$d_p(R_n) = \lceil \frac{3n}{4} \rceil$**?** Já sabemos que $d_p(R_n) \leqslant \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ para $n \geqslant 4$ pelo Teorema 3.6. Se conseguíssemos um limite inferior de igual valor provaríamos a igualdade. Resultados computacionais [10] mostram que tal igualdade é de fato verdade para $n \leqslant 16$.

$D_p(n) = d_p(R_n)$**?** Pela definição temos que $D_p(n) \geqslant d_p(R_n)$. Se soubermos o valor exato de $d_p(R_n)$ conseguiremos um limite inferior para o diâmetro de transposição de prefixo melhor que o do Teorema 1.21. No entanto ainda faltará um limite superior para concluirmos a igualdade. Resultados computacionais [10] mostraram que tal igualdade é de fato verdade para $n \leqslant 11$.

3.3 Permutações Fáceis

Da mesma forma que tentamos resolver o problema da distância de transposição de prefixo tentando identificar as propriedades que tornam uma ordenação difícil, podemos fazer o mesmo tentando identificar as propriedades que tornam uma ordenação fácil.

Para isso definiremos uma família de permutações que chamaremos de *fáceis*, pois elas possuem ordenação única, com transposições bem determinadas e com a distância igualando-se ao limite inferior por pontos de quebra do Teorema 1.8.

Formalmente, definiremos uma permutação como fácil baseando-se em sua distância e número de pontos de quebra. As outras propriedades serão conseqüência dessa definição.

Definição Uma permutação π é considerada *fácil* se, e somente se, $d_p(\pi) = \frac{b_p(\pi)-1}{2}$.

Repare que, como a distância é um valor inteiro, então toda permutação fácil deve ter um número ímpar de pontos de quebra de prefixo.

A definição apresentada permite uma caracterização recursiva equivalente de permutação fácil.

Teorema 3.9 *Uma permutação π é fácil se, e somente se, já está ordenada ou existe uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ e $\tau\pi$ é fácil.*

Prova: Se a permutação π já está ordenada, então ela é fácil. Vamos considerar então que π não está ordenada.

Precisamos primeiro provar que, se existe uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ e $\tau\pi$ é fácil, então π é fácil. Temos que $d_p(\pi) \leqslant d_p(\pi\tau) + 1 = (b_p(\pi\tau) - 1)/2 + 1 = (b_p(\pi) - 1)/2$. No entanto, pelo Teorema 1.8, vale a igualdade e, portanto, π é fácil.

Vamos agora provar que, se π é fácil, existe uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ e $\pi\tau$ é fácil. Considere uma transposição de prefixo τ tal que $d_p(\pi\tau) = d_p(\pi) - 1$. Pelo Lema 1.7 temos $b_p(\pi) \leqslant b_p(\pi\tau) + 2$. Como π é fácil, então $d_p(\pi\tau) =$

$(b_p(\pi) - 1)/2 - 1 \leqslant (b_p(\pi\tau) - 1)/2$. No entanto, pelo Teorema 1.8, vale a igualdade e, portanto, $\pi\tau$ é fácil e $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$. ■

3.3.1 Propriedades

Como visto no Lema 1.7, não podemos retirar mais do que dois pontos de quebra de prefixo com uma transposição de prefixo. Por isso somos obrigados a retirar exatamente dois pontos de quebra de prefixo em cada passo de uma ordenação ótima de uma permutação fácil. Veremos a seguir que, se existe uma transposição de prefixo que retira dois pontos de quebra de uma permutação, tal transposição é única.

Lema 3.10 *Existe no máximo uma transposição de prefixo $\tau(1, j, k)$ que retira dois pontos de quebra de uma permutação π. Caso exista, então $k = \pi^{-1}(pred(\pi(1))) + 1$ e $j = \pi^{-1}(pred(\pi(k))) + 1$.*

Prova: Pela Proposição 1.6, para termos $b_p(\pi\tau) - b_p(\pi) = -2$, com $\tau = \tau(1, j, k)$, devemos ter $\pi(j - 1) \neq pred(\pi(j))$, $\pi(k - 1) \neq pred(\pi(k))$, $\pi(k - 1) = pred(\pi(1))$ e $\pi(j - 1) = pred(\pi(k))$. Com isso, $k = \pi^{-1}(pred(\pi(1))) + 1$ e $j = \pi^{-1}(pred(\pi(k))) + 1$ e tal solução, se possível, é única. ■

E isso nos garante uma propriedade muito especial para as permutações fáceis:

