MO405 – Teoria dos Grafos
Ata t7.1.10 – Teorema de Vizing

Aluno: Junior Fabian Arteaga
Data: 22/Jun/2012

Teorema de Vizing: Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

A prova deste teorema está baseada em [1], e tem uma implementação disponível em [2].

Um grafo é valido se todas as arestas incidentes sobre um vértice têm diferente cor. A seguir, damos uma rotina para colorir uma aresta *XY* que esteja sem cor. A repetição desta rotina para todas as arestas colorirá o grafo com $\Delta(G) + 1$ cores.

Definição de Leque:

A prova utiliza uma estrutura de dados chamada *leque*. Um leque <*f*...*l*> é uma sequência de vértices que satisfaz o seguinte:

F0: <*f*...*l*> é uma sequência não vazia de vizinhos distintos de *X*;
F1: a aresta *X f* está sem cor; e
F2: $\forall$ u :: a cor da aresta *X* u^+ é livre em u. (u^+ é o sucessor de u no leque)

Construção de um leque maximal *F*:

$F := \langle Y \rangle$ // Inicializa o leque *F* com *Y*
Enquanto ($\exists v :: B$)
    $F := F \cup v$ // adiciona *v* ao leque F.

Onde *v* satisfaz o predicado *B:*
B: $X\,v$ é uma aresta e $v \notin F$ e a cor de *Xv* está livre no ultimo vértice de *F*.

O Algoritmo para a prova do teorema de Vizing:

Algoritmo para a coloração da aresta *XY*:

Construir leque maximal <*f*...*l*>*;*
Seja *c* uma cor livre em *X* e *d* uma cor livre em *l*; // Pegar cor livre
Inverte caminho *cd* (Caminho que só usa cores *c* e *d*) // Mudar as cores das arestas no // caminho *cd*(*c* para *d* e *d* para *c*)

Seja *w* que satisfaz o seguinte:
    $w \in \langle f \ldots l \rangle$, <*f*...*w*> é um leque e *d* está livre em *w*

Girar o leque <*f*...*w*> e dar à aresta *Xw* a cor *d*

Referência

[1] J. Misra, D. Gries. *A constructive Proof of Vizing's Theorem*. IPL 41, 3 (March 1992), 131-133.

[2] http://ranger.uta.edu/~weems/NOTES5311/misraGriesNew.c (acessada em 22 de Junho de 2012)