

**Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de  
Heawood**

*Alberto Alexandre Assis Miranda*

**Dissertação de Mestrado**

---

---

Instituto de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

---

---

# Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood

**Alberto Alexandre Assis Miranda<sup>1</sup>**

23 de junho de 2006

## Banca Examinadora:

- Prof. Cláudio Leonardo Lucchesi  
Instituto de Computação, Unicamp (Orientador)
- Prof. Marcelo Henriques de Carvalho  
Departamento de Computação e Estatística - UFMS
- Prof. Orlando Lee  
Instituto de Computação, Unicamp
- Profa. Célia Picinin de Mello  
Instituto de Computação, Unicamp (suplente)

---

<sup>1</sup>Auxílio financeiro da FAPESP processo número 04/04589-0

**Substitua pela ficha catalográfica**

# Orientações Pfaffianas e o Furtivo Grafo de Heawood

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação devidamente corrigida e defendida por Alberto Alexandre Assis Miranda e aprovada pela Banca Examinadora.

Campinas, 16 de agosto de 2006.

Prof. Cláudio Leonardo Lucchesi  
Instituto de Computação, Unicamp  
(Orientador)

Dissertação apresentada ao Instituto de Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

**Substitua pela folha com a assinatura da banca**

© Alberto Alexandre Assis Miranda, 2006.  
Todos os direitos reservados.

# Resumo

Um grafo  $G$  que tem emparelhamento perfeito é *Pfaffiano* se existe uma orientação  $D$  das arestas de  $G$ , tal que todo circuito conforme de  $G$  tem orientação ímpar em  $D$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é *conforme* se  $G - V(H)$  tem emparelhamento perfeito. Uma orientação de um circuito par é *ímpar* se numa dada direção de percurso do circuito o número de arestas que concorda com a direção é ímpar. Calcular o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo, no caso geral, é  $NP$ -difícil [11, pág. 307]. No entanto, para grafos Pfaffianos, seu cálculo torna-se polinomial [11, pág. 319].

A caracterização de grafos bipartidos Pfaffianos, feita por Little, tem quase trinta anos [9]. No entanto, somente nos últimos anos apareceram algoritmos polinomiais para reconhecimento de tais grafos, por McCuaig [13] e independentemente por Robertson, Seymour e Thomas [14]. A solução para este problema resolve também uma série de problemas, muitos deles clássicos, em teoria dos grafos, economia e química, como descrito no artigo de McCuaig [13, págs. 16 a 35].

Nesta dissertação, apresentamos uma prova de corretude do algoritmo distinta das duas provas anteriormente conhecidas.

# Abstract

A graph  $G$  that contains a perfect matching is *Pfaffian* if there is an orientation  $D$  of the edges of  $G$ , such that every conformal circuit of  $G$  is oddly oriented in  $D$ . A subgraph  $H$  of  $G$  is *conformal* if  $G - V(H)$  has a perfect matching. A circuit with an even number of edges is *oddly oriented* if the number of edges whose orientation in  $D$  agrees with any sense of traversal of the circuit is odd. Counting the number of perfect matchings of a graph is known to be *NP-hard* [11, page 307]. However, when restricted to Pfaffian graphs, this problem is solvable in polynomial time [11, page 319].

The characterisation of Pfaffian bipartite graphs, achieved by Charles Little, is almost thirty years old [9]. However, only recently, polynomial time algorithms for determining whether a bipartite graph is Pfaffian were discovered, by McCuaig [13] and independently by Robertson, Seymour and Thomas [14]. This problem's solution solves a lot of problems, some of them are quite famous, in graph theory, economy and chemistry, as described in McCuaig's article [13, pages 16 to 35].

On this dissertation, we present a new proof of the correctness of this algorithm distinct from the two previously known proofs.

# Agradecimentos

Quero agradecer a todos que de uma forma ou de outra me ajudaram a chegar aqui.

Agradeço a meus pais, José Sebastião e Terezinha e à minha irmã, Adriana, pelo amor, carinho, e apoio que me ajudaram a ser o que sou.

Agradeço a minha namorada, Aline, por sempre ser minha carinhosa companheira mesmo com a distância.

Agradeço a minha amiga D. Yvette pelas inúmeras risadas e conselhos.

Agradeço a meus amigos Leonardo, Elias e Daniel, por animarem os fins de semana em que visito minha família.

Agradeço a meus amigos da Unicamp, Weber, Thiago, Gilmar, Candy, Gustavo, Martin, Luiz, Nilton, Eduardo, Celso, Jean, Juliana e Marcelo, pelas conversas na sala do café, pelas dicas e ajudas, e pela amizade.

Agradeço aos meus amigos da maratona, Vinícius, Thiago e Renato, pela diversão de codificar, viajar e competir, e aos novos maratonistas por continuarem com a tocha.

Agradeço aos professores e funcionário do IC que com suas aulas interessantes e clima fraterno no Instituto fizeram me interessar pela carreira acadêmica.

Agradeço à Fapesp pela bolsa.

Agradeço à banca pela paciência em ler esta dissertação.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Lucchesi, pela amizade, apoio, dedicação e incontáveis horas de trabalho e insônia durante a sua aposentadoria dedicadas a me ajudar, sem o qual esta dissertação não teria se concluído.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>ix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definição de Grafo Pfaffiano . . . . .	1
1.2 Caracterizações de Grafos Pfaffianos . . . . .	2
1.3 Resultados Conhecidos . . . . .	3
1.4 Definição de Grafo Redutível . . . . .	5
1.5 Teorema Principal . . . . .	5
1.6 O algoritmo . . . . .	5
1.7 Problemas Equivalentes . . . . .	7
1.8 Organização da Dissertação . . . . .	7
<b>2 Pré-Requisitos</b>	<b>9</b>
2.1 Notações . . . . .	9
2.2 Grafos Cobertos por Emparelhamentos . . . . .	10
2.3 Grafos Bipartidos Cobertos por Emparelhamentos . . . . .	11
2.3.1 Arestas Magras . . . . .	18
2.4 Grafos Pfaffianos . . . . .	21
2.4.1 Orientações Similares . . . . .	21
2.4.2 Grafos Pfaffianos e Cortes Justos . . . . .	22
2.5 O Grafo de Heawood . . . . .	23
2.6 Grafos Planares . . . . .	28
<b>3 4-Somas</b>	<b>31</b>
3.1 Presilhas e 4-Somas . . . . .	31
3.2 Presilha Pfaffiana e 4-Somas . . . . .	36

<b>4 O Teorema Principal</b>	<b>41</b>
4.1 Demonstração do Teorema Principal . . . . .	41
4.1.1 Os Três Lemas . . . . .	42
4.1.2 O Grafo Furtivo . . . . .	42
<b>5 Lema do Grafo de Heawood não Contido</b>	<b>67</b>
5.1 Lema do Grafo de Heawood não Contido . . . . .	67
<b>6 Herança da Redutibilidade</b>	<b>75</b>
6.1 Lema da Herança da Redutibilidade . . . . .	75
6.1.1 $Z$ não contém vértice de contração de $H$ . . . . .	76
6.1.2 $Z$ contém precisamente um vértice de contração de $H$ . . . . .	81
6.1.3 $Z$ contém dois vértices de contração de $H$ . . . . .	86
<b>7 Lema da Não Planaridade das Contrações</b>	<b>99</b>
7.1 Lema da Não Planaridade das Contrações . . . . .	99
7.1.1 Os Lemas Auxiliares . . . . .	100
7.1.2 Análise de Casos do Lema da Não Planaridade das Contrações . . .	105
<b>8 Conclusão</b>	<b>115</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>116</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>118</b>
<b>Lista de Asserções</b>	<b>120</b>

# **Lista de Tabelas**

# Lista de Figuras

1.1	O grafo de Heawood. . . . .	6
1.2	Redução a presilhas irredutíveis. . . . .	6
2.1	As presilhas do Teorema 2.3.27. . . . .	19
2.2	O grafo de Heawood. . . . .	24
2.3	O grafo $G$ , igual ao cubo, no caso em que $H$ é um emparelhamento perfeito.	30
3.1	O grafo $H_{10}$ , a 4-soma fina de três $K_{3,3}$ 's. (o quadrilátero $Q$ é mostrado em linhas pontilhadas) . . . . .	32
3.2	O caso em que existe circuito $M, N$ -alternado com aresta em $\partial(V(G_i) - V(Q))$ , para duas parcelas $G_i$ . . . . .	38
4.1	Os grafos $G, H, H(\bar{x})$ e $H(\bar{y})$ . . . . .	44
4.2	Os grafos $H(x)$ e $H(y)$ . . . . .	45
4.3	Um extensão de $\tilde{H}$ a um desenho no plano do grafo $H(y)$ que não é planar, como definido pelo Lema 4.1.12. . . . .	46
4.4	A imersão planar $\tilde{H}(y)$ da prova do Lema 4.1.12. . . . .	47
4.5	O caso $x$ e $y$ adjacentes em $H$ com $x_1$ de grau 3: à esquerda o grafo $G$ , a aresta $f$ e o conjunto $Z$ ; à direita o grafo $G - e - f$ . . . . .	48
4.6	O grafo $G$ quando um extremo $v$ de $f$ cujo grau é três pertence a um quadrilátero de $G - f$ . . . . .	49
4.7	Um exemplo de decomposição em cortes justos de $G - f$ com os cortes justos destacados. . . . .	50
4.8	O grafo $G$ quando a presilha $G_0$ de $G - f$ é um $C_4$ . . . . .	51
4.9	O grafo $G$ quando ambas as presilhas $G_0$ e $G_1$ de $G - f$ são $C_4$ 's. . . . .	51
4.10	A imersão planar $\tilde{H}(y)$ da prova do Lema 4.1.12. . . . .	54
4.11	O grafo $G$ , o grafo de Heawood. . . . .	56
4.12	O grafo $G$ , o grafo de Heawood. . . . .	57
4.13	O grafo $G$ no caso em que $f$ não é incidente em vértice adjacente a $x$ ou a $y$ , nem em $x$ e nem em $y$ . . . . .	59