Teorema 3.11 (Dias e Meidanis [10]) *Toda permutação fácil possui uma única forma de ordenação ótima por transposições de prefixo.*

Prova: Como temos que tirar exatamente dois pontos de quebra em todo o passo de uma ordenação ótima de uma permutação especial e pelo Lema 3.10 existe uma única transposição de prefixo em cada passo que consegue isso, então só temos uma seqüência de transposições de prefixo que ordena otimamente uma permutação fácil. ■

Corolário 3.12 *Todas as permutações intermediárias de uma ordenação ótima por transposições de prefixo de uma permutação fácil são fáceis.*

Prova: Se temos uma permutação fácil π e aplicamos uma transposição τ que retira dois pontos de quebra de π, então pelos Lema 3.10 e Teorema 3.11 $d_p(\pi\tau) = d_p(\pi) - 1$. No entanto também temos que $b_p(\tau\pi) = b_p(\pi) - 2$, o que nos dá $d_p(\pi\tau) = (b_p(\pi\tau) - 1)/2$ e, portanto, $\pi\tau$ também é fácil. ■

Uma das conseqüências do Corolário 3.12 é que toda ordenação ótima pode ser dividida em duas etapas. Inicialmente passamos apenas por permutações não fáceis e, em seguida, passamos apenas por permutações fáceis. Caso a permutação a ser ordenada seja fácil, então não há a primeira etapa, pois só passamos por permutações fáceis em sua ordenação. Já a segunda etapa sempre existe, pois temos que chegar na permutação ordenada, que é fácil.

Teorema 3.13 *É possível ordenar otimamente por transposições de prefixo uma permutação fácil em tempo polinomial.*

Prova: Se queremos ordenar uma permutação fácil π e ela já está ordenada, estão o problema já está resolvido. Caso contrário, pelo Teorema 3.9, existe uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ e $\pi\tau$ é fácil. Obtemos essa transposição τ em tempo $O(1)$ como descrito no Lema 3.10. Como $d_p(\pi\tau) = d_p(\pi) - 1$ e $\pi\tau$ é fácil, aplicamos esse procedimento recursivamente, completando a indução e obtendo um tempo total $\Theta(d_p(\pi) \times \text{(tempo de uma transposição)})$, que é facilmente implementado como $O(n^2)$, onde n é o comprimento da permutação π. ∎

Dias e Meidanis [10] publicaram anteriormente um teorema equivalente:

Teorema 3.14 *É possível determinar se uma permutação é fácil em tempo polinomial.*

Prova: Se queremos testar uma permutação π e ela estiver ordenada, então π é fácil. Caso contrário, buscamos uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ como descrito no Lema 3.10. Pelo Teorema 3.9, se não houver tal transposição, então π não é fácil. Se houver tal transposição, então π é fácil se, e somente se, $\pi\tau$ é fácil. Testamos então $\pi\tau$ recursivamente, completando a indução. Isso nos dá um algoritmo $O(n^2)$ para reconhecimento de permutações fáceis, onde n é o comprimento da permutação testada. ∎

Como dito anteriormente, em uma ordenação ótima temos duas etapas: passamos inicialmente apenas por permutações não fáceis e, em seguida, apenas por permutações fáceis. Se chegarmos na segunda etapa, então, pelo Teorema 3.13, o problema da ordenação por transposição de prefixo fica fácil. Com isso, uma forma de se tentar resolver o problema da ordenação de uma permutação por transposição de prefixo é encontrar qual permutação fácil está em sua ordenação ótima e como chegar otimamente nela. Baseando-se nessa idéia propomos a seguinte conjectura.

Conjectura 3.15 *Para toda permutação π de comprimento n existe uma permutação fácil π', tal que $b_p(\pi') = b_p(\pi) - k$ e*

$$d_p(\pi, \pi') \leqslant \left\lceil \frac{n}{4} + \frac{k}{2} \right\rceil .$$

A corretude de tal conjectura implica no seguinte limite superior para o diâmetro de transposição de prefixo.

Teorema 3.16 *Se a Conjectura 3.15 for verdadeira, então* $D_p(n) \leqslant \lceil \frac{3n}{4} \rceil$.

