

MC102 – Aula 24

Recursão

Alexandre M. Ferreira

IC – Unicamp

31/05/2017

Roteiro

- 1 Recursão – Indução
- 2 Recursão
- 3 Fatorial
- 4 O que acontece na memória
- 5 Recursão \times Iteração
- 6 Soma em um Vetor
- 7 Números de fibonacci
- 8 Exercício

Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
 - ▶ Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
 - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
 - ▶ Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
 - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Recursão – Indução



- Devemos criar um algoritmo para resolver um determinado problema.
- Usando o método de recursão/indução, a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
 - ▶ Primeiramente, definimos a solução para casos básicos;
 - ▶ Em seguida, definimos como resolver o problema para um caso geral, utilizando-se de soluções para instâncias menores do problema.

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - 1 Passo base: PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - 2 Hipótese de Indução: Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - 3 Passo de Indução: Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - 1 Passo base: PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - 2 Hipótese de Indução: Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - 3 Passo de Indução: Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - ① Passo base: PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - ② Hipótese de Indução: Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - ③ Passo de Indução: Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - 1 **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - 2 **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - 3 **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - 1 **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - 2 **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - 3 **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- **Indução:** Técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser demonstrada envolve números naturais.
- Seja T uma proposição que desejamos provar como verdadeira para todos valores naturais n .
- Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de n , basta provar as duas condições 1 e 3 a seguir:
 - ① **Passo base:** PROVAR que T é válido para $n = 1$.
 - ② **Hipótese de Indução:** Assumimos que T é válido para $n - 1$.
 - ③ **Passo de Indução:** Sabendo que T é válido para $n - 1$ devemos PROVAR que T é válido para n .

Indução

- Por que a indução funciona? Por que as duas condições são suficientes?
 - ▶ Mostramos que T é válida para um caso base, como $n = 1$.
 - ▶ Com o passo da indução, automaticamente mostramos que T é válida para $n = 2$.
 - ▶ Como T é válida para $n = 2$, pelo passo de indução, T também é válida para $n = 3$, e assim por diante.

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n + 1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n + 1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1 + 1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n - 1)$, ou seja, $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n , ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n + 1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n - 1) + n$ e por hipótese $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n - 1) + n \\ &= (n - 1)((n - 1) + 1)/2 + n \\ &= n(n - 1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n + 1)/2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n + 1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n + 1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1 + 1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n - 1)$, ou seja, $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n , ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n + 1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n - 1) + n$ e por hipótese $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n - 1) + n \\ &= (n - 1)((n - 1) + 1)/2 + n \\ &= n(n - 1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n + 1)/2 \end{aligned}$$

Exemplo

Teorema

A soma $S(n)$ dos primeiros n números naturais é $n(n + 1)/2$

Prova.

Base: Para $n = 1$ devemos mostrar que $n(n + 1)/2 = 1$. Isto é verdade:

$$1(1 + 1)/2 = 1.$$

Hip. de Indução: Vamos assumir que é válido para $(n - 1)$, ou seja, $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$.

Passo: Devemos mostrar que é válido para n , ou seja, devemos mostrar que $S(n) = n(n + 1)/2$. Por definição, $S(n) = S(n - 1) + n$ e por hipótese $S(n - 1) = (n - 1)((n - 1) + 1)/2$, logo

$$\begin{aligned} S(n) &= S(n - 1) + n \\ &= (n - 1)((n - 1) + 1)/2 + n \\ &= n(n - 1)/2 + 2n/2 \\ &= n(n + 1)/2 \end{aligned}$$

Recursão



- Definições recursivas de funções funcionam como o *princípio matemático da indução* que vimos anteriormente.
- A idéia é que a solução de um problema pode ser expressa da seguinte forma:
 - ▶ Definimos a solução para casos básicos;
 - ▶ Definimos como resolver o problema geral utilizando soluções do mesmo problema só que para casos menores.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Problema: Calcular o fatorial de um número ($n!$).

Qual o caso base e o passo da indução?

- Se n é igual a 1, então o fatorial é 1.

Qual seria o passo indutivo?

- Temos que expressar a solução para $n > 1$, supondo que já sabemos a solução para algum caso mais simples.
- $n! = n * (n - 1)!$.

Este caso é trivial pois a própria definição do fatorial é recursiva.

Fatorial

Portanto, a solução do problema **pode ser expressa de forma recursiva** como:

- Se $n = 1$ então $n! = 1$.
- Se $n > 1$ então $n! = n * (n - 1)!$.

Note como aplicamos o princípio da indução:

- Sabemos a solução para um caso base: $n = 1$.
- Definimos a solução do problema geral $n!$ em termos do mesmo problema só que para um caso menor ($(n - 1)!$).