4.14	O grafo $G$ no caso em que $f$ incide em adjacente de $y$ em $H$ , mas não incide em adjacente de $x$ em $H$ , e não incide nem em $x$ nem em $y$ . . . . .	61
4.15	O grafo $G$ no caso em que $f$ incide em adjacente de $x$ e em adjacente de $y$ em $H$ . . . . .	62
4.16	O grafo $G$ no caso em que $f$ incide em $y$ em $H$ . . . . .	65
5.1	O grafo de Heawood. . . . .	68
5.2	O grafo de Heawood mais a aresta $e$ , e em negrito $Q$ . Caso 1. . . . .	68
5.3	Caso 2: grafo $G$ , em negrito o circuito $Q$ e o conjunto $X$ . . . . .	69
5.4	Caso 3.1: grafo $G$ , em negrito o circuito $Q$ e os conjuntos $X$ e $Y$ . . . . .	70
5.5	Caso 3.2: grafo $G$ , em negrito os conjuntos $X$ e $Y$ e o circuito $Q_1$ . . . . .	72
5.6	Caso 3.2: grafo $G$ , em negrito os conjuntos $X$ e $Y$ e o circuito $Q_2$ . . . . .	73
6.1	O emparelhamento $M$ de $G^*$ , e o circuito $C$ . . . . .	78
6.2	O grafo $G_{23}$ . . . . .	79
6.3	O grafo $G_{23}$ , mostrado junto à componente conexa $I_1$ , e os vértice de $S$ . . . . .	80
6.4	O grafo $G_{23}$ , mostrado junto à componente conexa $I_1$ , os vértice de $S$ e o conjunto $Y$ . . . . .	81
6.5	Grafo $G$ no caso em que $\bar{x}$ é o único vértice de contração da quádrupla redutora $V(Q)$ de $H$ . . . . .	83
6.6	O grafo $G$ e em negrito as arestas de um emparelhamento perfeito de $H_k$ que define que $v_1$ e $v_2$ são $H_k$ -conexos. . . . .	87
6.7	Ilustração da demonstração do Lema 6.1.21. As arestas duplas são de $M$ . . . . .	91
6.8	Algumas arestas de $G^*[T]$ . . . . .	93
6.9	O grafo $\Theta$ e algumas das cores de suas arestas. . . . .	95
6.10	O grafo $L$ . . . . .	97
7.1	Grafos $G$ , $H$ e $H'$ , e algumas definições feitas: $\bar{X}$ , $C - e$ e $F$ . . . . .	101
7.2	Em destaque os vértices $x_0$ , $\bar{x}$ , $v_1$ e $v_2$ . . . . .	104
7.3	Grafo $G$ nas duas possibilidades de tamanho de $\bar{X}$ , com as nomenclaturas definidas dos vértices de $\bar{X}$ . . . . .	105
7.4	$G$ com os emparelhamentos $M_1$ e $M_2$ , e os vértices definidos na prova. . . . .	106
7.5	As duas possibilidades para o grafo $G$ no Caso 1.2. . . . .	107
7.6	A extensão de $\tilde{H}$ a uma imersão planar de $G - e$ , no Caso 1.2.2. . . . .	108
7.7	Os grafos $G$ e $H' = (G - e)\{X \rightarrow x\}$ , no Caso 2.1. Em destaque, os circuitos $Q$ e $Q'$ e o emparelhamento perfeito de $H' - V(Q')$ . . . . .	110
7.8	O grafo $G^*$ e as duas possibilidades de incidência da aresta $f_1$ : em $y_1$ ou em $s_1$ . . . . .	112
7.9	O grafo $G^*$ e os emparelhamentos $M_1$ , em negrito, e $M_2$ , em tracejado. . . . .	113

# Capítulo 1

## Introdução

A idéia de usar Pfaffiano na teoria de emparelhamentos é devida a Tutte. Em seu livro “Graph Theory As I Have Known It” [18], ele descreve como chegou à idéia de usar Pfaffianos para determinar uma fórmula para o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo. Apesar de não ter sido bem sucedido em encontrar essa fórmula, Tutte conseguiu utilizar identidades envolvendo Pfaffianos para demonstrar o seu teorema famoso que caracteriza grafos que têm emparelhamentos perfeitos [17].

Em 1975 Little [9] caracterizou grafos bipartidos Pfaffianos. No entanto, somente em 1999, McCuaig [13] e independentemente Robertson, Seymour e Thomas [14] criaram um algoritmo polinomial de reconhecimento de grafos bipartidos Pfaffianos. Aqui nesta dissertação, apresentamos uma prova de corretude deste algoritmo, distinta das duas provas anteriormente conhecidas.

O problema de se determinar se um grafo bipartido é Pfaffiano resolve uma série de problemas, alguns deles citados na Seção 1.7. A referência mais antiga de um problema cuja solução se dá por este algoritmo data de 1913, de acordo com McCuaig [13]. Até hoje, não se sabe se o problema de se decidir se um grafo não-bipartido é Pfaffiano está em NP.

### 1.1 Definição de Grafo Pfaffiano

Uma matriz  $A = (a_{ij})$  é dita *anti-simétrica* se  $a_{ij} = -a_{ji}$ , para todo par de índices  $(i, j)$ . Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz anti-simétrica  $n \times n$ . Quando  $n$  é ímpar,  $\det(A) = 0$ . Por outro lado, quando  $n$  é par, existe um polinômio  $P := P(A)$  nos  $a_{ij}$  tal que  $\det(A) = P^2$ . Este polinômio é o chamado *Pfaffiano* de  $A$  e é assim caracterizado:

$$P := \sum \operatorname{sgn}(N) a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_kj_k},$$

onde a soma é efetuada sobre o conjunto de todas as partições

$$N = (i_1j_1, i_2j_2, \dots, i_kj_k) \text{ de } \{1, 2, \dots, n\}$$

em  $k$  pares não ordenados, e  $\text{sgn}(N)$  é o sinal da permutação

$$\pi(N) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2k-1 & 2k \\ i_1 & j_1 & i_2 & j_2 & \dots & i_k & j_k \end{pmatrix},$$

(veja, por exemplo, o livro de Lovász e Plummer [11][Capítulo 8]).

A definição do Pfaffiano de  $A$  acima independe da ordem em que os pares que constituem a partição  $N$  são listados. Como  $A$  é anti-simétrica, a ordem dos elementos de cada par também não influi no valor do Pfaffiano de  $A$ .

Seja  $G$  um grafo,  $D$  uma orientação de  $G$ , e  $A$  a matriz anti-simétrica de adjacência de  $D$ . Seja  $N := (i_1j_1, i_2j_2, \dots, i_kj_k)$  uma partição de  $V(G)$  em pares não ordenados. Note que  $N$  induz um emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$  se e somente se o produto  $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_kj_k}$  não é nulo. Nesse caso, dizemos que o *sinal* de  $M$  é igual ao produto  $\text{sgn}(N) \cdot a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_kj_k}$ . Assim, se  $D$  for tal que todos os emparelhamentos perfeitos têm o mesmo sinal, então  $|P|$  é o número de emparelhamentos perfeitos de  $G$ . Dado que  $|P|^2 = |\det(A)|$ , então é possível computar  $|P|$  em tempo polinomial, neste caso. Em geral computar o número de emparelhamentos perfeitos de um grafo é NP-difícil. (Este fato é provado ao se reduzir a este problema o problema de se calcular o permanente de uma matriz de 0's e 1's, um problema NP-difícil [19].) A orientação  $D$  de  $G$  é *Pfaffiana* se todos os emparelhamentos perfeitos de  $G$  têm o mesmo sinal. O grafo  $G$  é *Pfaffiano* se admite uma orientação Pfaffiana.

## 1.2 Caracterizações de Grafos Pfaffianos

Existem várias definições equivalentes de grafos Pfaffianos. Nesta seção, enunciaremos algumas delas. Antes, daremos algumas definições auxiliares.

Seja  $D$  uma orientação das arestas de um grafo  $G$ . Seja  $T$  uma trilha de comprimento par de  $G$ . Seja  $p$  a paridade do número de arestas de  $T$  que concorda com  $D$  numa dada direção de percurso de  $T$ . Como  $T$  tem um número par de arestas, a paridade  $p$  é a mesma para as duas direções de percurso de  $T$ . Portanto, podemos definir a paridade da orientação de  $T$  em  $D$  como sendo igual a  $p$ . Diz-se que a *orientação* em  $D$  de  $T$  é *ímpar* se o número de arestas que concordam com uma dada direção de percurso de  $T$  for ímpar. Um subgrafo  $H$  de um grafo  $G$  é *conforme* se  $G - V(H)$  tem um emparelhamento perfeito.

Provas para os seguintes resultados podem ser encontradas no livro de Lovász e Plummer [11, Lemas 8.3.1 e 8.3.2].

## NOTAÇÃO 1.2.1

Vamos denotar a operação de diferença simétrica por  $\oplus$ .

## LEMA 1.2.2

Seja  $D$  uma orientação de um grafo  $G$ , fixe uma enumeração arbitrária dos vértices de  $D$ . Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois emparelhamentos perfeitos de  $G$ . Seja  $k$  o número de circuitos de  $M_1 \oplus M_2$  cuja orientação em  $D$  é par. Então,

$$\operatorname{sgn}(M_1) \cdot \operatorname{sgn}(M_2) = (-1)^k.$$

## TEOREMA 1.2.3

Seja  $G$  um grafo,  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$  e  $D$  uma orientação de  $G$ . Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

- $D$  é Pfaffiana;
- todo emparelhamento perfeito de  $G$  tem o mesmo sinal de  $M$  em  $D$ ;
- todo circuito conforme em  $G$  tem orientação ímpar em  $D$ ;
- todo circuito  $M$ -alternado tem orientação ímpar em  $D$ .

Seja  $H$  um subgrafo conforme de  $G$ . Então, todo circuito conforme de  $H$  é um circuito conforme de  $G$ . Isto nos leva ao seguinte corolário.

## COROLÁRIO 1.2.4

Seja  $D$  uma orientação Pfaffiana de um grafo  $G$ . Seja  $H$  um subgrafo conforme de  $G$ . Então, a restrição de  $D$  a  $H$  é Pfaffiana.

### 1.3 Resultados Conhecidos

Motivado por problemas externos à teoria dos grafos, Kasteleyn [7] demonstrou, em 1963, que todo grafo planar tem uma orientação Pfaffiana. O grafo  $K_{3,3}$  é o menor grafo não Pfaffiano. Little [9] demonstrou, em 1975, que um grafo bipartido é Pfaffiano se e somente se não contém subgrafo conforme que é uma bissubdivisão de  $K_{3,3}$ . Uma subdivisão de um grafo é obtida substituindo-se arestas de um grafo por caminhos. Uma bissubdivisão é uma subdivisão onde todos os caminhos que substituem arestas tem um número par de vértices internos<sup>1</sup>. Obviamente, toda bissubdivisão de um grafo bipartido é bipartida. Este

---

<sup>1</sup>Na literatura, uma bissubdivisão é chamada por alguns autores de subdivisão ímpar e por outros de subdivisão par. Por este motivo, a exemplo de McCuaig, decidimos utilizar bissubdivisão.

resultado de Little mostra que o problema de decidir se um dado grafo bipartido é Pfaffiano está em co-NP. Este resultado imediatamente sugere uma pergunta natural: decidir se o problema geral está ou não em NP. Vazirani e Yannakakis [20] mostraram, em 1989, que decidir se uma dada orientação de um grafo é ou não Pfaffiana é tão difícil quanto decidir se o grafo tem ou não uma orientação Pfaffiana. McCuaig [13], e, independentemente, Robertson, Seymour e Thomas [14], em 1998, descobriram um algoritmo polinomial para decidir se um grafo bipartido tem ou não uma orientação Pfaffiana.

Um *grafo coberto por emparelhamentos* é um grafo conexo e não trivial no qual toda aresta pertence a algum emparelhamento perfeito. Maiores detalhes sobre grafos cobertos por emparelhamentos podem ser encontrados nos trabalhos de Lovász [11, 10] e nos trabalhos de Carvalho, Lucchesi e Murty [1, 2, 3]. O estudo de grafos Pfaffianos pode ser restrito aos grafos cobertos por emparelhamentos, de forma natural. As propriedades de grafos cobertos por emparelhamentos podem então auxiliar na compreensão das propriedades de grafos Pfaffianos.

