MO405 - Teoria dos grafos
Resolução da questão 8.2.7

Lucas de Oliveira

18 - Junho - 2012

Enunciado: Determine quais matróides partição são gráficos. Caracterize os grafos cujos matróides ciclo são matróides partição.

Resolução: Todo matróide partição é gráfico. Seja M um matróide partição em um conjunto E induzido pela partição E_1, ..., E_k. Crie um grafo G contendo k componentes conexas G_i, para $i = 1, \ldots, k$, sendo cada G_i formada por dois vértices distintos u_i e v_i ligados por $|E_i|$ arestas paralelas, que representam os elementos da partição E_i. Desta forma, cada conjunto independente de M corresponde a um conjunto independente em $M(G)$, pois é formado de arestas em componentes distintas de G. E vice-versa, pois todo conjunto independente de G conterá no máximo uma aresta em cada componente. Isso mostra que todo matróide partição é gráfico.

Agora vamos mostrar que o matróide cíclico $M(H)$ de um grafo é matróide partição se e somente se o grafo G não possui ciclos de tamanho diferente de 2.

Se H é um grafo acíclico ou com apenas ciclos de tamanho 2 (arestas paralelas) então o matróide $M(H)$ também é um matróide partição. Particione o conjunto de arestas de H da seguinte forma. Duas arestas em H estão em uma mesma partição se, e somente se, elas são paralelas. Note que se houver um meio de criar um ciclo, este será tomando duas arestas de uma mesma partição. Portanto, todo conjunto independente de M_2 contém no máximo uma aresta desta partição. Logo, $M(H)$ também é um matróide partição, induzido por esta partição que acabamos de definir.

Se H possuir laços ou ciclos com três ou mais arestas então não existe uma forma de particionar o conjunto de arestas de H de tal forma que $M(H)$ seja um matróide partição. Primeiramente, note que todo elemento de um matróide partição pertence a algum conjunto independente deste matróide. Se H possuir um laço, esta aresta não estará em nenhum conjunto independente de $M(H)$, portanto, neste caso, $M(H)$ não pode ser um matróide partição. Se H possuir um ciclo com três ou mais arestas, temos que cada par de arestas deste ciclo forma um conjunto independente em $M(H)$. Isso mostra que ao particionar o conjunto de arestas de H é necessário colocar cada aresta deste ciclo em uma partição diferente. Contudo, um matróide partição induzido por esta partição terá um conjunto independente contendo todas as arestas do ciclo, o que não seria um conjunto independente em H. Logo, não há como particionar o conjunto de arestas de H de tal forma que $M(H)$ seja um matróide partição.