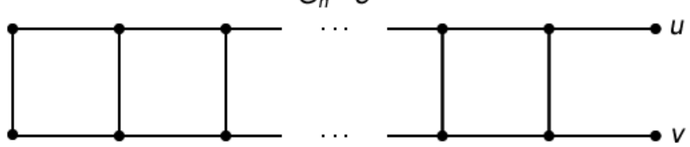
MO405 - Teoria dos grafos
Resolução da questão 5.3.5
Lucas de Oliveira
12 - Maio - 2012

Enunciado: Para $n \geq 1$, faça $G_n = P_n \,\square\, K_2$. Este grafo é ilustrado abaixo e possui $2n$ vértices e $3n - 2$ arestas. Prove que $\chi(G_n; k) = (k^2 - 3k + 3)^{(n-1)} k(k-1)$.

Resolução: Vamos provar por indução em n. Para $n = 1$ temos $G_1 = K_2$. Portanto, $\chi(G_1; k) = k(k-1)$, satisfazendo a equação. Sabemos que $\chi(G_n; k) = \chi(G_n - e; k) - \chi(G_n \cdot e; k)$ onde e é uma aresta de G_n.

Na ilustração de G_n acima, considere $e = (u, v)$ como sendo a aresta vertical desenhada mais à direita. Note que removendo u e v de G_n obtemos G_{n-1}. Ao retirarmos e de G_n, tendo uma coloração própria para G_{n-1} usando k cores, podemos colorir u e v com $k-1$ cores diferentes, pois cada um deles é adjacente a apenas um vértice de G_{n-1}. Por isso, afirmamos que $\chi(G_n - e; k) = \chi(G_{n-1}; k)(k-1)(k-1)$. Ao contrair a aresta e, os vértices u e v tornam-se um único vértice w que é adjacente a dois vértices de G_{n-1} que por sua vez são adjacentes entre si. Portanto, temos $k-2$ cores livres para colorir w, sendo assim, $\chi(G_n \cdot e; k) = \chi(G_{n-1}; k)(k-2)$. Substituindo as equações encontradas para $\chi(G_n - e; k)$ e $\chi(G_n \cdot e; k)$ em função de $\chi(G_{n-1}; k)$ na equação $\chi(G_n; k)$ obtemos $\chi(G_{n-1}; k)(k-1)(k-1) - \chi(G_{n-1}; k)(k-2) = \chi(G_{n-1}; k)(k^2 - 3k + 3)$. Pela hipótese da indução, sabemos que $\chi(G_{n-1}; k) = (k^2 - 3k + 3)^{(n-2)} k(k-1)$. Logo, concluímos que $\chi(G_n; k) = (k^2 - 3k + 3)^{(n-2)} k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = (k^2 - 3k + 3)^{(n-1)} k(k-1)$.

G_n - e



$G_n \cdot e$