Um *corte justo* em um grafo  $G$  coberto por emparelhamentos é um corte que contém precisamente uma aresta em cada emparelhamento perfeito do grafo. Seja  $C := \partial(X)$  um corte não trivial em  $G$ . O grafo  $H$  obtido a partir de  $G$  pela contração de todos os vértices em  $X$  a um único vértice  $x$  é chamado de *C-contração*, e representado por  $H := G\{X \rightarrow x\}$ . As duas *C-contrações* de  $G$  são  $G\{X \rightarrow x\}$  e  $G\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\}$ . Caso  $G$  seja coberto por emparelhamentos e  $C$  um corte justo, ambas as *C-contrações* de  $G$  são cobertas por emparelhamentos. Naturalmente, se alguma das *C-contrações* ainda possui algum corte justo não trivial, a operação pode ser repetida até que os grafos obtidos sejam livres de cortes justos não triviais. Este processo denomina-se *decomposição em cortes justos*. Lovász [10] provou, em 1987, que a família de grafos resultantes de uma decomposição em cortes justos de um grafo coberto por emparelhamentos é única a menos de arestas múltiplas. Além disso, Little e Rendl [8] provaram, em 1991, que um grafo  $G$  coberto por emparelhamentos que tem um corte justo  $C$  é Pfaffiano se e somente se ambas as *C-contrações* de  $G$  são Pfaffianas. Sendo assim, pode-se reduzir o problema de se decidir se um grafo  $G$  coberto por emparelhamentos é Pfaffiano ao problema de se decidir se os grafos resultantes de sua decomposição em cortes justos são Pfaffianos. Sendo assim, podemos reduzir o problema de se decidir se um grafo é Pfaffiano aos grafos cobertos por emparelhamentos livres de cortes justos não triviais.

Os grafos cobertos por emparelhamentos livres de cortes justos não triviais são separados em duas classes: *tijolos* e *presilhas*. As presilhas são bipartidas, e os tijolos não são bipartidos. A decomposição em cortes justos de um grafo bipartido coberto por emparelhamentos produz somente presilhas. A decomposição de um grafo não bipartido coberto por emparelhamentos resulta em tijolos e presilhas. Sendo assim, o problema Pfaffiano se reduz no caso bipartido a presilhas e no caso geral a tijolos e presilhas. Maiores

informações podem ser encontradas no artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5]. Mais especificamente, o algoritmo de McCuaig, e de Robertson, Seymour e Thomas decide, em tempo polinomial, se uma presilha é Pfaffiana. No entanto, até hoje não se sabe nada sobre a complexidade de se decidir se um tijolo é Pfaffiano.

## 1.4 Definição de Grafo Redutível

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição  $\{U, W\}$ . Uma quádrupla  $Z$  de quatro vértices de  $G$  reduz  $G$  se:

- $Z$  contém dois vértices em  $U$  e dois vértices em  $W$ ;
- $G - Z$  consiste de três ou mais componentes conexas.

Um grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G$  é *redutível* se alguma quádrupla de vértices de  $G$  reduz  $G$  e é *irredutível* caso contrário.

## 1.5 Teorema Principal

McCuaig [13] e independentemente Robertson, Seymour, e Thomas [14] descobriram um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos bipartidos Pfaffianos. Este algoritmo se baseia no seguinte teorema:

**TEOREMA 1.5.1 (TEOREMA PRINCIPAL)**

Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar. Então,  $G$  é o grafo de Heawood.

Esta dissertação apresenta uma prova alternativa para o Teorema Principal.

## 1.6 O algoritmo

O algoritmo estudado, tendo como entrada um grafo  $J$  bipartido, determina se  $J$  é Pfaffiano. Inicialmente, o algoritmo reduz este problema a se decidir se as presilhas de  $J$  são Pfaffianas, como visto anteriormente.

Suponha que  $G$  seja uma presilha redutível. Então,  $G$  pode ser decomposto em três ou mais presilhas  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , de forma que  $G$  é Pfaffiano se e somente se  $G_1, G_2, \dots, G_n$  são Pfaffianos. Esta redução pode ser repetida até que o conjunto de presilhas obtido tenha somente presilhas irredutíveis. Assim, o algoritmo reduz o problema Pfaffiano bipartido a presilhas irredutíveis. Por exemplo, o algoritmo reduz o problema de se decidir se a

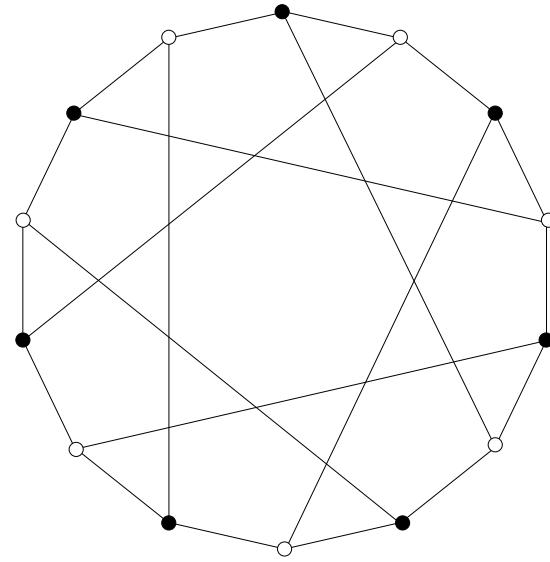


Figura 1.1: O grafo de Heawood.

presilha mostrada na Figura 1.2 é Pfaffiana ao problema de se decidir se as cinco presilhas menores mostradas são Pfaffianas.

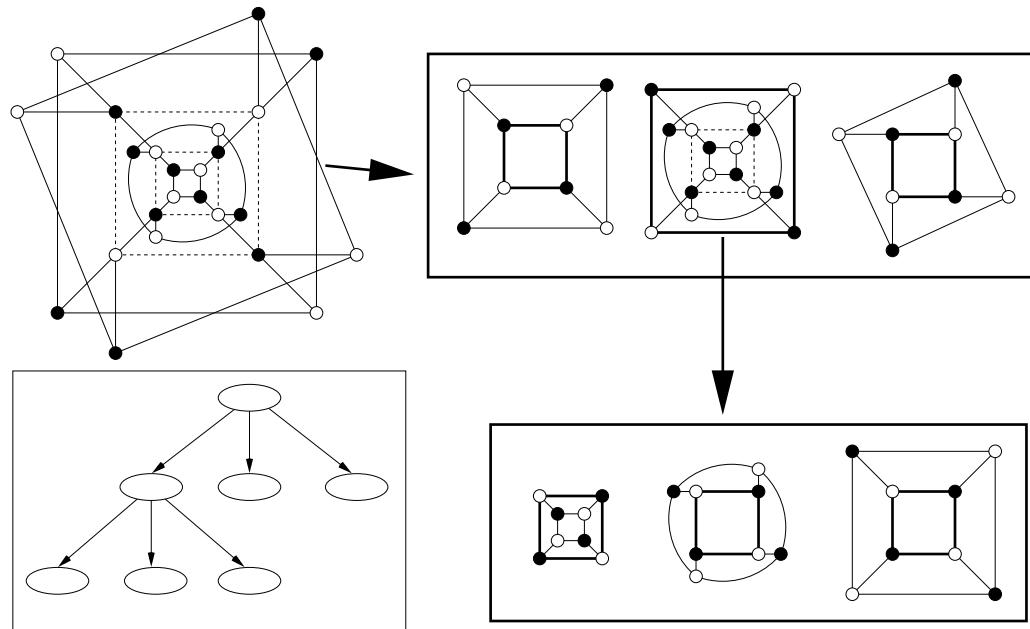


Figura 1.2: Redução a presilhas irredutíveis.

Todo grafo planar é Pfaffiano, como provado por Kasteleyn [7]. Pode-se testar se um grafo é planar em tempo linear. Sendo assim, o único caso restante a tratar é quando temos uma presilha irredutível não planar. Pelo Teorema Principal, este caso se reduz a verificarmos se a presilha é o grafo de Heawood a menos de arestas múltiplas.

## 1.7 Problemas Equivalentes

Existe uma quantidade enorme de problemas equivalentes ao problema de se decidir se um grafo bipartido é Pfaffiano. Um destes problemas é decidir se um dado grafo orientado tem ou não um circuito orientado par [20]. Outros problemas em física e química igualmente se resolvem pela solução do problema estudado [11][pág. 349-355].

Damos agora um segundo exemplo de aplicação. Chamamos de *relação qualitativa* entre duas variáveis o sinal da derivada de uma com relação à outra. Considere o seguinte problema. Dadas relações qualitativas entre variáveis econômicas, quais relações qualitativas podem ser deduzidas. Este problema foi proposto em 1947 por Samuelson na primeira edição de seu livro *Foundations of Economic Analysis* [15]. Novamente, a solução deste problema é feita pela aplicação do algoritmo de reconhecimento de grafos bipartidos Pfaffianos [13][pág. 12].

O artigo “Pólya’s Permanent Problem” de McCuaig [13] contém uma lista mais completa dos problemas resolvidos pelo algoritmo estudado aqui.

## 1.8 Organização da Dissertação

No Capítulo 2, vários lemas e teoremas que serão usados durante o restante da dissertação são enunciados e têm suas provas demonstradas ou referenciadas. No Capítulo 3, teoremas relativos a grafos redutíveis, cruciais para a prova do algoritmo em questão, são enunciados e demonstrados. No Capítulo 4, o Teorema Principal, que diz que a única presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar é o grafo de Heawood, é provado baseando-se nos Três Lemas, a serem provados nos capítulos seguintes. No Capítulo 5, o Lema do Grafo de Heawood Não Contido, que diz que nenhuma presilha simples Pfaffiana após a remoção de uma aresta tem o grafo de Heawood como uma de suas presilhas, é provado. No Capítulo 6, o Lema da Herança da Redutibilidade, que diz que se o Teorema Principal vale para grafos com menos vértices do que  $G$ , então  $G$  é redutível se uma presilha de  $G - e$  é redutível, é provado. No Capítulo 7, o Lema da Não Planaridade das Contrações, que diz que pelo menos uma das  $(C - e)$ -contrações de  $G - e$  não é planar, para toda presilha  $G$  simples Pfaffiana irredutível e não planar, é provado.



# Capítulo 2

## Pré-Requisitos

Neste capítulo, enunciaremos notações, lemas e teoremas importantes que serão usados durante toda a dissertação. Sempre que a demonstração do enunciado de um lema ou teorema dado não for trivial, será dada uma prova, ou uma referência.

Na Seção 2.1, definiremos notações que serão usadas, sem menção prévia, durante a dissertação. Na Seção 2.2, provaremos lemas relacionados a grafos cobertos por emparelhamentos. Na Seção 2.3, provaremos lemas relacionados a grafos bipartidos cobertos por emparelhamentos. Já na Seção 2.4, são dados lemas sobre orientações Pfaffianas. Na Seção 2.5, várias propriedades do grafo de Heawood são deduzidas. E finalmente, na Seção 2.6, várias propriedade específicas de grafos planares são demonstradas.

### 2.1 Notações

#### NOTAÇÃO 2.1.1

Sejam  $G$  um grafo, e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ . Então,  $G\{X \rightarrow x\}$  é o grafo obtido de  $G$  pela contração de todos os vértices em  $X$  ao vértice  $x$ .

#### NOTAÇÃO 2.1.2

Sejam  $G$  um grafo, e  $x$  um vértice de  $G$ . Então,  $H := G\{x \rightarrow X\}$  é o grafo obtido de  $G$  pela substituição de  $x$  pelos vértices de  $X$ , onde as arestas de  $G$  incidentes em  $x$  incidem em  $H$  em um vértice de  $X$ . Chamamos esta operação de expansão.