Fatorial em C

```
long fatr(long n){
    long x, r;
    if(n == 1) //Passo Básico
        return 1;
    else{
        x = n-1;
        r = fatr(x); //Sabendo o fatorial de (n-1)
        return (n* r); //calculamos o fatorial de n
    }
}
```

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

Fatorial

- Para solucionar o problema, é feita uma chamada para a própria função, por isso, esta função é chamada *recursiva*.
- Recursividade geralmente permite uma descrição mais clara e concisa dos algoritmos, especialmente quando o problema é recursivo por natureza.

O que acontece na memória

- Precisamos entender como é feito o controle sobre as variáveis locais em chamadas recursivas.
- A memória de um sistema computacional é dividida em alguns segmentos:
 - ▶ **Espaço Estático:** Contém as variáveis globais e código do programa.
 - ▶ **Heap:** Para alocação dinâmica de memória.
 - ▶ **Pilha:** Para execução de funções.

O que acontece na memória

O que acontece na pilha:

- Toda vez que uma função é invocada, suas variáveis locais são armazenadas no topo da pilha.
- Quando uma função termina a sua execução, suas variáveis locais são removidas da pilha.

Considere o exemplo:

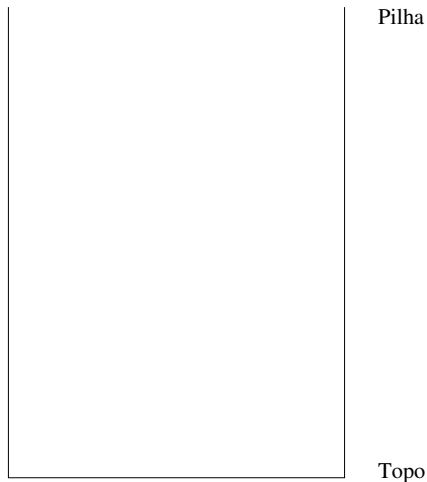
```
int f1(int a, int b){
    int c=5;
    return (c+a+b);
}
```

```
int f2(int a, int b){
    int c;
    c = f1(b, a);
    return c;
}
```

```
int main(){
    f2(2, 3);
}
```

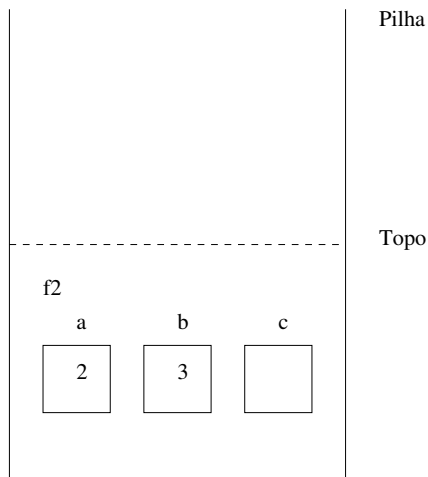
O que acontece na memória

Inicialmente a pilha está vazia.



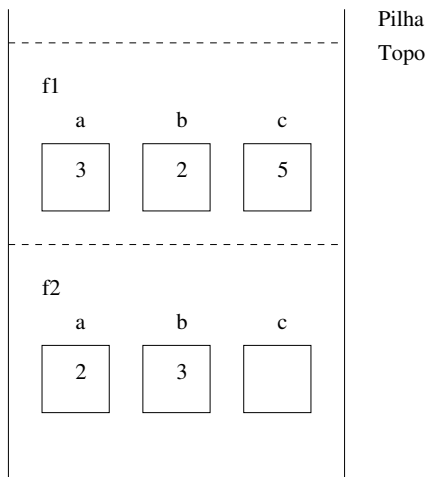
O que acontece na memória

Quando **f2(2,3)** é invocada, suas variáveis locais são alocadas no topo da pilha.



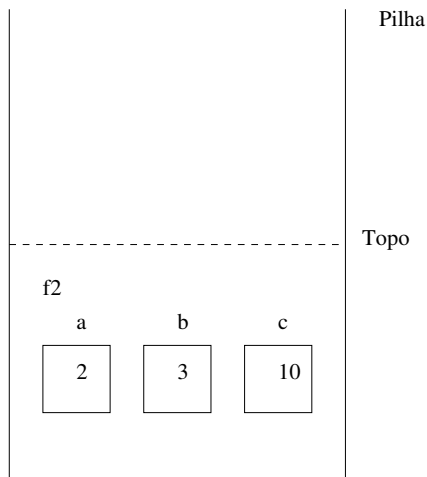
O que acontece na memória

A função **f2** invoca a função **f1(b,a)** e as variáveis locais desta são alocadas no topo da pilha sobre as de **f2**.



