MO405 - Teoria dos grafos
Resolução da questão 8.2.6
Lucas de Oliveira
21 - Junho - 2012

Enunciado: Determine quais matróides uniformes são gráficos. Caracterize os grafos cujos matróides ciclo são matróides uniformes.

Resolução: Denotamos o matróide uniforme cujo conjunto de elementos é $E = \{1, 2, ..., n-1, n\}$ e a família de conjuntos independentes é $\{X \subseteq E : |X| \leq k\}$ por $U_{k,n}$. O matróide ciclo de um grafo G é denotado por $M(G)$.

Os matróides uniformes $U_{0,n}$, $U_{1,n}$, $U_{n-1,n}$ e $U_{n,n}$ são os únicos que são gráficos. Para cada matróide uniforme vamos mostrar um grafo G com n arestas cujo matróide ciclo é equivalente ao matróide uniforme, ou vamos verificar que tal grafo não existe:

$U_{0,n}$: Seja L a classe dos grafos cujas arestas são todas laços e seja $G_1 \in L$ um grafo com n arestas. Como todas as arestas de G_1 são laços, o único conjunto independente de $M(G_1)$ é o conjunto vazio.

$U_{1,n}$: Seja P a classe dos grafos G tais que existem dois vértices distintos u e v em $V(G)$ com todas as arestas de $E(G)$ sendo indicentes em u e v. Seja G_2 um grafo em P com n arestas. Como todas as arestas de G_2 são paralelas entre si, os conjuntos independentes de $M(G_2)$ são todos os subconjuntos de $E(G_2)$ que contêm no máximo uma aresta.

$U_{n-1,n}$: Seja C a classe dos grafos cujo conjunto de arestas forma exatamente um ciclo, e seja $G_3 \in C$ um grafo com n arestas. Sendo assim, os conjuntos independentes de $M(G_3)$ são todos os subconjuntos de $E(G_3)$ que contêm no máximo $n-1$ arestas.

$U_{n,n}$: Seja F a classe dos grafos acíclicos e seja $G_4 \in F$ um grafo com n arestas. É fácil ver que os conjuntos independentes de $M(G_4)$ são todos os subconjuntos de $E(G_4)$.

$U_{k,n}$ onde $2 \leq k \leq n-2$: Neste caso, para encontrar um grafo G tal que $M(G)$ seja também um matróide uniforme as seguintes condições devem ser satisfeitas. O grafo G deve *(i)* conter ao menos $n-k \geq 2$ ciclos e *(ii)* possuir cintura e circunferência iguais a $k+1 \geq 3$. Caso a condição *(i)* não seja satisfeita o subconjunto de $E(G)$ que não contém exatamente uma aresta de cada ciclo de G é um conjunto indepentende de $M(G)$ com pelo menos $k+1$ arestas. Considerando que G não pode ser acíclico, se *(ii)* não é satisfeita existe em G um ciclo com no máximo k arestas sendo que estas arestas formam um conjunto dependente de $M(G)$, ou existe um ciclo com no mínimo $k+2$ arestas sendo que qualquer conjunto com $k+1$ arestas deste ciclo forma um conjunto independente de $M(G)$. Desta forma, fica claro que se alguma destas condições não for satisfeita é possível encontrar um conjunto independente (dependente) de $M(G)$ que não é um conjunto independente (dependente) de $U_{k,n}$.

Pelas condições *(i)* e *(ii)* podemos afirmar que existem dois ciclos, C_1 e C_2, com exatamente $k+1$ arestas em G. Sejam e_1 uma aresta que está em C_1 e não está em C_2, e e_2 uma aresta que está em C_2 e não está em C_1.

Como a cintura de G é igual a $k+1 \geq 3$, as arestas e_1 e e_2 não são arestas paralelas. Seja A um conjunto contendo e_1 e as k arestas de C_2 diferentes de e_2. Como C_2 é um ciclo com $k+1$ arestas, as k arestas deste ciclo em A formam um caminho. Pela condição *(ii)* temos que o único modo de um subconjunto de A formar um ciclo em G seria se e_1 e e_2 fossem paralelas, mas sabemos que isto não é verdade. Logo, A é um conjunto independente de $M(G)$ e possui $k+1$ arestas. Portanto, $M(G)$ não é uniforme.

Os grafos das classes L, P, C e F são os únicos cujos matróides ciclo são matróides uniformes.

Vimos anteriormente que estes grafos dão matróides unifomes, então, nos resta mostrar que os demais grafos não podem ser matróides uniformes. Seja G' um grafo não pertencente a nenhuma destas classes. Sabendo que G' não está em F, temos que G' possui ao menos um ciclo C'. Como G' não está em C, podemos afirmar também que, além das arestas de C', existe pelo menos mais uma aresta e' em G'. Vamos verificar que $M(G')$ não é uma matróide uniforme analisando todos os possíveis casos para o número de arestas de C':

O ciclo C' é um laço: como G' não pertence a L, podemos tomar uma e' que não é um laço. Neste caso, existe um conjunto independente em $M(G')$ contendo e' e não existe nenhum conjunto independente contendo o laço em C. Sendo assim, neste caso, $M(G')$ não é um matróide uniforme.

O ciclo C' é formado por duas arestas paralelas: como G' não pertence à classe P, podemos tomar uma e' que não é uma aresta paralela às arestas de C'. Se e' é um laço, existe em $M(G')$ um conjunto independente contendo uma aresta de C', mas não existe um conjunto independente contendo e'. Se e' não é um laço, existe em $M(G')$ um conjunto independente contendo uma aresta de C' e e', mas não existe um conjunto independente contendo as duas arestas de C'. Logo, em ambas situações, $M(G')$ não é um matróide uniforme.

O ciclo C' possui três ou mais arestas: Se e' é um laço existe em $M(G')$ um conjunto independente contendo uma aresta de C', mas não existe um conjunto independente contendo e'. Se e' é uma aresta paralela a uma aresta de C' existe em $M(G')$ um conjunto independente contendo duas arestas de C', mas não existe um conjunto independente contendo e' e a aresta em C' paralela a e'. Finalmente, se e' não é um laço e não é paralela a nenhuma aresta de C', então existe em $M(G')$ um conjunto independente que contém e' e todas as aresta de C' menos uma, mas não existe um conjunto independente com todas as arestas de C', sendo que este possui a mesma cardinalidade que o anterior. Com isso concluímos que neste caso $M(G')$ também não pode ser um matróide uniforme.