1.2.17

Jorge Alencar

06 - Março - 2012

Exercício 1.1.31: Prove que um grafo autocomplementar de n vértices existe se, e somente se, 4 divide n ou $n-1$.

($\Longrightarrow$) Suponha que exista um grafo G autocomplementar com n vértices. Logo $G \simeq \bar{G}$, onde $\bar{G}$ é o grafo complementar de G. Isso implica que $|E(G)| = |E(\bar{G})|$. Por definição de grafo complementar, temos que a soma da quantidade de arestas do grafo G e de seu complementar é igual à quantidade de arestas do grafo completo com n vértices. Logo

$$\begin{aligned} |E(G)| + |E(\bar{G})| &= \frac{n(n-1)}{2} \\ |E(G)| + |E(G)| &= \frac{n(n-1)}{2} \\ 2|E(G)| &= \frac{n(n-1)}{2} \\ |E(G)| &= \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Como $|E(G)|$ é um número inteiro, e apenas um entre n e $n-1$ é par, temos que 4 divide n ou $n-1$.

($\Longleftarrow$) Suponha que 4 divide n. Isso implica que existe m tal que $n = 4m$. Dividimos o n vértices em 4 grupos de m vértices, e construímos 4 grafos $G_1 = K_m$,$G_2 = 0_m$,$G_3 = 0_m$ e $G_4 = K_m$, onde 0_m é um grafo de m vértices e zero arestas. Criamos todas as arestas entre os pares de subgrafos (G_1, G_2),(G_3, G_2) e (G_3, G_4), obtendo algo como na Figura 1.

Se complementarmos o grafo da Figura 1, temos o grafo da Figura 2, que é claramente isomorfo ao da Figura 1.

Suponha agora que 4 divide $n-1$. Isso implica que existe m tal que $n = 4m+1$. Dividimos os n vértices em 4 grupos de m vértices e um grupo H com apenas 1 vértice, e construímos 4 grafos $G_1 = K_m$,$G_2 = 0_m$,$G_3 = 0_m$ e $G_4 = K_m$, onde 0_m é um grafo de m vértices e zero arestas. Criamos todas as arestas entre os pares de subgrafos (G_1, G_2),(G_1, G_4) e (G_3, G_4), e todas as arestas entre os pares de subgrafos (G_2, H) e (G_3, H), obtendo algo como na Figura 3.

Se complementarmos o grafo da Figura 3, temos o grafo da Figura 4, que é claramente isomorfo ao da Figura 3.

As Figuras 5 e 6 representam graficamente o que esta acontecendo com $m = 3$ em ambos os casos.

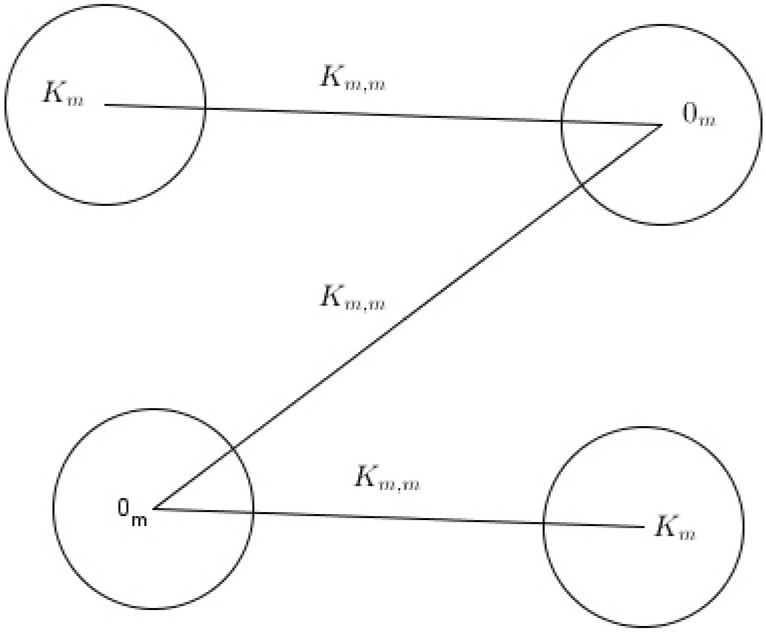

Figura 1: Grafo autocomplementar. A notação “$K_{m.m}$” significa que incluimos todas as arestas entre os subgrafos indicados.