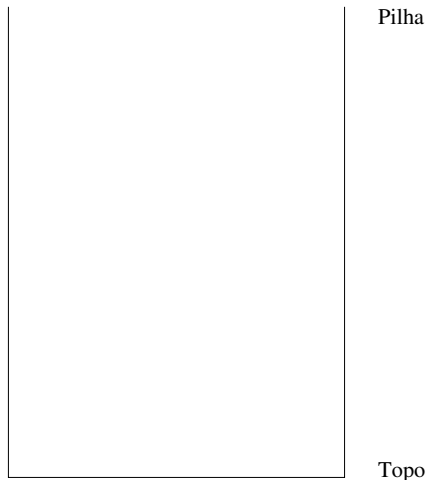
O que acontece na memória

A função **f1** termina, devolvendo 10. As variáveis locais de **f1** são removidas da pilha.



O que acontece na memória

Finalmente **f2** termina a sua execução devolvendo 10. Suas variáveis locais são removidas da pilha.



O que acontece na memória

No caso de chamadas recursivas para uma mesma função, é como se cada chamada correspondesse a uma função distinta.

- As execuções das chamadas de funções recursivas são feitas na pilha, assim como qualquer função.
- O último conjunto de variáveis alocadas na pilha, que está no topo, corresponde às variáveis da última chamada da função.
- Quando termina a execução de uma chamada da função, as variáveis locais desta são removidas da pilha.

Usando recursão em programação

Considere novamente a solução recursiva para se calcular o fatorial e assumamos que seja feita a chamada **fatr(4)**.

```
long fatr(long n){
    long x, r;
    if(n == 1) //Passo Básico
        return 1;
    else{
        x = n-1;
        r = fatr(x); //Sabendo o fatorial de (n-1)
        return (n* r); //calculamos o fatorial de n
    }
}
```


O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n , x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

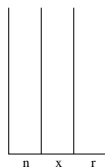
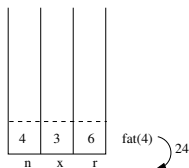
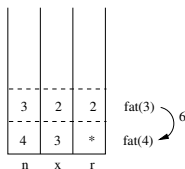
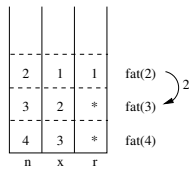
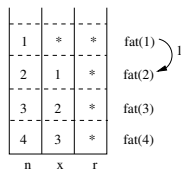
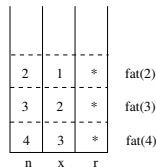
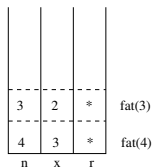
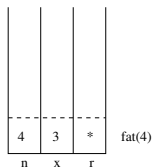
- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n , x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

- Cada chamada da função *fatr* cria novas variáveis locais de mesmo nome (n, x, r) .
- Portanto, várias variáveis n , x e r podem existir em um dado momento.
- Em um dado instante, o nome n (ou x ou r) refere-se à variável local ao corpo da função que está sendo executada naquele instante.

O que acontece na memória

Estado da Pilha de execução para *fatr(4)*.



O que acontece na memória

- É claro que as variáveis x e r são desnecessárias.
- Você também deveria testar se n não é negativo!

```
long fatr (long n){
    if(n <= 1) //Passo Básico
        return 1;
    else //Sabendo o fatorial de (n-1)
        //calculamos o fatorial de n
        return (n* fatr(n-1));
}
```

Recursão × Iteração

- Soluções recursivas são geralmente mais concisas que as iterativas.
- Soluções iterativas em geral têm a memória limitada enquanto as recursivas, não.
- Cópia dos parâmetros a cada chamada recursiva é um custo adicional para as soluções recursivas.

Recursão × Iteração

Neste caso, uma solução iterativa é mais eficiente. Por quê?

```
long fat(long n)
{
    long r = 1;

    for(int i = 1; i <= n; i++)
        r = r * i;

    return r;
}
```

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado um vetor v de inteiros de tamanho tam , devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n do vetor, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
 - ▶ Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
 - ▶ Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado um vetor v de inteiros de tamanho tam , devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n do vetor, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
 - ▶ Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
 - ▶ Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Exemplo: Soma de elementos de um vetor

- Dado um vetor v de inteiros de tamanho tam , devemos calcular a soma dos seus elementos da posição 0 até $tam - 1$.
- Como podemos descrever este problema de forma recursiva? Isto é, como podemos descrever este problema em função de si mesmo?
- Vamos denotar por $S(n)$ a soma dos elementos das posições 0 até n do vetor, e portanto devemos achar $S(tam - 1)$.
- O valor de $S(n)$ pode ser calculado com a seguinte definição recursiva:
 - ▶ Se $n = 0$ então a soma $S(0)$ é igual a $v[0]$.
 - ▶ Se $n > 0$ então a soma $S(n)$ é igual a $v[n] + S(n - 1)$.