#### NOTAÇÃO 2.1.3

Seja  $G$  um grafo, e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ . Então,  $\partial_G(X)$  é o conjunto das arestas de  $G$  com precisamente um extremo em  $X$ . Então,  $X$  e  $\overline{X}$  são as praias de  $\partial_G(X)$ .

## 2.2 Grafos Cobertos por Emparelhamentos

Um grafo  $G$  é *coberto por emparelhamentos* se ele tem pelo menos dois vértices, é conexo e toda aresta de  $G$  pertence a um emparelhamento perfeito de  $G$ .

O seguinte resultado pode ser facilmente deduzido. No entanto, uma prova pode ser encontrada no livro de Lovász e Plummer [11][pág. 145].

### LEMA 2.2.1

*Todo grafo coberto por emparelhamentos com quatro ou mais vértices é 2-conexo.*

O seguinte resultado pode ser facilmente deduzido da definição de corte justo. No entanto, uma prova pode ser encontrada no artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5][Proposição 2.2].

### LEMA 2.2.2

*Seja  $G$  um grafo,  $C := \partial(X)$  um corte justo de  $G$ . Então,  $G$  é coberto por emparelhamentos se e somente se cada  $C$ -contração de  $G$  é coberta por emparelhamentos.*

### COROLÁRIO 2.2.3

*Toda praia de corte justo de um grafo coberto por emparelhamentos gera um grafo conexo.*

□

### LEMA 2.2.4

*Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos. Seja  $C_G := \partial_G(X_G)$  um corte justo não trivial de  $G$ . Seja  $H := G\{X_G \rightarrow x_G\}$  uma das  $C_G$ -contrações de  $G$ . Suponha que  $C_H := \partial_H(X_H)$  seja um corte justo de  $H$ . Então,  $C_H$  é corte justo de  $G$ .* □

Um grafo  $G$  coberto por emparelhamentos que contém um corte justo não trivial  $C = \partial(X)$  pode ser decomposto nos grafos  $H := G\{X \rightarrow x\}$  e  $H' := G\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ . Esta operação pode ser aplicada repetidas vezes sobre a coleção de grafos resultantes até que a coleção de grafos obtida seja composta exclusivamente de grafos livres de cortes justos não triviais. Lembremos que definimos a coleção de grafos obtidos desta forma como decomposição em cortes justos de  $G$ . O seguinte Teorema, devido a Lovász [10], tem importância fundamental nesta dissertação. Muitas vezes seu uso é sub-entendido. Uma prova simples pode ser encontrada no livro de Schrijver [16, pág. 612-613], e a prova original no artigo de Lovász [10].

### TEOREMA 2.2.5 (TEOREMA DE LOVÁSZ)

*Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos. O conjunto de grafos resultantes de uma decomposição em cortes justos de  $G$  é único a menos de isomorfismos e arestas múltiplas.*

## 2.3 Grafos Bipartidos Cobertos por Emparelhamentos

O livro de Lovász e Plummer [11, Teorema 4.1.1] contém um resultado equivalente à seguinte afirmação.

**TEOREMA 2.3.1**

Seja  $G$  um grafo com bipartição  $\{U, W\}$ . Se  $|U| = |W|$  e  $G$  tem pelo menos quatro vértices, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O grafo  $G$  é coberto por emparelhamentos
- (ii) Para cada subconjunto não vazio  $X$  de  $U$ , se  $|X| \leq |U| - 1$  então  $|N(X)| \geq |X| + 1$ .
- (iii) Para todo  $u \in U$ ,  $w \in W$ , o grafo  $G - u - w$  tem emparelhamento perfeito
- (iv) O grafo  $G$  tem emparelhamento perfeito, e para toda partição  $\{U', U''\}$  de  $U$  e toda partição  $\{W', W''\}$  de  $W$ , tal que  $|U'| = |W'|$ , o grafo  $G$  tem pelo menos uma aresta que liga  $U'$  a  $W''$ .

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Suponha que  $G$  é coberto por emparelhamentos. Seja  $X$  um subconjunto não nulo de  $U$ . Como  $G$  tem emparelhamento perfeito,  $|N(X)| \geq |X|$ . Suponha, por absurdo, que vale a igualdade. Como  $X$  não é vazio,  $N(X)$  também não é vazio. Sejam  $Y := X \cup N(X)$  e  $C := \partial(Y)$ . Toda aresta de  $C$  liga um vértice de  $N(X)$  a um vértice de  $U - X$ . Como  $|N(X)| = |X|$ , nenhuma aresta de  $C$  está em um emparelhamento perfeito de  $G$ . Como  $G$  é coberto por emparelhamentos, temos que  $C$  é vazio. Além disso, grafos coberto por emparelhamentos são conexos. Portanto, como  $C$  é vazio, temos que  $Y = V(G)$ . Portanto,  $X = U$ . Logo,  $|N(X)| \geq |X| + 1$  se  $X$  é um subconjunto próprio e não vazio de  $U$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja  $u$  um vértice de  $U$ ,  $w$  um vértice de  $W$ . Seja  $H := G - u - w$ . Seja  $X$  um subconjunto não vazio de  $U - u$ . Pela hipótese,  $|N_G(X)| \geq |X| + 1$ . Claramente,  $N_G(X) - w \subseteq N_H(X)$ . Portanto,  $|N_H(X)| \geq |N_G(X)| - 1 \geq |X|$ . Note que  $\{U - u, W - w\}$  é uma bipartição de  $H$ . Além disso,  $|U - u| = |W - w|$ . Pelo Teorema de Hall,  $G - u - w$  tem emparelhamento perfeito. Esta conclusão vale para todo  $u \in U$  e  $w \in W$ .

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seja  $uw$  uma aresta de  $G$ . Pela hipótese,  $G - u - w$  tem emparelhamento perfeito, digamos  $M$ . Sendo assim,  $M \cup \{uw\}$  é um emparelhamento perfeito de  $G$  que contém a aresta  $uw$ . Esta conclusão vale para toda aresta  $uw$  de  $G$ .

Para completar a prova deste caso, nossa tarefa se resume a mostrar que  $G$  é conexo. Suponha, por absurdo, que  $K$  e  $L$  são duas componentes conexas de  $G$ . Primeiramente, mostraremos que  $K$  tem vértices em ambas as partes da bipartição de  $G$ . Suponha, por absurdo, que  $V(K) \cap U$  é vazio. Seja  $k_w$  um vértice de  $V(K) \cap W$ , e  $u$  um vértice em  $U$ . Então,  $G - u - k_w$  tem emparelhamento perfeito  $M(u, k_w)$ . Sendo assim,  $M(u, k_w)$  restrito a  $K - k_w$  é emparelhamento perfeito de  $K - k_w$ . No entanto,  $K$  não tem vértice em  $U$ . Portanto,  $V(K) = \{k_w\}$ . Por hipótese,  $V(G) \geq 4$ , e  $|U| = |W|$ . Portanto, existe vértice  $w' \in W - k_w$ . Também, por hipótese, existe emparelhamento perfeito  $M(u, w')$  de  $G - u - w'$ . No entanto,  $k_w$  é vértice isolado de  $G - u - w'$ , uma contradição. Sendo assim,  $V(K) \cap U$  e  $V(K) \cap W$  não são vazios. Analogamente,  $V(L) \cap U$  e  $V(L) \cap W$  não são vazios. Ajuste a notação de forma que  $|V(K) \cap U| \leq |V(K) \cap W|$ . Sejam  $u \in V(K) \cap U$ , e  $w \in V(L) \cap W$ . No entanto,  $G - u - w$  não tem emparelhamento perfeito, pois  $|V(K) \cap U - u| < |V(L) \cap W|$ , uma contradição. De fato,  $G$  é conexo.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Suponha que vale (ii). Suponha, por absurdo, que não vale (iv). Nesse caso, existe uma partição  $\{U', U''\}$  de  $U$  e uma partição  $\{W', W''\}$  de  $W$ , tal que  $|U'| = |W'|$ , e não existe aresta que liga  $U'$  a  $W''$ . Sendo assim,  $N_G(U') \subseteq W'$ , e portanto temos que  $|N(U')| \leq |W'| = |U'|$ . Isto contradiz (ii). Logo, (ii) $\Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Suponha que vale (iv). Suponha, por absurdo, que existe um subconjunto não vazio  $X$  de  $U$ , com  $|X| < |U|$ , tal que  $|N(X)| \leq |X|$ . Por hipótese,  $G$  tem emparelhamento perfeito. Portanto,  $|N(X)| = |X|$ . Sendo assim,  $\{X, U - X\}$  é partição de  $U$ , e  $\{N(X), W - N(X)\}$  é partição de  $W$ , com  $|N(X)| = |X|$ . Não existe aresta de  $X$  para  $W - N(X)$ , uma contradição ao item (iv). Logo, (iv) $\Rightarrow$ (ii).  $\square$

### DEFINIÇÃO 2.3.2

Uma aresta  $e$  de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$  é removível se o grafo  $G - e$  é coberto por emparelhamentos.

### COROLÁRIO 2.3.3

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com pelo menos quatro vértices e bipartição  $\{U, W\}$ . Uma aresta  $e$  de  $G$  não é removível se  $e$  somente se existe uma partição  $\{U', U''\}$  de  $U$  e existe uma partição  $\{W', W''\}$  de  $W$ , com  $|U'| = |W'|$  e  $e$  é a única aresta que liga vértice de  $U'$  a vértice de  $W''$ .  $\square$

### NOTAÇÃO 2.3.4

Sejam  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $\{U, W\}$ , e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ , tal que  $|X \cap U|$  e  $|X \cap W|$  sejam distintos. Então, definimos como  $X_+$  ou  $X^+$  o

conjunto dentre  $X \cap U$  e  $X \cap W$  que contém mais vértices. Analogamente,  $X_-$  ou  $X^-$  é definido como o conjunto dentre  $X \cap U$  e  $X \cap W$  que contém menos vértices. Dizemos que  $X_+$  é a parte majoritária de  $X$  e que  $X_-$  é a parte minoritária de  $X$ .

O seguinte resultado pode ser encontrado no artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5][Proposição 2.1].

#### LEMA 2.3.5

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição  $\{U, W\}$ . Um corte  $C$  com praia  $X$  de  $G$  é justo se e somente se: (i)  $|X \cap U|$  e  $|X \cap W|$  diferem de exatamente um, e (ii) toda aresta de  $C$  é incidente em um vértice da parte majoritária de  $X$ .

O seguinte resultado pode ser facilmente deduzido a partir dos Lemas 2.3.5 e 2.2.2.

#### LEMA 2.3.6

Os grafos resultantes da decomposição em cortes justos de um grafo bipartido coberto por emparelhamentos são todos bipartidos.

#### DEFINIÇÃO 2.3.7

As presilhas de um grafo bipartido  $G$  coberto por emparelhamentos são as presilhas resultantes de uma decomposição em cortes justos de  $G$ .

O seguinte resultado, encontrado no livro de Lovász e Plummer [11], caracteriza presilhas:

#### TEOREMA 2.3.8

Seja  $G$  um grafo com bipartição  $\{U, W\}$ . Se  $|U| = |W|$  e  $G$  tem pelo menos seis vértices, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O grafo  $G$  é uma presilha.
- (ii) Para cada subconjunto não vazio  $X$  de  $U$ , se  $|X| \leq |U| - 2$  então  $|N(X)| \geq |X| + 2$ .
- (iii) Para quaisquer dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  em  $U$  e quaisquer dois vértices  $w_1$  e  $w_2$  em  $W$ , o grafo  $G - u_1 - u_2 - w_1 - w_2$  tem um emparelhamento perfeito.

