema inicial é dada através da combinação dos resultados de todos os problemas menores computados.
- A técnica soluciona o problema através de três fases:
  - Divisão: o problema maior é dividido em problemas menores.
  - Conquista: cada problema menor é resolvido recursivamente.
  - Combinação: os resultados dos problemas menores são combinados para se obter a solução do problema maior.

Merge Sort

Merge Sort

- O Merge Sort foi proposto por John von Neumann em 1945.
- O algoritmo Merge Sort é baseado em uma operação de intercalação (`merge`) que une duas listas ordenadas para gerar uma terceira lista também ordenada.
- O algoritmo pode ser construído a partir dos seguintes passos:
  - Divisão: a lista é dividida em duas sublistas de tamanhos quase iguais (diferindo em no máximo um elemento).
  - Conquista: cada sublista é ordenada recursivamente.
  - Combinação: as duas sublistas ordenadas são intercaladas para se obter a lista final ordenada.

Merge Sort


4 9 2 11 27 13 17 8
4 9 2 11
27 13 17 8
4 9
2 11
27 13
17 8
4
9
2
11
27
13
17
8
4 9
2 11
13 27
8 17
2 4 9 11
8 13 17 27
2 4 8 9 11 13 17 27
divisão
combinação

Merge Sort - Merge

```
1  def merge(lista1, lista2):
2    i = j = 0
3    aux = []
4
5    while (i < len(lista1)) and (j < len(lista2)):
6      if lista1[i] < lista2[j]:
7        aux.append(lista1[i])
8        i = i + 1
9      else:
10       aux.append(lista2[j])
11       j = j + 1
12
13   while i < len(lista1):
14     aux.append(lista1[i])
15     i = i + 1
16
17   while j < len(lista2):
18     aux.append(lista2[j])
19     j = j + 1
20
21   return aux
```

Merge Sort - Merge

```
1  def merge(lista1, lista2):
2    i = j = 0
3    aux = []
4
5    while (i < len(lista1)) and (j < len(lista2)):
6      if lista1[i] < lista2[j]:
7        aux.append(lista1[i])
8        i = i + 1
9      else:
10       aux.append(lista2[j])
11       j = j + 1
12
13   aux = aux + lista1[i:]
14
15
16
17   aux = aux + lista2[j:]
18
19
20
21   return aux
```

Merge Sort

```
1  def merge(lista1, lista2):
2    ...
3
4  def merge_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      meio = (inicio + fim) // 2
7
8      merge_sort(lista, inicio, meio)
9      merge_sort(lista, meio, fim)
10
11     lista1 = lista[inicio:meio]
12     lista2 = lista[meio:fim]
13
14     lista[inicio:fim] = merge(lista1, lista2)
```

Merge Sort

```python
def merge(lista1, lista2):
  ...

def merge_sort(lista, inicio, fim):
  ...

def main():
  lista = [4, 9, 2, 11, 27, 13, 17, 8]
  n = len(lista)
  merge_sort(lista, 0, n)
  print(lista)

main()
# [2, 4, 8, 9, 11, 13, 17, 27]
```

Merge Sort

- Simulação das chamadas recursivas:

```
[4  9  2  11  27  13  17  8]
[4  9  2  11][27  13  17  8]
[4  9][2  11][27  13][17  8]
[4][9][2][11][27][13][17][8]
[4  9][2  11][13  27][8  17]
[2  4  9  11][8  13  17  27]
[2  4  8  9  11  13  17  27]
```

Merge Sort - Análise de complexidade

- Seja $T(n)$ o custo de ordenar uma lista de n elementos usando o Merge Sort.
- Para $n > 1$, temos que o algoritmo executa:
  - A ordenação recursiva dos $\lceil n/2 \rceil$ primeiros elementos da lista.
  - A ordenação recursiva dos $\lfloor n/2 \rfloor$ últimos elementos da lista.
  - Intercala as duas sublistas previamente ordenadas.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Merge Sort:

$$T(1) = c_1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + M(n) + c_2$$

- É fácil verificar que $M(n)$, o tempo de execução da função `merge`, é proporcional à função $f(n) = n$.

Merge Sort - Análise de complexidade

- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Merge Sort, é proporcional à função $f(n) = n \log n$, tanto no melhor quanto no pior caso.
- Da forma como a função `merge` foi implementada utilizando uma lista auxiliar, o Merge Sort necessita de espaço linear de memória adicional.

Quicksort

Quicksort

- O Quicksort foi desenvolvido por Charles A. R. Hoare em 1959.
- O algoritmo Quicksort é baseado em uma operação de particionamento (`partition`) que, com base num elemento pivô, divide a lista em duas partições:
  - Valores menores que o pivô são colocados antes do pivô na lista, enquanto valores maiores são colocados depois.
- O algoritmo pode ser construído a partir dos seguintes passos:
  - Divisão: a lista é dividida em duas partições, usando a função `partition`.
  - Conquista: cada partição é ordenada recursivamente.
  - Combinação: nada precisa ser feito, já que os números menores que o pivô estão antes do pivô (e ordenados), enquanto os maiores estão depois do pivô (e também ordenados).