Prova: Seja π uma permutação qualquer de comprimento n. Pela Conjectura 3.15 existe uma permutação π', tal que $b_p(\pi') = b_p(\pi) - k$ e $d_p(\pi, \pi') \leqslant \lceil \frac{n}{4} + \frac{k}{2} \rceil$. Como π' é fácil, $d_p(\pi') = \frac{b(\pi')-1}{2} = \frac{b_p(\pi)-k-1}{2}$. Com isso temos

$$d_p(\pi) \leqslant d_p(\pi, \pi') + d_p(\pi') \leqslant \left\lceil \frac{n}{4} + \frac{k}{2} \right\rceil + \frac{b_p(\pi) - k - 1}{2} \leqslant \left\lceil \frac{3n}{4} \right\rceil$$

para toda permutação π de comprimento n e, portanto, $D_p(n) \leqslant \lceil \frac{3n}{4} \rceil$. ■

Note que esse limite superior para o diâmetro coincide com o nosso limite superior para a distância da permutação reversa (Teorema 3.6), complementando as observações feitas na apresentação da Conjectura 3.8. Cabe notar também que as permutações $F_1(n)$, $F_2(n)$ e $F_3(n)$, com n múltiplo de 4, são todas facilmente ordenáveis e, dessa forma, validam a Conjectura 3.15 para o caso da permutação reversa. Para verificar isso tome $\pi = R_n$ e $\pi' = F_1(n - n \bmod 4)$. Dessa forma $b_p(\pi') = b_p(\pi) - n \bmod 4$ e

$$\begin{aligned} d_p(\pi, \pi') &= n \bmod 4 + \frac{n - n \bmod 4}{4} \\ &= \frac{n + 3(n \bmod 4)}{4} = \left\lfloor \frac{n + 3(n \bmod 4)}{4} \right\rfloor \\ &\leqslant \left\lfloor \frac{n + 2(n \bmod 4) + 3}{4} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n + 2(n \bmod 4)}{4} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n}{4} + \frac{n \bmod 4}{2} \right\rceil . \end{aligned}$$

Para conseguirmos transformar permutações quaisquer em fáceis com poucos movimentos é interessante conhecer melhor a estrutura de uma permutação fácil. Na busca de melhor caracterizarmos as permutações fáceis obtemos as seguintes propriedades.

Lema 3.17 *Para toda permutação fácil* π *que não esteja ordenada, temos* $pred(\pi(1)) \neq 0$.

Prova: Como $d_p(\pi) \geqslant 1$, então, pelo Teorema 3.9 e Lema 3.10, existe uma transposição única $\tau(1, j, k)$ tal que $d(\pi\tau) = d(\pi) - 1$ e $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$. Nesse caso, $k = \pi^{-1}(pred(\pi(1))) + 1$ e $j = \pi^{-1}(pred(\pi(k)), \pi) + 1$. Se $pred(\pi(1)) = 0$, então $k = \pi^{-1}(0) + 1 = 1$, o que é absurdo, pois $k > j > 1$. Então necessariamente $pred(\pi(1)) \neq 0$. ■

Note que esse lema implica em $b(\pi) = b_p(\pi)$ para toda permutação fácil π não ordenada.

Teorema 3.18 *Toda permutação fácil possui no máximo um ciclo não trivial em seu diagrama de ciclos.*

Prova: Considere uma permutação π. Podemos provar esse teorema por indução na distância de transposição de prefixo $d_p(\pi)$.

Se $d_p(\pi) = 0$, então π já está ordenado e portanto só possui ciclos triviais.

Se $d_p(\pi) \geqslant 1$, então, pelo Teorema 3.9, existe uma transposição de prefixo τ tal que $b_p(\pi\tau) = b_p(\pi) - 2$ e $\pi\tau$ é fácil. Por hipótese de indução, $c(\pi\tau) - c_t(\pi\tau) \leqslant 1$. Pelo Lema 3.17 e Proposição 1.13, $c_t(\pi\tau) - c_t(\pi) = 2$. No entanto só é possível criar dois novos ciclos se os três pontos onde a transposição τ quebra a permutação π estão em um mesmo ciclo de π. Nesse caso devemos ter obrigatoriamente $c(\pi) = c(\pi\tau) - 2$. Com isso temos $c(\pi) - c_t(\pi) = (c(\pi\tau) - 2) - (c_t(\pi\tau) - 2) = c(\pi\tau) - c_t(\pi\tau) \leqslant 1$, concluindo nossa prova. ■

Embora não tenhamos conseguido encontrar meios de se transformar eficientemente permutações quaisquer em fáceis por meio dessas propriedades, encontramos uma ligação entre os problemas de distância de transposição e distância de transposição de prefixo. Com tais propriedades podemos provar que uma ordenação ótima de uma permutação fácil no problema de transposições de prefixo também é uma ordenação ótima no problema de transposições original.