#### COROLÁRIO 2.3.9

Sejam  $G$  uma presilha com seis ou mais vértices e  $x$  e  $y$  vértices em partições diferentes de  $G$ . O grafo  $G - x - y$  é coberto por emparelhamentos.  $\square$

#### COROLÁRIO 2.3.10

Sejam  $G$  uma presilha e  $e_1$  e  $e_2$  duas arestas não adjacentes de  $G$ . O grafo  $G$  tem um emparelhamento perfeito contendo  $e_1$  e  $e_2$ .  $\square$

**COROLÁRIO 2.3.11**

Sejam  $G$  uma presilha com bipartição  $\{U, W\}$ ,  $u$  um vértice de  $U$  e  $w$  um vértice de  $W$ . Então, o grafo  $G + uw$  é uma presilha.  $\square$

O seguinte resultado é muito importante e é usado em toda a dissertação, muitas vezes sem sua menção explícita. Uma prova para este resultado pode ser encontrada no artigo “Ear Decompositions of Matching Covered Graphs” [1][Lema 3.2].

**COROLÁRIO 2.3.12**

Toda aresta de uma presilha com seis ou mais vértices é removível.

**COROLÁRIO 2.3.13**

Sejam  $G$  uma presilha com bipartição  $\{U, W\}$  e  $X$  um conjunto de três vértices de  $G$ . Se  $X$  não é subconjunto de  $U$ , nem de  $W$ , então  $G - X$  é conexo.

Demonstração: Seja  $X$  um conjunto de precisamente três vértices, não todos em  $U$ , nem em  $W$ . Portanto, dois dos três vértices de  $X$  estão em um dentre  $U$  e  $W$ . Ajuste a notação de forma que  $|X \cap U| = 2$ . Portanto,  $|X \cap W| = 1$ .

Sejam  $u_1$  e  $u_2$  os vértices de  $X \cap U$ ,  $w$  o vértice de  $X \cap W$ . Pela Corolário 2.3.9,  $G - u_1 - w$  é coberto por emparelhamentos. Pelo Lema 2.2.1,  $G - u_1 - w$  é 2-conexo. Logo,  $G - u_1 - w - u_2$  é conexo. Ou seja,  $G - X$  é conexo.  $\square$

**COROLÁRIO 2.3.14**

Toda presilha com seis ou mais vértices é 3-conexa.

Demonstração: Seja  $G$  uma presilha com seis ou mais vértices. O grafo  $G$ , coberto por emparelhamentos, é 2-conexo, pelo Lema 2.2.1. Suponha, por absurdo, que  $G$  não seja 3-conexo. Então,  $G$  tem dois vértices  $v_1$  e  $v_2$  tais que  $G - v_1 - v_2$  é desconexo. Seja  $v_3$  um vértice de  $G$  tal que  $X := \{v_1, v_2, v_3\}$  tenha vértices em ambas as partes da bipartição de  $G$ . Pelo Corolário 2.3.13,  $G - X$  é conexo. Portanto,  $v_3$  gera uma componente trivial de  $G - v_1 - v_2$ . Assim,  $N(v_3) \subseteq \{v_1, v_2\}$ . Mas  $G$  é 2-conexo. Portanto,  $N(v_3) = \{v_1, v_2\}$ . Assim,  $\partial(X)$  é justo em  $G$ . Além disso,  $|V| \geq 6$ . Logo,  $\partial(X)$  não é trivial, uma contradição.  $\square$

**COROLÁRIO 2.3.15**

Seja  $G$  uma presilha com seis ou mais vértices. Seja  $Z$  um subconjunto de  $V(G)$  com no máximo três vértices, sendo que  $Z$  tem no máximo dois vértices em cada parte da bipartição de  $G$ . Então,  $G - Z$  é conexo.

## COROLÁRIO 2.3.16

Sejam  $G$  uma presilha e  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ . Seja  $C := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Então, um dentre  $x_0$  e  $y_0$  está em  $X_-$ , o outro em  $\overline{X}_-$ .

Demonstração: O corte  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Portanto, pelo Lema 2.3.5, uma parte da bipartição de  $X$  tem precisamente um vértice a mais do que a outra parte, e toda aresta de  $C - e$  incide na parte majoritária de  $X$ . Ajuste a notação, trocando  $X$  e  $\overline{X}$  se necessário, de forma que  $x_0 \in X$ . Suponha, inicialmente, que  $y_0$  esteja em  $X$ . Neste caso,  $C = C - e$ . Portanto, toda aresta de  $C$  incide na parte majoritária de  $X$ . Portanto, pelo Lema 2.3.5,  $C$  é justo em  $G$ . Isto é uma contradição ao fato de  $G$  ser uma presilha. De fato,  $y_0 \in \overline{X}$ .

Suponha que  $x_0$  esteja em  $X_+$ . Nesse caso, tanto  $e$  como toda aresta de  $C - e$  incide em vértice da parte majoritária de  $X$ . Sendo assim, pelo Lema 2.3.5,  $C$  é justo em  $G$ , contradição. De fato,  $x_0$  está em  $X_-$ . Analogamente,  $y_0$  está em  $\overline{X}_-$ .  $\square$

## COROLÁRIO 2.3.17

Seja  $G$  uma presilha,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $C := \partial(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Então todo emparelhamento perfeito de  $G$  contendo  $e$  tem precisamente três arestas em  $C$ .

## LEMA 2.3.18

Sejam  $G$  uma presilha,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ , e  $\mathcal{C} := \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ , com  $r \geq 1$ , o conjunto de cortes justos de uma decomposição em cortes justos de  $G - e$ . Seja  $X_i$  subconjunto de  $V(G)$ , tal que  $C_i = \partial_G(X_i) - e$ . Então, é possível ajustar a notação, complementando algumas praias de cortes de  $\mathcal{C}$  se necessário, tal que  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r \subset V(G)$ . Além disso, o conjunto das presilhas de  $G - e$  é  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} G_i$ , onde:

- $G_0 := (G - e)\{\overline{X_1} \rightarrow \overline{x_1}\};$
- $G_i := (G - e)\{X_i \rightarrow x_i\}\{\overline{X_{i+1}} \rightarrow \overline{x_{i+1}}\},$  para  $i = 1, 2, \dots, r - 1;$
- $G_r := (G - e)\{X_r \rightarrow x_r\}.$

Demonstração: Para  $i = 1, 2, \dots, r$ , seja  $X_i$  uma das praias de  $C_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Um dentre  $X_i$  e  $\overline{X}_i$  contém  $x_0$ . Ajuste a notação de forma que  $X_i$  contenha  $x_0$ . Mostraremos agora que, para todo  $j \in \{1, 2, \dots, r\} - i$ , um dentre  $X_i$  e  $X_j$  é subconjunto próprio do outro. Sabemos que  $x_0 \in (X_i \cap X_j)$ . Além disso, pelo Corolário 2.3.16,  $y_0$  está em  $\overline{X}_i \cap \overline{X}_j$ . Como  $\mathcal{C}$  é o conjunto de cortes justos de uma decomposição em cortes justos,  $C_i$  e  $C_j$  não cruzam. Portanto, um dentre  $X_i \cap \overline{X}_j$  e  $\overline{X}_i \cap X_j$  é vazio. Se  $X_i \cap \overline{X}_j$  é vazio,

então  $X_i$  é subconjunto de  $X_j$ . Se  $\overline{X_i} \cap X_j$  é vazio, então  $X_j$  é subconjunto de  $X_i$ . Sendo assim, podemos ajustar a notação de forma que  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r \subset V(G)$ .  $\square$

#### COROLÁRIO 2.3.19

Sejam  $G$  uma presilha, e uma aresta removível de  $G$  e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Então  $H$  tem no máximo dois vértices de contração. Além disso, (i) se  $H$  tiver precisamente um vértice de contração, então o (único) extremo de  $e$  em  $V(H)$  está na mesma parte da bipartição do vértice de contração, (ii) se  $H$  tiver dois vértices de contração, estes vértices estão em partes distintas de sua bipartição.

Demonstração: O fato de que  $H$  tem no máximo dois vértices de contração vem diretamente do Lema 2.3.18. Suponha que  $H$  tenha precisamente um vértice de contração. Seja  $X \subset V(G)$  tal que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}$ . Pelo Corolário 2.3.16, precisamente um extremo de  $e$ , digamos  $y_0$ , está em  $\overline{X}_-$ . Este vértice está na mesma parte da bipartição de  $G$  dos vértices de  $X_+$ . Então,  $y_0$  está na mesma parte da bipartição de  $H$  do vértice  $x$ .

Suponha, agora, que  $H$  tenha precisamente dois vértices de contração. Então, existem  $X \subset V(G)$  e  $Y \subset V(G)$ , tais que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ . Pelo Corolário 2.3.16, um extremo de  $e$  está em  $X_-$ . Analogamente, um extremo de  $e$  está em  $Y_-$ . Como  $X$  e  $Y$  são disjuntos, O extremo de  $e$  em  $X_-$  é distinto do extremo de  $e$  em  $Y_-$ . Dessa forma, os vértices de  $X_+$  estão em uma parte da bipartição de  $G$  distinta da parte contendo os vértice de  $Y_+$ . Então,  $x$  e  $y$  estão em partes distintas da bipartição de  $H$ .  $\square$

#### NOTAÇÃO 2.3.20

Considerando a notação utilizada no Lema 2.3.18, dizemos que  $G_i$  e  $G_{i+1}$  são presilhas consecutivas de  $G - e$ , para  $i = 0, 1, \dots, r - 1$ . Além disso, dizemos que  $G_0$  e  $G_r$  são presilhas externas, e que  $G_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ , são presilhas internas de  $G - e$ .

#### LEMA 2.3.21

Sejam  $G$  uma presilha, e uma aresta removível de  $G$  e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Então, uma das seguintes afirmações acontece:

- $H = G - e$ .
- Seja  $C_X := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que o corte  $C_X - e$  é justo em  $G - e$  e o grafo  $H$  é a  $(C_X - e)$ -contração  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$  de  $G - e$ . Então,  $e \in C_X$  e o extremo de  $e$  não contraído está na mesma parte de  $x$  da bipartição de  $H$ .
- Sejam  $C_X := \partial_G(X)$  e  $C_Y := \partial_G(Y)$  cortes não triviais de  $G$ , tais que os cortes  $C_X - e$  e  $C_Y - e$  são justos em  $G - e$ , e o grafo  $H$  é a  $(C_X - e), (C_Y - e)$  contração  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  de  $G - e$ . Então,  $e \in (C_X \cap C_Y)$ , e  $x$  e  $y$  estão em partes distintas da bipartição de  $H$ .

Demonstração: Pelo Corolário 2.3.19,  $G$  tem no máximo dois vértices de contração. Se  $H$  não tem vértice de contração, então  $H = G - e$  é presilha. Sendo assim,  $H = G - e$  é a única presilha de  $G - e$ . Podemos, portanto, supor que  $H$  tem vértice de contração. Então, existe um corte não trivial  $C_X := \partial_G(X)$  de  $G$ , tal que o corte  $C_X - e$  é justo em  $G - e$ , e  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}$ . Pelo Corolário 2.3.16, um extremo de  $e$  está em  $X$  e o outro em  $\overline{X}$ . Portanto,  $e \in C_X$ . Além disso,  $C_X$  é não trivial, mas não é justo, enquanto  $C_X - e$  é justo. Portanto,  $e$  incide na parte minoritária de  $X$ . Ajuste a notação de forma que  $X \cap U$  seja a parte minoritária de  $X$ . Então, os extremos de  $e$  estão em  $X \cap U$  e  $\overline{X} \cap W$ . O vértice de contração  $x$  está na mesma parte da bipartição que a parte majoritária de  $X$ . Portanto,  $x \in W$ . Sendo assim, o vértice de contração está na mesma parte da bipartição que contém o extremo de  $e$  em  $H$ .