Partition com Listas Auxiliares

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    pivo = lista[inicio]
3    menores = []
4    maiores = []
5
6    for k in range(inicio + 1, fim):
7      if lista[k] <= pivo
8        menores.append(lista[k])
9      else:
10       maiores.append(lista[k])
11
12   lista[inicio:fim] = menores + [pivo] + maiores
13
14   return inicio + len(menores)
```

Partition e Quicksort

```
[45]  53   13   25   89   75   46   32   20  [11]
inicio                                     fim-1
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45]  53   13   25   89   75   46   32   20   11
 j
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45] [53]  13   25   89   75   46   32   20   11
 j    i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45] [53    13]  25    89    75    46    32    20    11
 j          i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    53] [13]  25    89    75    46    32    20    11
       j    i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45   13] [53]  25   89   75   46   32   20   11
      j    i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13] [53    25]  89    75    46    32    20    11
       j          i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    53] [25]  89    75    46    32    20    11
           j     i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25] [53]  89    75    46    32    20    11
           j     i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25] [53    89]  75    46    32    20    11
           j         i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25] [53    89    75]  46    32    20    11
          j           i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25] [53    89    75    46]  32    20    11
          j                     i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25] [53    89    75    46    32]  20    11
          j                          i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    53] [89    75    46    32]  20    11
                  j                     i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32] [89    75    46    53]  20    11
                 j                      i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    j = inicio
3
4    for i in range(inicio + 1, fim):
5      if lista[i] <= lista[inicio]:
6        j = j + 1
7        (lista[i], lista[j]) = (lista[j], lista[i])
8
9    (lista[inicio], lista[j]) = (lista[j], lista[inicio])
10
11   return j
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32] [89    75    46    53    20]  11
                  j                          i
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32    89] [75    46    53    20]  11
                         j                    i
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32    20] [75    46    53    89]  11
                   j                    i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32    20] [75    46    53    89    11]
                         j                              i
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32    20    75] [46    53    89    11]
                                j                     i
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45    13    25    32    20    11] [46    53    89    75]
                                j                     i
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[45   13   25   32   20   11] [46   53   89   75]
inicio                   j
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[11   13   25   32   20   45] [46   53   89   75]
inicio                  j
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[11    13    25    32    20    45] [46    53    89    75]
                                 j
```

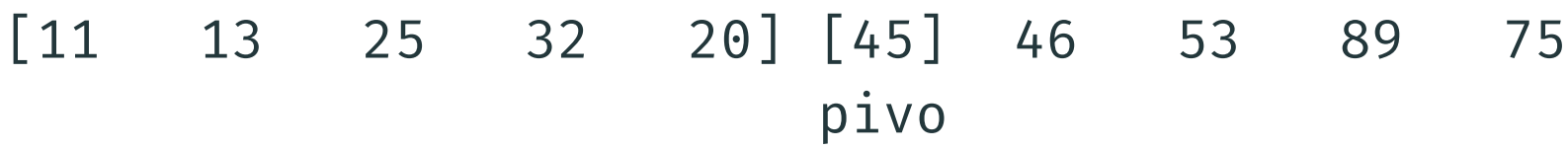
```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
11   13   25   32   20  [45]  46   53   89   75
                         pivo
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

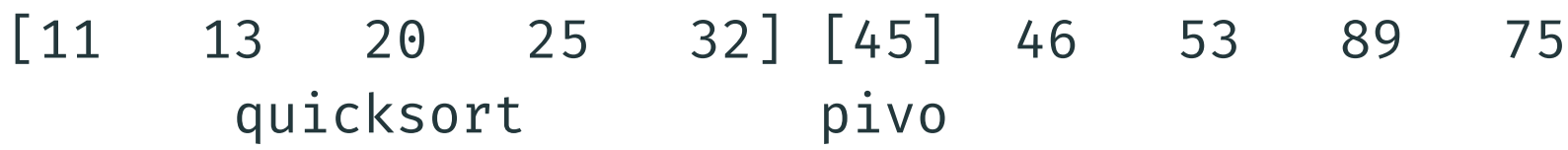
Partition e Quicksort




```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort




```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[11   13   20   25   32] [45] [46   53   89   75]
                          pivo
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[11   13   20   25   32] [45] [46   53   75   89]
                         pivo      quicksort
```

```python
def partition(lista, inicio, fim):
  ...

def quick_sort(lista, inicio, fim):
  if fim - inicio > 1:
    pivo = partition(lista, inicio, fim)
    quick_sort(lista, inicio, pivo)
    quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Partition e Quicksort

```
[11   13   20   25   32] [45] [46   53   75   89]
                          pivo
```