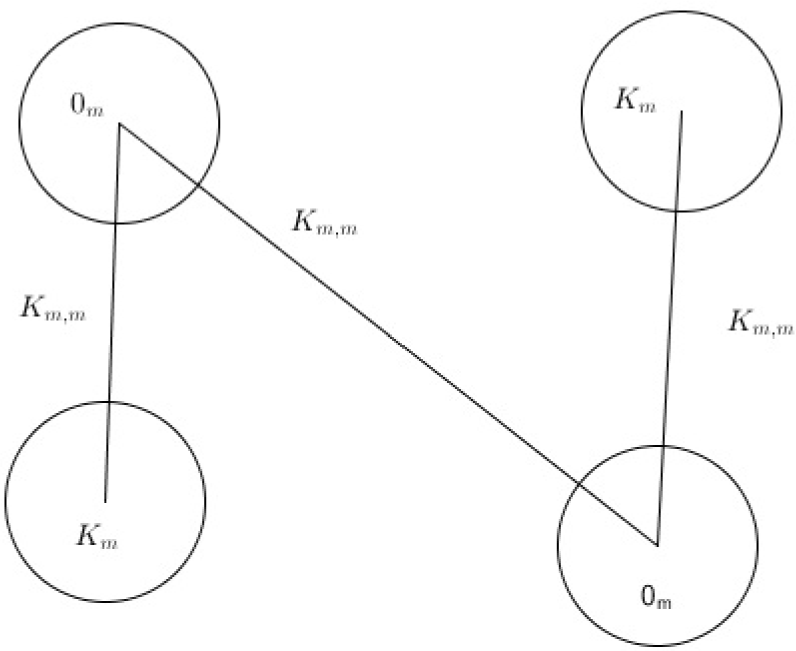

Figura 2: Complemento do grafo da Figura 1. A notação “$K_{m.m}$” significa que incluimos todas as arestas entre os subgrafos indicados.

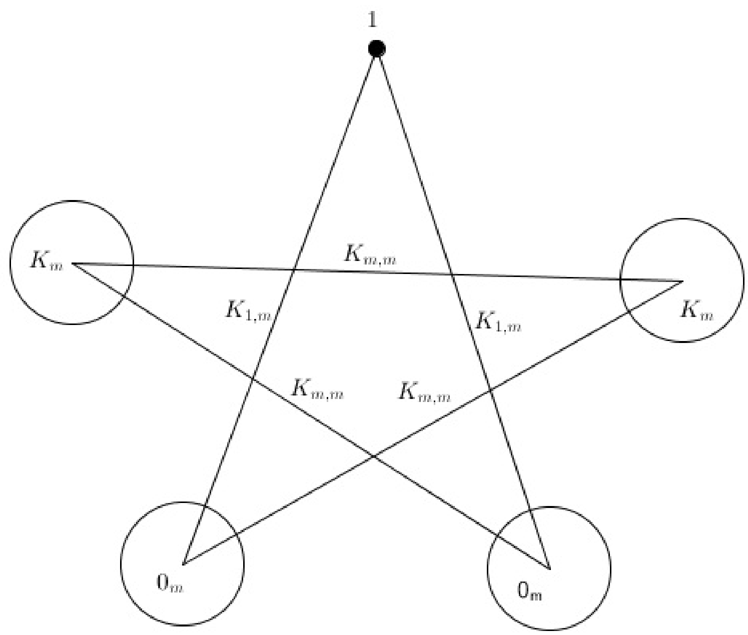

Figura 3: Grafo autocomplementar. As notações "$K_{m.m}$" e "$K_{1.m}$" significam que incluimos todas as arestas entre os subgrafos indicados.

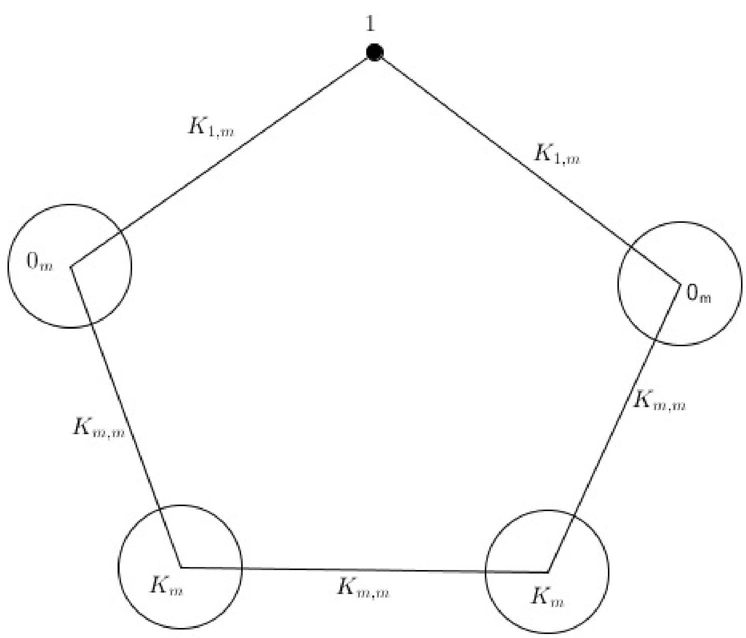

Figura 4: Complemento do grafo da Figura 3. As notações "$K_{m.m}$" e "$K_{1.m}$" significam que incluimos todas as arestas entre os subgrafos indicados.