Suponha que  $H$  tenha dois vértices de contração. Então, existem cortes não triviais  $C_X := \partial_G(X)$  e  $C_Y := \partial_G(Y)$  de  $G$ , tais que os cortes  $C_X - e$  e  $C_Y - e$  são justos em  $G - e$ , e  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  de  $G - e$ , onde  $x$  e  $y$  são distintos vértices de  $H$ . Pelo Corolário 2.3.16, um extremo de  $e$  está em  $X$  e o outro em  $\overline{X}$ . Analogamente, um extremo de  $e$  está em  $Y$  e o outro em  $\overline{Y}$ . Sendo assim, um extremo de  $e$  está em  $X \cap \overline{Y}$  e o outro em  $\overline{X} \cap Y$ . Portanto,  $e$  está em  $C_X \cap C_Y$ . Além disso,  $C_X$  é não trivial, mas não é justo, enquanto  $C_X - e$  é justo. Portanto,  $e$  incide na parte minoritária de  $X$ . Analogamente,  $e$  incide na parte minoritária de  $Y$ . Ajuste a notação de forma que  $X \cap U$  seja a parte minoritária de  $X$ . Portanto, como  $e$  liga as partes minoritárias de  $X$  e  $Y$ , temos que  $Y \cap W$  é a parte minoritária de  $Y$ . No entanto, o vértice  $x$  está na parte da bipartição que contém a parte majoritária de  $X$ . Portanto,  $x \in W$ . Analogamente,  $y \in U$ . De fato,  $e$  está em  $C_X \cap C_Y$  e os vértices de contração estão em partes distintas da bipartição de  $H$ .  $\square$

### LEMA 2.3.22

Seja  $G$  uma presilha,  $X \subset V(G)$  e  $C := \partial(X)$  um corte de  $G$ , tal que  $|X| \geq 3$  e  $|\overline{X}| \geq 3$ . Então,  $H := G[C]$  tem um emparelhamento de tamanho três.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o maior emparelhamento de  $H$  tenha tamanho no máximo dois. O emparelhamento máximo tem tamanho igual ao da cobertura mínima por vértices em um grafo bipartido. Portanto, existe um conjunto  $Y$  de vértices de  $H$ , com no máximo dois vértices, tal que  $H - Y$  não tem aresta. Sendo assim, toda aresta de  $H$  incide em vértice de  $Y$ . Ou seja, o corte  $\partial_{G-Y}(X - Y) = \partial_{G-Y}(\overline{X} - Y)$  é vazio. Pelo Corolário 2.3.14,  $G - Y$  é conexo. Portanto, um dentre  $X$  e  $\overline{X}$  é parte de  $Y$ . Isto é uma contradição, uma vez que  $|X| \geq 3$  e  $|\overline{X}| \geq 3$ . De fato,  $H$  tem emparelhamento de tamanho três.  $\square$

### 2.3.1 Arestas Magras

DEFINIÇÃO 2.3.23

Uma bicontração é uma operação aplicada sobre um grafo onde se contrai um vértice de grau dois e seus dois vizinhos a um único vértice.

DEFINIÇÃO 2.3.24

O índice de uma aresta  $e$  é o número de extremos de  $e$  que têm grau três.

DEFINIÇÃO 2.3.25

Seja  $e$  uma aresta de uma presilha  $G$  com mais de quatro vértices. A aresta  $e$  é dita *magra* se uma presilha pode ser obtida de  $G - e$  por  $k$  bicontrações, onde  $k$  é o índice de  $e$ .

DEFINIÇÃO 2.3.26

Uma aresta magra  $e$  é dita *verdadeiramente magra* se a presilha obtida de  $G - e$  através de  $k$  bicontrações for simples.

Sejam  $G$  uma presilha com mais de quatro vértices e  $e$  uma aresta magra de  $G$ . Note que, como toda presilha com mais de quatro vértices é 3-conexa, os vértices de grau dois de  $G - e$  contraídos na bicontração são necessariamente incidentes em  $e$ . Note também que se  $e$  é magra, então  $G - e$  possui no máximo uma presilha interna.

Definiremos a seguir alguns grafos importantes que serão usados no enunciado de um importante teorema devido a McCuaig. Um prisma  $L_{2n}$ , com  $n \geq 4$ , é um grafo obtido a partir de dois circuitos disjuntos  $C_1 := (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_0)$  e  $C_2 := (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_0)$  pela adição das arestas  $u_i w_i$ , para todo  $i$  em  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . O prisma  $L_{2n}$  é bipartido se e somente se  $n$  é par. Uma escada de Möbius  $M_{2n}$  é um grafo obtido a partir de um circuito par  $C := (u_0, u_1, \dots, u_{2n-1}, u_0)$  pela adição das arestas  $u_i u_{i+n}$ , para todo  $i$  em  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , onde os índices são tomados módulo  $2n$ . A escada de Möbius  $M_{2n}$  é bipartida se e somente se  $n$  é ímpar. Uma roda dupla  $B_{2n}$ , com  $n \geq 4$ , é um grafo obtido a partir de um circuito  $C := (u_0, u_1, \dots, u_{2n-3}, u_0)$ , chamado de *aro*, e de dois vértices  $x$  e  $y$  fora do circuito, chamados de *centros*, pela adição das arestas  $xu_i$  e  $yu_j$ , para todo  $i$  par e todo  $j$  ímpar. Toda roda dupla é bipartida. Vide Figura 2.1.

A definição utilizada por McCuaig para presilha exige que o grafo tenha pelo menos seis vértices. Nós utilizamos uma definição mais tolerante que aceita como presilha grafos com menos vértices. Portanto, para podermos utilizar o seguinte Teorema de McCuaig [12], precisamos restringi-lo a presilhas com pelo menos seis vértices.

TEOREMA 2.3.27

Toda presilha simples com pelo menos seis vértices distinta de roda dupla  $B_{2n}$  ( $n \geq 4$ ); distinta de prisma bipartido  $L_{4n}$  ( $n \geq 2$ ); e distinta de escada de Möbius bipartida  $M_{4n+2}$  ( $n \geq 1$ ), tem uma aresta verdadeiramente magra.

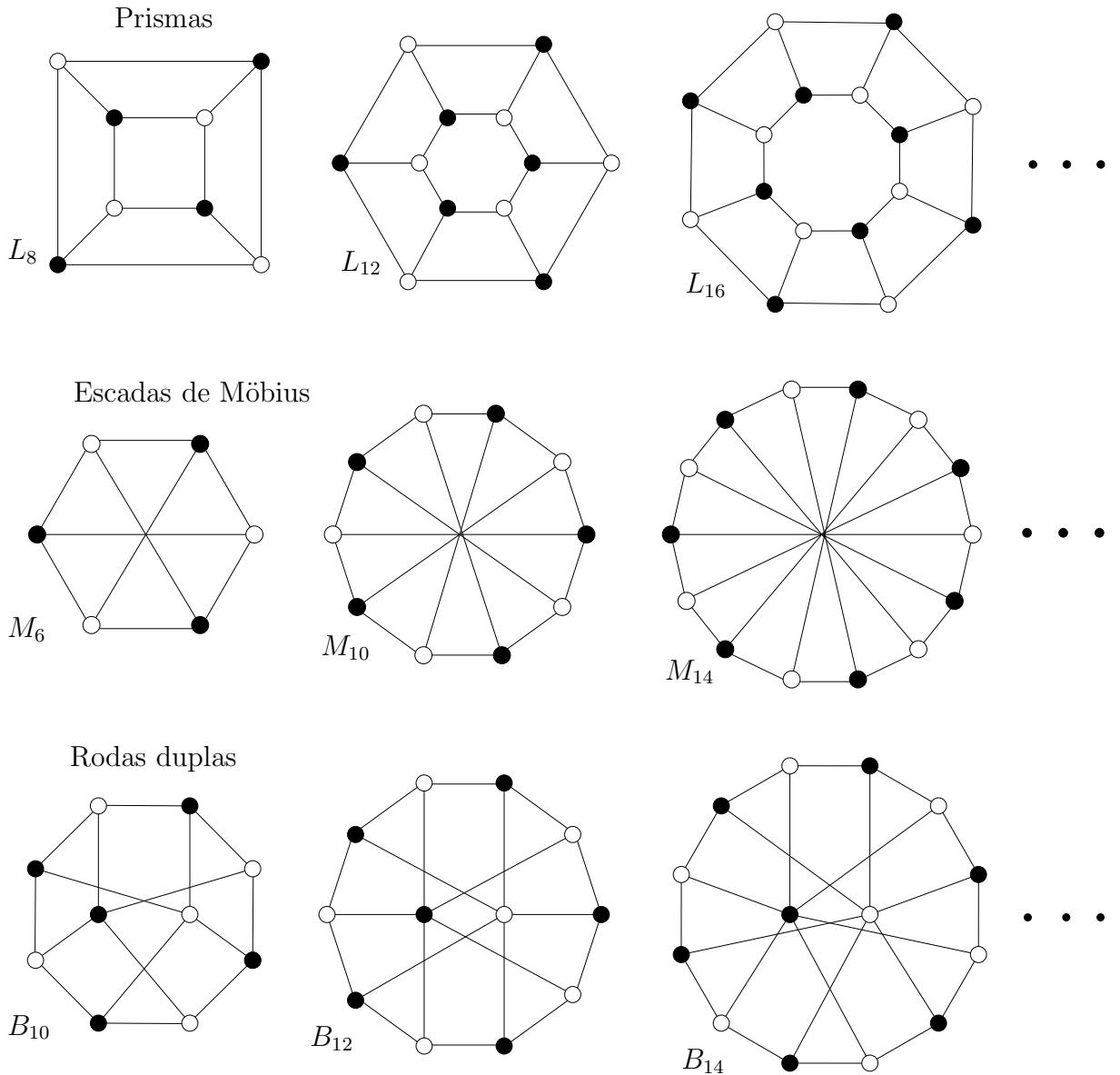


Figura 2.1: As presilhas do Teorema 2.3.27.

O Teorema seguinte é devido a Carvalho, Lucchesi e Murty [4] e tem papel muito importante na dissertação. Uma prova para este Teorema pode ser encontrada no artigo “How to Build a Brace” [4]. Pode ser também facilmente deduzida a partir do Teorema 2.3.27.

#### TEOREMA 2.3.28

*Toda presilha com seis ou mais vértices tem uma aresta magra.*

O Lema seguinte pode ser encontrado no mesmo artigo “How to Build a Brace” [4].

