

MC558 - Projeto e Análise de Algoritmos II

Prova Individual - 03/09/2012

Instruções:

1. Comece pelas questões que você tem mais certeza de saber fazer.
2. Não perca tempo com detalhes menores.
3. Foque no que é relevante para resolver a questão e passe logo para a próxima.
4. Se sobrar tempo, você pode acrescentar detalhes às questões já resolvidas.

Questão 1 Revisão de pré-requisitos.

1. (Valor 1,5) **Resolva** a recorrência:

$$\begin{aligned}T(0) &= 0, \\T(n) &= T(n-1) + n^2.\end{aligned}$$

Em seguida, **encontre** uma função simples $f(n)$ tal que $T(n) = \Theta(f(n))$.

2. (Valor 1,0) **Ordene** as funções a seguir como f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 de forma que $f_i = O(f_{i+1})$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Mostre **todas** as ordens que satisfaçam a esta condição.

$$(\sqrt{2})^{\lg n}, \lg^2 n, n2^n, e^n, n.$$

Nota: \lg significa logaritmo na base 2.

Questão 2 (Valor 2,5) Seja M a matriz de incidência $n \times m$ de um grafo simples e não orientado G com n vértices e m arestas. Um conjunto B de arestas deste grafo pode ser codificado como um vetor $m \times 1$ contendo 1 nas linhas correspondentes a arestas $e \in B$ e 0 nas outras linhas. Em particular, vamos denotar por E o vetor correspondente ao conjunto de todas as arestas. Analogamente, um conjunto C de vértices pode ser codificado como um vetor $n \times 1$ contendo 1 nas linhas correspondentes a vértices $v \in C$ e 0 nas demais linhas. Em particular, vamos denotar por V o vetor correspondente ao conjunto de todos os vértices.

Com estas definições temos várias relações interessantes. Por exemplo, temos sempre $M^t V = 2E$, onde X^t representa a transposta de X . **Ache expressões matriciais** como estas para caracterizar as seguintes propriedades. Note que a primeira já foi resolvida para vocês, como um exemplo adicional envolvendo desigualdades (as desigualdades matriciais são interpretadas elemento a elemento).

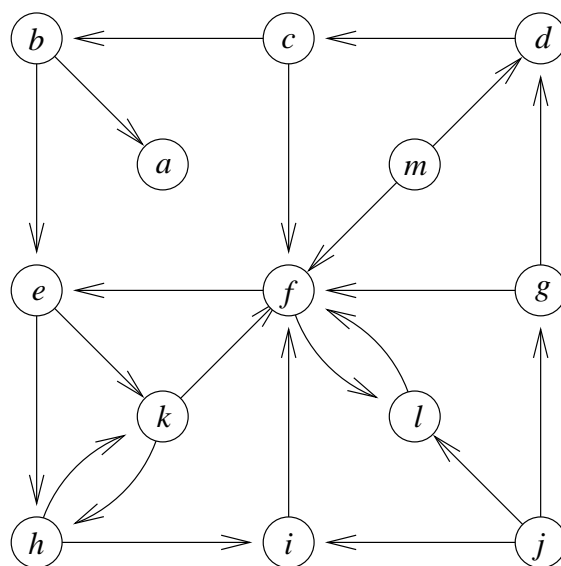
1. Todo vértice tem grau pelo menos 2 se e somente se $ME \geq 2V$.

2. B é um emparelhamento se e somente se
3. C é um conjunto independente se e somente se
4. B é uma cobertura por arestas se e somente se
5. C é uma cobertura por vértices se e somente se
6. G é bipartido se e somente se

Nota: lembre-se de que

- para multiplicar matrizes o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda;
- só é possível comparar matrizes que tenham as mesmas dimensões.

Questão 3 (Valor 2,5) Considere o grafo orientado a seguir.



Execute uma DFS neste grafo, supondo que as listas de adjacência estejam em ordem alfabética, e os vértices no laço principal são também selecionados em ordem alfabética. Mostre num desenho as **arestas da floresta DFS**, bem como os **tempos de chegada e saída** de cada vértice. Por fim, mostre as **componentes fortemente conexas** do grafo (não precisa ser através de algoritmo; basta usar a definição).

Questão 4 (Valor 2,5) Considere a versão não orientada do grafo da questão (). Execute uma BFS nele começando pelo vértice a . Mostre num desenho as **distâncias** de a a cada vértice e resalte as **arestas da árvore BFS**, que indicam o predecessor de cada vértice.

Boa sorte!