Ata de exercícios de 28/08/2002

Desirée Leopoldo da Silva Ottoni

Campinas, 28 de agosto de 2002.

1 Exercício 2.2.2

O número de árvores geradoras vai ser calculado utilizando o método do determinante. O primeiro passo a ser feito é montar a matriz para o cálculo do número de árvores geradoras do grafo 1. Esta matriz é composta de cada elemento da matriz de adjacência multiplicado por -1 e o elemento a_{ii} é o grau do vértice "i" do grafo. A matriz montada para o grafo 1 é mostrada em(1).

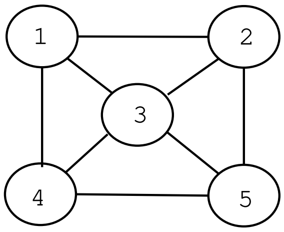

Figura 1: Grafo utilizado no exercício 2.2.2.

$$Mat = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ápos montada a matriz, deve-se escolher um elemento, e elinar a coluna e a linha a que este elemento pertence. Em (2) pode-se observar a matriz mostrada em (1), eliminando a coluna 3 e a linha 3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

O próximo passo a ser feito é calcular o determinante da matriz 2. Para resolver o determinante da matriz, foi escolhida para ser eliminada a primeira linha da matriz 2. Após, a fórmula 3 foi utilizada para o cálculo do determinante.

$$\text{detA} = \sum (a_{ij}(-1)^{i+j} detA_{ij}) \tag{3}$$

O desenvolvimento e o resultado podem ser observados na equação 4.

$$detA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} 3(-1)^2 + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} (-1)(-1)^3 +$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} (-1)(-1)^4 + (-1)^5 0 = 45 \tag{4}$$

2 Exercício 2.2.10

Para calcular o número de árvores geradoras de $K_{2,m}$ foi montada a matriz que seu determinante é o número de árvores geradoras, como no exercício anterior. Esta matriz pode ser observada na equação 5.

$$Mat = \begin{bmatrix} m & 0 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 0 & m & -1 & ... & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ . & . & . & & . & . \\ -1 & -1 & 0 & ... & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & ... & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Escolheu eliminar a última linha e a última coluna, ficando com a matriz mostrada na figura 6. Usando propriedades de matriz, foi fazendo operações com as linhas e colunas até chegar na matriz mostrada na figura 7. Olhando esta matriz, pode-se concluir que seu determinante é igual a equação 8.

$$A = \begin{bmatrix} \text{m} & 0 & \text{-1} & ... & \text{-1} \\ 0 & \text{m} & \text{-1} & ... & \text{-1} \\ \text{-1} & \text{-1} & 2 & ... & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \text{-1} & \text{-1} & 0 & ... & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \text{m} & \text{-1} & ... & \text{-1} \\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\text{detA} = \sum_{i=1}^{m} i \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{i} \end{pmatrix} = m2^{m-1} \tag{8}$$

Prova: (primeira solução)

Por triângulo de Pascal, sabe-se que $\sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{i} \end{pmatrix} = 2^m$.

Desenvolvendo o Binômio de Newton, conclui-se que: $\sum_{i=1}^{m} i \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{i} \end{pmatrix} = m \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix} \text{m-1} \\ \text{i-1} \end{pmatrix} = m \sum_{i=0}^{m-1} \begin{pmatrix} \text{m-1} \\ \text{i} \end{pmatrix} = 2^{m-1}$

Prova: (segunda solução)

Partindo da equação: $(a+b)^m = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{i} \end{pmatrix} a^i b^{m-i}$

Fazendo b=1: $(a+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} \text{m} \\ \text{i} \end{pmatrix} x^i$

Derivando a equação anterior em relação a x obtem-se: $m(x+1)^{m-1} = \sum_{i=0}^{m} \left(\begin{array}{c} \mathrm{m} \\ \mathrm{i} \end{array} \right) i x^{i-1}$

Por fim, para x=1: $m 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m} \left(\begin{array}{c} \mathrm{m} \\ \mathrm{i} \end{array} \right) i$