**LEMA 2.3.29 (GERAÇÃO DE PRESILHAS)**

Seja  $H$  uma presilha com bipartição  $\{A, B\}$ . As seguintes operações resultam em uma presilha  $G$ :

- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$  tais que  $x \in A$  e  $y \in B$ . A presilha  $G$  é obtida de  $H$  pela adição da aresta  $xy$ .
- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$  tais que  $x, y \in A$ , e o grau de  $x$  seja pelo menos quatro. Seja  $H' := H\{x \rightarrow \{x_1, x_2\}\}$  tal que tanto  $x_1$  como  $x_2$  tenham dois vizinhos em  $H'$ . A presilha  $G$  é obtida de  $H'$  pela adição de um vértice  $x_0$  e das arestas  $x_0x_1$ ,  $x_0x_2$  e  $x_0y$ .
- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$ , tais que  $x \in A$ ,  $y \in B$  e cujos graus são pelo menos quatro. Seja  $H'' := H\{x \rightarrow \{x_1, x_2\}\}\{y \rightarrow \{y_1, y_2\}\}$ , tal que cada um dentre  $x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$  tenham dois vizinhos, e pelo menos um vizinho em  $V(H) - \{x, y\}$ . A presilha  $G$  é obtida de  $H''$  pela adição de dois vértices  $x_0$  e  $y_0$ , e das arestas  $x_0x_1$ ,  $x_0x_2$ ,  $y_0y_1$ ,  $y_0y_2$  e  $x_0y_0$ .

**LEMA 2.3.30**

Toda roda dupla e todo prisma é planar.

**LEMA 2.3.31**

Toda escada de Möbius bipartida é coberta por emparelhamentos. □

**LEMA 2.3.32**

Toda escada de Möbius bipartida é não Pfaffiana.

Demonstração: Seja  $G$  uma escada de Möbius bipartida  $M_{4n+2}$ . A prova será feita por indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , temos que  $G = M_6 = K_{3,3}$ , um grafo não Pfaffiano. Então, podemos supor que  $G$  tem pelo menos dez vértices, ou seja  $n \geq 2$ . Adotaremos como hipótese de indução que  $M_{4m+2}$  não é Pfaffiano, para todo  $m < n$ . Seja  $e = u_0w_0$  uma aresta radial de  $G$ . Então, os vértices  $u_0$  e  $w_0$  tem grau dois em  $G - e$ . Seja  $U := \{u_0, u_1, u_2\}$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são os únicos vizinhos de  $u_0$  em  $G - e$ , e  $W := \{w_0, w_1, w_2\}$ , onde  $w_1$  e  $w_2$  são os únicos vizinhos de  $w_0$  em  $G - e$ . Tanto  $(G - e)[U]$  como  $(G - e)[W]$  são caminhos de comprimento dois. Portanto, os cortes  $\partial_G(U) - e$  e  $\partial_G(W) - e$  são justos em  $G - e$ . Seja  $H := (G - e)\{U \rightarrow u\}\{W \rightarrow w\}$ . De acordo com o Corolário 2.4.8,  $G$  é Pfaffiano somente se  $H$  é Pfaffiano. No entanto,  $H$  é uma escada de Möbius bipartida com  $4n - 2$  vértices, e por hipótese de indução,  $H$  não é Pfaffiano. Então, o grafo  $G$  não é Pfaffiano. □

## 2.4 Grafos Pfaffianos

Nesta seção são apresentados lemas e teoremas relacionados a grafos Pfaffianos.

Em 1975 C. Little provou o seguinte teorema [9].

**TEOREMA 2.4.1**

Um grafo bipartido  $G$  é Pfaffiano se e somente se não existe um subgrafo  $H$  conforme de  $G$  que é uma bissubdivisão de  $K_{3,3}$ .

### 2.4.1 Orientações Similares

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas orientações de um grafo  $G$ . Dizemos que  $D_1$  e  $D_2$  são *similares* se elas diferem precisamente nas arestas de algum corte de  $G$ . Os seguintes resultados podem ser encontrados no artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5]. Em particular, o seguinte lema é equivalente à Proposição 1.4 deste artigo.

**LEMA 2.4.2**

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas orientações similares de  $G$ . Então,  $D_1$  é Pfaffiana se e somente se  $D_2$  for Pfaffiana.

**TEOREMA 2.4.3**

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos, e uma aresta removível de  $G$ , e  $D'$  uma orientação Pfaffiana de  $G - e$ . Se  $G$  é Pfaffiano, então existe precisamente uma extensão de  $D'$  a uma orientação Pfaffiana  $D$  de  $G$ .

**LEMA 2.4.4**

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  duas orientações Pfaffianas de um grafo bipartido  $G$ . Então,  $D_1$  é similar a  $D_2$ .

O seguinte resultado pode ser deduzido a partir do Corolário 3.6 do artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5].

**TEOREMA 2.4.5**

Seja  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos,  $H$  um subgrafo conforme de  $G$  coberto por emparelhamentos, e  $D'$  uma orientação Pfaffiana de  $H$ . Existe uma extensão de  $D'$  a uma orientação Pfaffiana de  $G$  se e somente se  $G$  é Pfaffiano.

**LEMA 2.4.6**

Seja  $D$  uma orientação Pfaffiana de um grafo bipartido  $G$ . Sejam  $u$  e  $w$  dois vértices de  $G$  em partes distintas da bipartição de  $G$ . Existe uma orientação Pfaffiana  $D'$  similar a  $D$  tal que  $u$  é fonte e  $w$  é sorvedouro.

Demonstração: Suponha que  $uw$  seja aresta de  $G$ , e que  $w$  seja a origem de  $uw$ . Neste caso,  $D' := D \oplus \partial(u)$  é orientação Pfaffiana similar a  $D$  tal que  $u$  é origem de  $uw$  em  $D'$ . Ajuste a notação, trocando  $D$  e  $D'$  se necessário, de forma que se  $uw$  for aresta de  $G$ , sua origem em  $D$  seja  $u$ . Seja  $S$  o conjunto de arestas incidentes em  $u$  ou  $w$  cuja origem não é  $u$  e cujo destino não é  $w$ . A prova é feita por indução em  $|S|$ . Se  $|S| = 0$ , temos a orientação desejada. Seja  $f$  uma aresta de  $S$ . Como, pelo ajuste de notação anterior,  $uw$  não está em  $S$ , a aresta  $f$  tem um extremo  $v$  fora de  $\{u, w\}$ . Seja  $D' := D \oplus \partial(v)$ . Como  $u$  e  $w$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ , temos que  $v$  é adjacente a precisamente um dentre  $u$  e  $w$ . Então,  $f$  é a única aresta de  $\partial(v)$  em  $S$ . Dessa forma, por indução,  $G$  tem uma orientação  $D''$  similar a  $D'$  tal que  $u$  é fonte e  $w$  é sorvedouro. Como  $D'$  é similar a  $D$ , temos que  $D''$  e  $D$  são similares. De fato, o lema é válido.  $\square$

### 2.4.2 Grafos Pfaffianos e Cortes Justos

O Teorema seguinte é devido a Little e Rendl [8][Teoremas 1 e 4]. Apesar do enunciado dos teoremas citados não implicarem diretamente o teorema a seguir, a prova apresentada no artigo implica. Este resultado também pode ser encontrado no artigo “On the Number of Dissimilar Pfaffian Orientations of Graphs” [5].

#### TEOREMA 2.4.7

Sejam  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos,  $C$  um corte justo de  $G$  e  $G_1$  e  $G_2$  as duas  $C$ -contrações de  $G$ . Então,  $G$  é Pfaffiano se e somente se  $G_1$  e  $G_2$  são Pfaffianos. Além disso, se  $D_1$  e  $D_2$  são orientações Pfaffianas de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, e  $D_1$  e  $D_2$  são orientadas em  $C$  e concordam em  $C$ , então a extensão de  $D_1$  e  $D_2$  a uma orientação de  $G$  é Pfaffiana.

#### COROLÁRIO 2.4.8

Sejam  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos Pfaffiano e  $e$  uma aresta removível de  $G$ . Então, todos os grafos de uma decomposição em cortes justos de  $G - e$  são Pfaffianos. Em particular, todas as presilhas de  $G - e$  são Pfaffianas.  $\square$

A seguir, provaremos dois lemas que tem um papel fundamental na dissertação.

#### LEMA 2.4.9

Seja  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos Pfaffiano, seja  $R$  um conjunto de arestas adicionadas a  $G$  tal que  $G^* := G + R$  é bipartido e coberto por emparelhamentos. Seja  $e$  uma aresta removível de  $G$ . Toda orientação Pfaffiana de  $G^* - e$  tem uma extensão a uma orientação  $D^*$  de  $G^*$  cuja restrição a  $G$  é Pfaffiana.

Demonstração: Seja  $D(G^* - e)$  uma orientação Pfaffiana de  $G^* - e$ . Note que o grafo  $G - e$  é conforme em  $G^* - e$ . Portanto, pelo Corolário 1.2.4, a restrição  $D(G - e)$  de  $D(G^* - e)$  às arestas de  $G - e$  é Pfaffiana. De acordo com o Teorema 2.4.3,  $D(G - e)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G)$  Pfaffiana de  $G$ . Seja  $D$  a extensão comum de  $D(G^* - e)$  e de  $D(G)$  a uma orientação de  $G^*$ . De fato, as restrições de  $D$  a  $G$  e  $G^* - e$  são Pfaffianas.  $\square$

#### LEMA 2.4.10

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos Pfaffiano. Seja  $H$  um grafo obtido a partir de  $G$  por contração de praias de cortes justos de  $G$ . Seja  $D(H)$  uma orientação Pfaffiana de  $H$  na qual todo vértice de contração de  $H$  é ou uma fonte ou um sorvedouro. Então  $G$  tem uma orientação Pfaffiana cuja restrição a  $H$  é igual a  $D(H)$ .

Demonstração: Seja  $X$  uma praia de corte justo de  $G$  que é contraída em um vértice de  $H$ , digamos  $x$ . Seja  $H' := G\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\}$ . Como  $G$  é Pfaffiano,  $H'$  é Pfaffiano, de acordo com o Teorema 2.4.7. Pelo Lema 2.4.6,  $H'$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $\bar{x}$  é fonte e outra na qual  $\bar{x}$  é sorvedouro. Por hipótese,  $\partial(x)$  é orientado em  $D(H)$ . Portanto, existe uma orientação  $D'$  de  $H'$  que concorda com  $D(H)$  em  $\partial(X)$ . Este argumento vale para toda praia  $X$  de corte justo de  $G$ . Seja  $D(G)$  a extensão de  $D(H)$  e das orientações Pfaffianas  $D'$  de  $H' = G\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\}$  para cada praia de corte justo  $X$  de  $G$  a uma orientação de  $G$ . De acordo com o Teorema 2.4.7,  $D(G)$  é uma orientação Pfaffiana de  $G$ .  $\square$

## 2.5 O Grafo de Heawood

Chamaremos de  $H_{14}$  o grafo de Heawood, mostrado na Figura 2.2.

Considere as seguintes permutações:

$$\begin{aligned}\lambda(v) &:= v + 2 \mod 14 \\ \rho &:= \{(0\ 13\ 12\ 3\ 4\ 5)\ (1\ 8\ 11\ 2\ 9\ 6)\ (7\ 10)\} \\ \theta &:= \{(0)\ (1)\ (2)\ (3)\ (4\ 12)\ (5\ 13)\ (6\ 8)\ (7)\ (9\ 11)\ (10)\},\end{aligned}$$

onde  $(a\ b\ c)$  é uma órbita de uma permutação, significando que a permutação leva  $a$  em  $b$ ,  $b$  em  $c$  e  $c$  em  $a$ . Olhando a Figura 2.2, podemos ver que estas permutações são automorfismos do grafo de Heawood. A permutação  $\lambda$  também será chamada de 2-rotação.