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    if fim - inicio > 1:
6      pivo = partition(lista, inicio, fim)
7      quick_sort(lista, inicio, pivo)
8      quick_sort(lista, pivo + 1, fim)
```

Quicksort

```
1  def partition(lista, inicio, fim):
2    ...
3
4  def quick_sort(lista, inicio, fim):
5    ...
6
7  def main():
8    lista = [45, 53, 13, 25, 89, 75, 46, 32,  20, 11]
9    n = len(lista)
10   quick_sort(lista, 0, n)
11   print(lista)
12
13 main()
14 #  [11, 13, 20, 25, 32, 45, 46, 53, 75, 89]
```

Quicksort - Análise de complexidade

- Melhor caso: ocorre quando o `partition` sempre divide a lista em duas partições de tamanhos aproximadamente iguais.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no melhor caso:

$$T(1) = c_1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil - 1) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + P(n) + c_2$$

- É fácil ver que $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no melhor caso, é proporcional à função $f(n) = n \log n$.

Quicksort - Análise de complexidade

- Pior caso: ocorre quando o `partition` sempre divide a lista em duas partições de tamanhos muito diferentes.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no pior caso:

$$T(1) = c_1$$
$$T(n) = T(n-1) + P(n) + c_2$$

- Como sabemos, $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no pior caso, é proporcional à função $f(n) = n^2$.

Quicksort - Análise de complexidade

- Caso médio: a probabilidade de uma partição de um tamanho qualquer ocorrer é igual a $1/n$.
- A seguinte recorrência define o tempo de execução do Quicksort no caso médio:

$$T(1) = c_1$$

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[T(i) + T(n-1-i)] + P(n) + c_2$$

- Como sabemos, $P(n)$, o tempo de execução da função `partition`, é proporcional à função $f(n) = n$.
- É possível mostrar que $T(n)$, o tempo de execução do Quicksort no caso médio, é proporcional à função $f(n) = n \log n$.

Quicksort

- Dado uma lista aleatória qualquer, é extremamente raro o Quicksort se comportar como no seu pior caso.
- No entanto, o Quicksort, devido à escolha do primeiro elemento da lista como pivô, apresenta seu pior comportamento quando recebe como entrada um dos casos mais simples possíveis para qualquer algoritmo de ordenação: uma lista já ordenada.
- Uma forma de contornar este caso (lista ordenada) e evitar partições de tamanho zero é utilizar como pivô a mediana de três elementos da lista: o primeiro, o do meio e o último.
- Uma outra alternativa bastante utilizada é definir o pivô como um elemento da lista escolhido de forma aleatória.
- Uma vantagem do Quicksort em relação ao Merge Sort é em relação ao uso de memória auxiliar: o Quicksort não usa uma lista auxiliar, consumindo apenas o espaço para armazenar as variáveis locais na pilha de recursão.

Tempo de Execução

Tempo de Execução

- O tempo de execução de um código pode ser verificado utilizando a bibioteca `time`.
- Essa bibioteca possui funções bastante úteis.
- Função `time`:
  - Retorna um `float` com o tempo em segundos passados desde um marco de tempo padrão.
  - Para sistemas Unix, esse marco de tempo é 01/01/1970, 00:00:00 UTC.
- Função `ctime`:
  - Recebe como parâmetro o tempo passado em segundos desde um marco de tempo padrão.
  - Retorna a data e o horário correspondente em formato `String`.
- Função `sleep`:
  - Suspende a execução de um programa pelo número de segundos especificado.

Tempo de Execução

- Para utilizar a biblioteca é necessário que a mesma seja importada no código.

```
1 import time
```

- Exemplo de uso das funções `time` e `ctime`.

```
1 import time
2 tempo = time.time()
3 print(tempo)
4 # 1581932985.0103931
5 tempo_str = time.ctime(tempo)
6 print(tempo_str)
7 # Mon Feb 17 09:49:45 2020
```

Tempo de Execução

- Computando o tempo de execução de um trecho de código.

```python
import time
inicio = time.time() # tempo de início
time.sleep(3) # pausa a execução por 3 segundos
for i in range(100):
  time.sleep(0.1) # pausa a execução por 0.1 segundo
fim = time.time() # tempo final
print(fim - inicio) # tempo total (em segundos)
# 13.029353380203247
```

- Será computado o tempo gasto para executar o trecho de código entre as declarações das variáveis `inicio` e `fim`.
- Dessa forma, é possível mensurar o tempo de execução gasto por um programa, uma função ou um trecho específico de código.

Exercícios

Exercícios

1. Implemente uma versão recursiva do função `merge`.
2. Implemente uma função de partição que use o método da mediana de três elementos da lista para definir o pivô.
3. Implemente uma função de partição que use um elemento da lista escolhido aleatoriamente como pivô.
   Dica: use a função `randint` da biblioteca `random`.

```python
import random
# Gera um número aleatório entre 1 e 10 (inclusive)
n = random.randint(1, 10)
print(n)
# 6
```