Teorema 3.19 *Para toda permutação fácil π, temos $d_p(\pi) = d(\pi)$.*

Prova: Se $d_p(\pi) = 0$ o caso é trivial. Assumiremos então que $d_p(\pi) \geqslant 1$.

Pelo Teorema 1.15 temos

$$\frac{n + 1 - c(\pi)}{2} \leqslant \frac{n + 1 - c_{odd}(\pi)}{2} \leqslant d(\pi).$$

Como $d_p(\pi) \geqslant 1$, pelo Lema 3.17

$$d_p(\pi) = \frac{b_p(\pi) - 1}{2} = \frac{b(\pi) + [[pred(\pi(1)) = 0]] - 1}{2} = \frac{b(\pi) - 1}{2}.$$

Pela Proposição 1.13 e Teorema 3.18

$$d_p(\pi) = \frac{n - c_t(\pi)}{2} \leqslant \frac{n + 1 - c(\pi)}{2}.$$

Com isso temos

$$\frac{n + 1 - c(\pi)}{2} \leqslant d(\pi) \leqslant d_p(\pi) \leqslant \frac{n + 1 - c(\pi)}{2}$$

e, portanto, $d(\pi) = d_p(\pi)$. ■

Esse teorema é um dos principais resultados desta seção, pois é um ponto de união entre os problemas de distância de transposição e distância de transposição de prefixo, definindo uma nova família de permutações que podem ser ordenadas eficientemente em ambos os problemas. Tal resultado vai ao encontro da proposta de Christie [8] de tentar resolver o problema da distância de transposição por meio da construção de um conjunto de famílias de permutações cujas distâncias são bem conhecidas e que cubra todas as possíveis permutações.

Com isso fica claro que o problema da distância de transposição de prefixo pode realmente ajudar no estudo do problema da distância de transposição, apesar de não estar claro se um pode ser resolvido pelo outro por redução polinomial.

3.3.2 Contagem

Uma possibilidade que foi considerada para tentar resolver o problema da distância por transposições de prefixo foi a de que poderia haver um número polinomial de permutações que não são fáceis. Se isso fosse verdade, poderíamos calcular a distância de uma permutação por meio de uma busca em largura que parasse sempre que encontrássemos permutações fáceis. Nesse caso percorreríamos, no pior caso, um número polinomial de permutações, o que nos daria um algoritmo também polinomial.

Isso motivou a busca pelo número de permutações fáceis de comprimento n que, como veremos, cresce muito rapidamente com o aumento de n, mas, infelizmente, a diferença entre $n!$ e esse valor cresce ainda mais rapidamente.

O que nos ajuda na contagem das permutações fáceis é o fato de sempre existir no máximo uma transposição de prefixo que remove dois pontos de quebra, como expresso pelo Lema 3.10.

Vamos realizar a contagem começando pela permutação com distância zero, seguida pelas permutações com distância um, e assim por diante. O princípio básico por trás disso é o seguinte. Se temos uma permutação fácil π e aplicamos uma transposição de prefixo τ que aumenta em dois o número de pontos de quebra de prefixo, então $\pi\tau$ também é fácil. Isso vem do Teorema 3.9, pois existe a transposição de prefixo τ^{-1} que retira dois pontos de quebra de prefixo de $\pi\tau$, obtendo a permutação fácil π.

Agora vem a pergunta: *Quantas permutações fáceis eu consigo obter adicionando dois pontos de quebra de prefixo a uma permutação fácil por meio de uma transposição de prefixo?* Basta contar quantas transposições de prefixo existem que adicionam dois pontos de quebra de prefixo à permutação, pois cada transposição gera uma permutação diferente. Pela Proposição 1.6, a aplicação de uma transposição de prefixo $\tau(1, j, k)$ a uma permutação π aumenta em dois os pontos quebra de prefixo se, e somente, $pred(\pi(j), \pi) = pred(\pi(j))$ e $pred(\pi(k), \pi) = pred(\pi(k))$. Isso significa que todos os possíveis candidatos a j e k são justamente aqueles valores i tais que $\pi(i)$ não é um ponto de quebra de prefixo. Com isso, para uma permutação fácil π de comprimento n temos exatamente $n+1-b_p(\pi)$

candidatos, ou seja $\binom{n+1-b_p(\pi)}{2}$ transposições que aumentam em dois o número de pontos de quebra de prefixo. Note que esse valor depende apenas do comprimento e do número de pontos de quebra de prefixo da permutação, sendo que este último pode ser substituído por $2d+1$, onde d é a distância de prefixo.