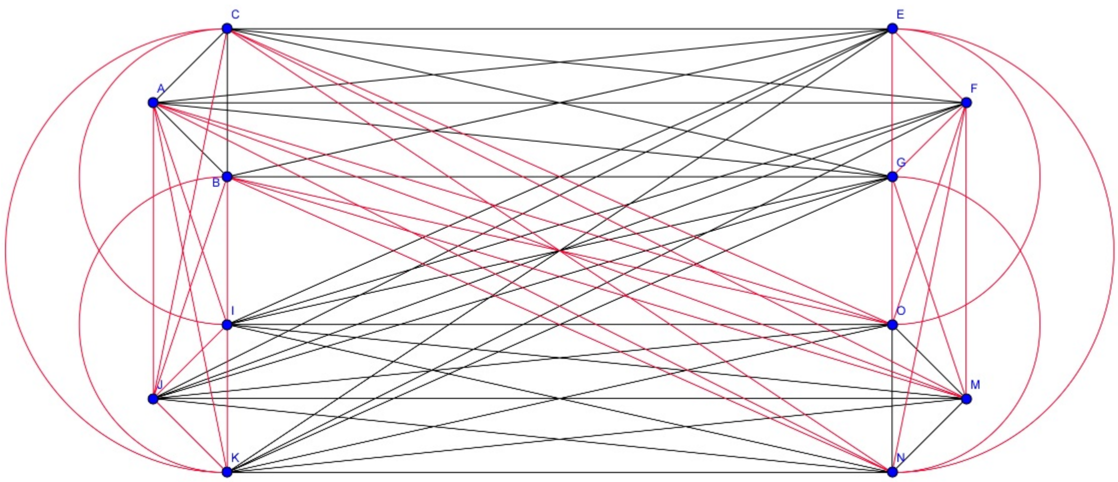

Figura 5: Grafo autocomplementar com 12 vértices.

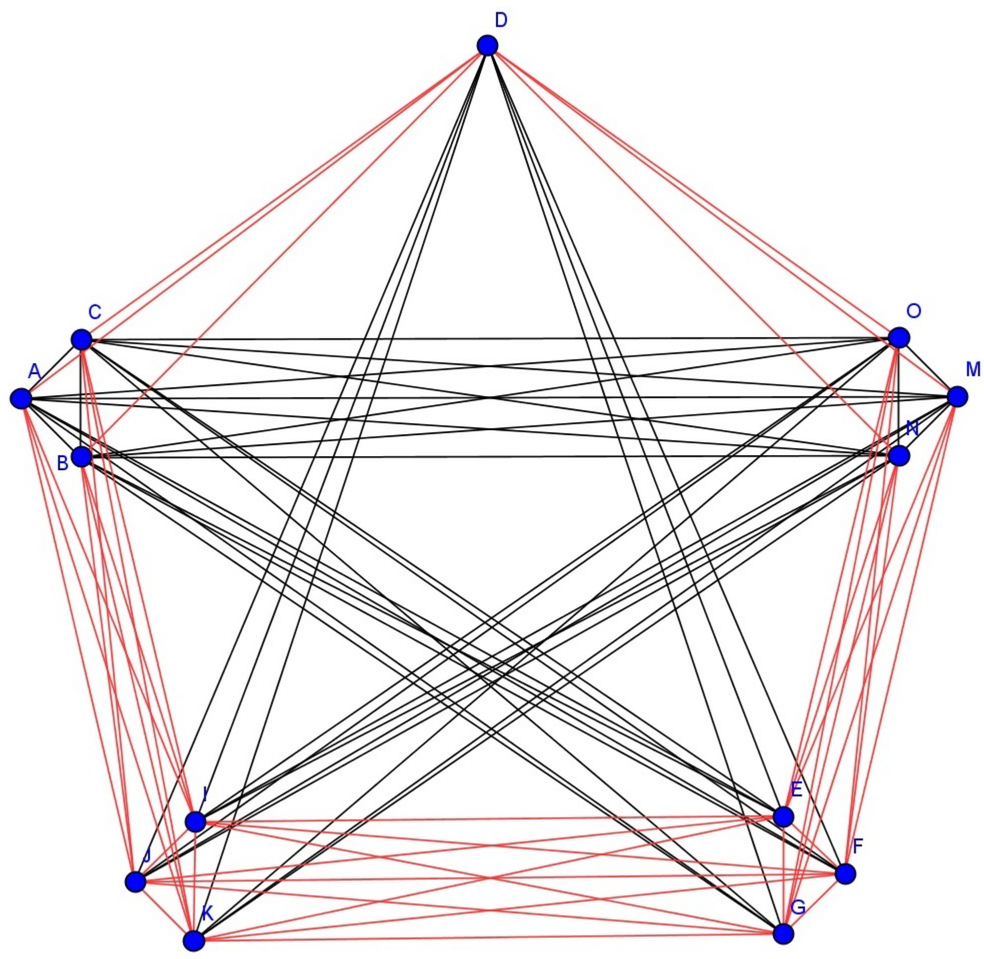

Figura 6: Grafo autocomplementar com 13 vértices.