Algoritmo em C

```
int soma(int v[], int n){  
    if(n == 0)  
        return v[0];  
    else  
        return v[n] + soma(v, n-1);  
}
```

Algoritmo em C

Exemplo de uso:

```
#include <stdio.h>
```

```
int soma(int v[], int n);
```

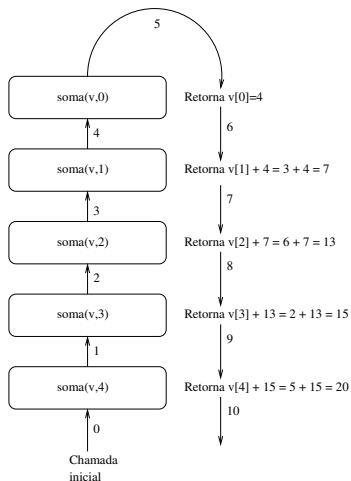
```
int main(){  
    int vet[5] = {4,3,6,2,5};  
    printf("%d\n", soma(vet, 4));  
}
```

```
int soma(int v[], int n){  
    if(n == 0)  
        return v[0];  
    else  
        return v[n] + soma(v, n-1);  
}
```

- Note que na chamada da função o segundo parâmetro é exatamente o índice da última posição do vetor ($tam - 1$).

Exemplo de execução

$V = (4, 3, 6, 2, 5)$



Soma do vetor recursivo

- O método recursivo sempre termina:
 - ▶ Existência de um caso base.
 - ▶ A cada chamada recursiva do método temos um valor menor de n .

Algoritmo em C

Neste caso, a solução iterativa também seria melhor (não há criação de variáveis das chamadas recursivas):

```
int calcula_soma(int [] v, int n){
    int soma=0, i;
    for(i=0;i<=n;i++)
        soma = soma + v[i];
    return soma;
}
```

Recursão com várias chamadas

- Não há necessidade da função recursiva ter apenas uma chamada para si própria.
- A função pode fazer várias chamadas para si própria.
- A função pode ainda fazer chamadas recursivas indiretas. Neste caso a função 1, por exemplo, chama uma outra função 2 que por sua vez chama a função 1.

Fibonacci

- A série de fibonacci é a seguinte:
 - ▶ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
- Queremos determinar qual é o n -ésimo número da série que denotaremos por $\text{fibonacci}(n)$.
- Como descrever o n -ésimo número de fibonacci de forma recursiva?

Fibonacci

- No caso base temos:
 - ▶ Se $n = 1$ ou $n = 2$ então $\text{fibonacci}(n) = 1$.
- Sabendo casos anteriores podemos computar $\text{fibonacci}(n)$ como:
 - ▶ $\text{fibonacci}(n) = \text{fibonacci}(n - 1) + \text{fibonacci}(n - 2)$.

Algoritmo em C

A definição anterior é traduzida diretamente em um algoritmo em C:

```
long fibo(long n){
    if(n <= 2)
        return 1;
    else
        return (fibo(n-1) + fibo(n-2));
}
```

Relembrando

- Recursão é uma técnica para se criar algoritmos onde:
 - ① Devemos descrever soluções para casos básicos.
 - ② Assumindo a existência de soluções para casos menores, mostramos como obter a solução para o caso maior.
- Algoritmos recursivos geralmente são mais claros e concisos.
- Implementador deve avaliar clareza de código \times eficiência do algoritmo.

Exercício

Mostre a execução da função recursiva **imprime** abaixo:
O que será impresso?

```
#include <stdio.h>
```

```
void imprime(int v[], int i, int n);
```

```
int main(){  
    int vet[] = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10};  
  
    imprime(vet, 0, 9);  
    printf("\n");  
}
```

```
void imprime(int v[], int i, int n){  
    if(i==n){  
        printf("%d, ", v[i]);  
    }  
    else{  
        imprime(v, i+1, n);  
        printf("%d, ", v[i]);  
    }  
}
```

Exercício

- Mostre o estado da pilha de memória durante a execução da função **fibo** com a chamada **fib(5)**.
- Qual versão é mais eficiente para se calcular o n -ésimo número de fibonacci? A recursiva ou iterativa?