Uma outra observação importante é que, a partir de duas permutações fáceis diferentes, adicionar dois pontos de quebra de prefixo por meio de uma transposição de prefixo a cada uma delas nunca resulta em duas permutações iguais, pois, caso contrário, isso violaria a ordenação única (Teorema 3.11).

Com isso podemos obter facilmente o número de permutações fáceis com distância de transposição de prefixo d a partir do número permutações fáceis com distância de transposição de prefixo $d-1$. Seja $\mathcal{F}(n,d)$ o número de permutações fáceis de comprimento n e distância de transposição de prefixo d. Sabemos que tais permutações possuem $b = 2d+1$ pontos de quebra de prefixo. Então

$$\mathcal{F}(n,d+1) = \binom{n+1-b}{2}\mathcal{F}(n,d) = \binom{n-2d}{2}\mathcal{F}(n,d) = \frac{(n-2d)(n-2d-1)}{2}\mathcal{F}(n,d),$$

onde $1 \leqslant d+1 \leqslant \frac{n}{2}$ e sendo que $\mathcal{F}(n,0) = 1$.

Desenvolvendo a recorrência obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(n,d) &= \frac{(n-2d+2)(n-2d+1)}{2}\mathcal{F}(n,d-1) \\
&= \prod_{i=1}^{d} \frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2^d} \prod_{i=n-2d+1}^{n} i \\
&= \frac{n!}{2^d(n-2d)!}.
\end{aligned}$$

Portanto, para calcular o número $\mathcal{F}(n)$ de todas as permutações fáceis de comprimento n temos

$$\mathcal{F}(n) = \sum_{d=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^d(n-2d)!}.$$

Podemos ver alguns dos possíveis valores de $\mathcal{F}(n,d)$ na Tabela 3.1.

Comparando $\mathcal{F}(n)$ com $n!$, veremos que a razão entre ambos diminui rapidamente com o crescimento de n, conforme ilustrado pelo gráfico da Figura 3.2. De $n = 5$ em diante, menos da metade das permutações de comprimento n são fáceis. Com isso podemos concluir que $\frac{n!}{2} \leqslant n! - \mathcal{F}(n) \leqslant n!$ para valores grandes de n e, portanto, o número de permutações que não são fáceis é $\Theta(n!)$.

n	$d=0$	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6$	$\mathcal{F}(n)$
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	2
3	1	3	0	0	0	0	0	4
4	1	6	6	0	0	0	0	13
5	1	10	30	0	0	0	0	41
6	1	15	90	90	0	0	0	196
7	1	21	210	630	0	0	0	862
8	1	28	420	2520	2520	0	0	5489
9	1	36	756	7560	22680	0	0	31033
10	1	45	1260	18900	113400	113400	0	247006
11	1	55	1980	41580	415800	1247400	0	1706816
12	1	66	2970	83160	1247400	7484400	7484400	16302397

Tabela 3.1: Número de permutações fáceis para diferentes comprimentos e distâncias

3.4 Conclusões e Problemas em Aberto

Neste capítulo vimos inicialmente como ordenar a permutação reversa. O algoritmo apresentado utiliza $\lceil 3n/4 \rceil$ transposições de prefixo para ordenar R_n. Para n múltiplo de 4, o que ele faz é transformar a permutação R_n em uma permutação fácil com o mesmo número de pontos de quebra utilizando $n/4$ passos. Não foi provado que tal ordenação é ótima, mas o resultado encontrado nos dá um limite superior para a distância de transposição de prefixo da permutação reversa, que conjectura-se que seja igual ao diâmetro de transposição de prefixo.

A seguir vimos as permutações fáceis de ordenar, que são aquelas que alcançam o limite inferior por pontos de quebra para a distância de transposição de prefixo (Teorema 1.8). Encontramos diversas propriedades interessantes das permutações fáceis: possuem ordenação ótima única, podem ser ordenadas otimamente em tempo polinomial, possuem apenas um ciclo não trivial. Sugerimos uma forma de se resolver o problema da distância de transposição de prefixo em que temos que descobrir como transformar eficientemente uma permutação qualquer em uma fácil. Infelizmente as propriedades encontradas não foram suficientes para tornar claro como fazer isso, mas enunciamos uma conjectura que estabelece uma propriedade que tal transformação deve ter para obtermos um limite superior mais justo para o diâmetro de transposição de prefixo.

Como forma de encontrar mais propriedades que permitam uma caracterização mais conveniente das permutações fáceis, podemos conjecturar a seguinte definição alternativa.

Conjectura 3.20 *Uma permutação é fácil se, e somente se, possui uma única forma de*