#### LEMA 2.5.1

O grafo de Heawood é transitivo nos vértices.

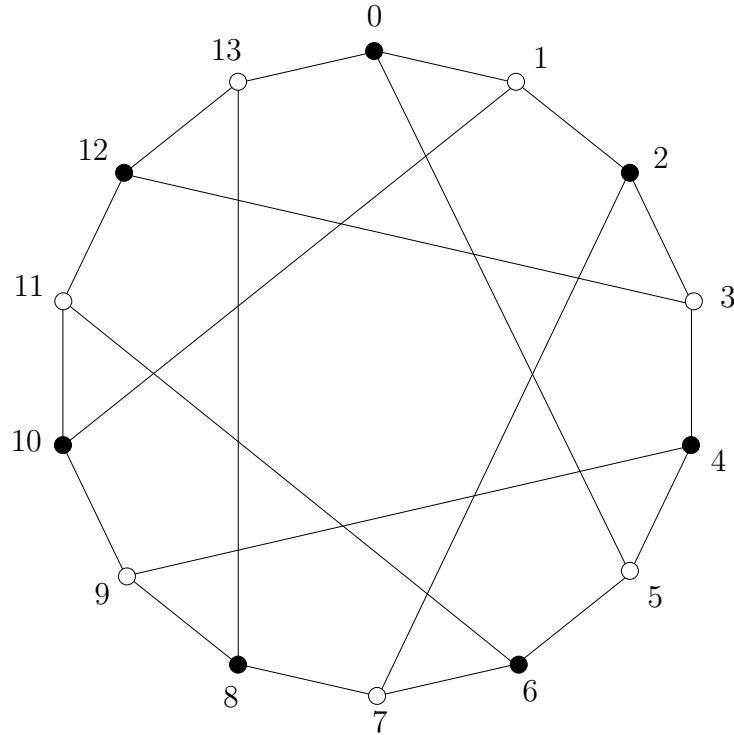


Figura 2.2: O grafo de Heawood.

Demonstração: A repetida aplicação de  $\lambda$  leva qualquer vértice par a 0. Analogamente, a repetida aplicação de  $\lambda$  leva qualquer vértice ímpar a 5. A permutação  $\rho$  leva o vértice 5 ao vértice 0. Portanto, todo vértice de  $H_{14}$  pode ser levado ao vértice 0 por aplicação de uma composição de automorfismos. Uma composição de automorfismos é um automorfismo. Portanto, para todo vértice  $v$  de  $H_{14}$ , existe um automorfismo que leva  $v$  a 0. A inversa de um automorfismo também é um automorfismo. Portanto, para todo par de vértices  $u, w$  de  $H_{14}$ , existe um automorfismo que leva  $u$  a  $w$ .  $\square$

### DEFINIÇÃO 2.5.2

Um grafo  $G$  é  $P_n$ -transitivo se, para todo par de caminhos  $P := (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$  e  $Q := (q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ , existe um automorfismo  $\varphi$  de  $G$  tal que  $\varphi(p_i) = q_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

### LEMA 2.5.3

O grafo de Heawood é  $P_2$ -transitivo.

Demonstração: Provaremos isto levando todo  $P_2$  de  $H_{14}$  ao  $P_2$ :  $(0, 1)$ . Seja  $(v, w)$  um  $P_2$  de  $H_{14}$ . O grafo  $H_{14}$  é transitivo nos vértices, de acordo com o Lema 2.5.1. Portanto, podemos supor que  $v = 0$ . Existem três possibilidades para  $w$ :

- $w = 1$ . Nesse caso,  $(v, w) = (0, 1)$ , como desejado.
- $w = 13$ . Nesse caso, aplicamos  $\rho^4$ , levando  $(0, 13)$  a  $(4, 5)$ . Então, aplicamos  $\lambda^{-2}$ , levando  $(4, 5)$  a  $(0, 1)$ , como desejado.
- $w = 5$ . Nesse caso, aplicamos  $\theta$  a  $(0, 5)$ , obtendo  $(0, 13)$ , que é um caso já tratado.

De fato,  $H_{14}$  é  $P_2$ -transitivo.  $\square$

#### LEMA 2.5.4

*O grafo de Heawood é  $P_5$ -transitivo.*

Demonstração: Seja  $p := (v_1, v_2, \dots, v_i)$  um  $P_i$  de  $H_{14}$ , para  $i = 2, 3, 4, 5$ . Provaremos que  $H_{14}$  é  $P_i$ -transitivo levando qualquer  $P_i$  à porção final de  $(0, 1, 2, 3, 4)$ . Pelo Lema 2.5.3,  $H_{14}$  é  $P_2$ -transitivo. Ao provarmos que  $H_{14}$  é  $P_i$ -transitivo, adotaremos a hipótese de indução de que  $H_{14}$  é  $P_{i-1}$ -transitivo. Portanto, podemos levar  $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$  à parte final de  $(0, 1, 2, 3)$  ( $v_{i-1} \rightarrow 3, v_{i-2} \rightarrow 3, \dots$ ). Sendo assim, existem duas possibilidades para onde está o vértice  $v_i$  de  $p$ . Ele está ou em 4 ou em 12. Se  $v_i$  está em 4, levamos  $p$  à porção final de  $(0, 1, 2, 3, 4)$ . Caso  $v_i$  esteja em 12, aplicamos o automorfismo  $\theta$ , levando 12 a 4, e mantendo  $(0, 1, 2, 3)$  em  $(0, 1, 2, 3)$ . Portanto, acabamos de levar  $p$  à porção final de  $(0, 1, 2, 3, 4)$ . De fato, o grafo de Heawood é  $P_5$ -transitivo.  $\square$

#### LEMA 2.5.5

*O grafo de Heawood é  $P_5$ -transitivo, não planar, tem diâmetro três e cintura seis.*

Demonstração: Pelo Lema 2.5.4,  $H_{14}$  é  $P_5$ -transitivo. As pontes  $(0, 5)$ ,  $(2, 7)$  e  $(4, 9)$  do circuito  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$  cruzam-se mutuamente. Portanto,  $H_{14}$  não é planar. Como  $H_{14}$  é transitivo nos vértices, podemos nos restringir a calcular a distância máxima de um vértice de  $H_{14}$  ao vértice 0. Sendo assim, os vértice 1, 5 e 13 têm distância um. Todos os demais vértices pares são adjacentes a um dentre 1, 5 e 13. Portanto, os vértices ímpares distintos de 1, 5 e 13 tem distância três de 0. De fato, o diâmetro de  $H_{14}$  é igual a três.

Seja  $P$  um circuito qualquer de  $H_{14}$ . Como  $H_{14}$  é  $P_5$ -transitivo, podemos supor que o trecho inicial de  $P$  é  $(0, 1, 2, 3, 4)$ . Este caminho não tem corda. Portanto, não existe circuito de  $H_{14}$  com no máximo cinco vértices. Por outro lado,  $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 0)$  é um circuito de  $H_{14}$ . Dessa forma, a cintura de  $H_{14}$  é igual a seis.  $\square$

**COROLÁRIO 2.5.6**

Sejam  $v_0$  e  $v_1$  dois vértices adjacentes de  $H_{14}$ . Sejam  $v'_0$  e  $v'_1$  dois vértices adjacentes de  $H_{14}$  (possivelmente  $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$  não é vazio). Existe um automorfismo que leva  $v_0$  a  $v'_0$  e  $v_1$  a  $v'_1$ .

Demonstração: Este fato deriva diretamente de que  $H_{14}$  é  $P_2$ -transitivo.  $\square$

**COROLÁRIO 2.5.7**

Sejam  $v_0$  e  $v_1$  dois vértices não adjacentes de  $H_{14}$  em partes distintas da bipartição de  $H_{14}$ . Sejam  $v'_0$  e  $v'_1$  dois vértices não adjacentes de  $H_{14}$  em partes distintas da bipartição de  $H_{14}$ . (possivelmente  $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$  não é vazio). Existe um automorfismo que leva  $v_0$  a  $v'_0$  e  $v_1$  a  $v'_1$ .

Demonstração: Os vértices  $v_0$  e  $v_1$  estão em parte distintas da bipartição de  $H_{14}$ . Portanto, o caminho mínimo de  $v_0$  a  $v_1$  tem comprimento ímpar. No entanto, o diâmetro de  $H_{14}$  é três. Sendo assim, o caminho mínimo de  $v_0$  a  $v_1$  tem três arestas e quatro vértices. Seja  $P$  este caminho. Analogamente, seja  $P'$  o caminho com quatro vértices de  $v'_0$  a  $v'_1$ . Como  $H_{14}$  é  $P_4$ -transitivo, existe automorfismo de  $H_{14}$  que leva  $P$  a  $P'$ . Este mesmo automorfismo leva  $v_i$  a  $v'_i$ , para  $i = 1, 2$ .  $\square$

**COROLÁRIO 2.5.8**

Sejam  $v_0$  e  $v_1$  dois vértices de  $H_{14}$  em uma mesma parte da bipartição de  $H_{14}$ . Sejam  $v'_0$  e  $v'_1$  dois vértices de  $H_{14}$  em uma mesma parte da bipartição de  $H_{14}$ . (possivelmente  $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$  não é vazio). Existe um automorfismo que leva  $v_0$  a  $v'_0$  e  $v_1$  a  $v'_1$ .

Demonstração: Os vértices  $v_0$  e  $v_1$  estão numa mesma parte da bipartição de  $H_{14}$ . Portanto, o caminho mínimo de  $v_0$  a  $v_1$  tem comprimento par. No entanto, o diâmetro de  $H_{14}$  é três. Sendo assim, o caminho mínimo de  $v_0$  a  $v_1$  tem duas arestas e três vértices. Seja  $P$  este caminho. Analogamente, seja  $P'$  o caminho com três vértices de  $v'_0$  a  $v'_1$ . Como  $H_{14}$  é  $P_3$ -transitivo, existe automorfismo de  $H_{14}$  que leva  $P$  a  $P'$ . Este mesmo automorfismo leva  $v_i$  a  $v'_i$ , para  $i = 1, 2$ .  $\square$

**DEFINIÇÃO 2.5.9**

Uma orientação  $D$  de um grafo com bipartição  $\{U, W\}$  é bipartida orientada se ou (i) toda aresta de  $D$  tem sua origem em  $U$ , ou (ii) toda aresta de  $D$  tem sua origem em  $W$ .

**LEMA 2.5.10**

Toda orientação bipartida orientada do grafo de Heawood é Pfaffiana.

Demonstração: Seja  $D$  uma orientação bipartida orientada de  $H_{14}$ . Numa orientação bipartida orientada, a paridade da orientação de um circuito é igual à paridade da metade dos vértices do circuito. Sendo assim, todo circuito de  $H_{14}$  com  $4n + 2$  vértices, para  $n$  inteiro, tem orientação ímpar em  $D$ . Analogamente, todo circuito com  $4n$  vértices, para  $n$  inteiro, tem orientação par em  $D$ . A cintura de  $H_{14}$  é seis, de acordo com o Lema 2.5.5. Portanto, os circuitos de  $4n$  vértices de  $H_{14}$  tem oito ou doze vértices.

Seja  $Q$  um circuito de  $H_{14}$  com oito vértices. Pelo Lema 2.5.4,  $H_{14}$  é  $P_5$ -transitivo. Portanto, podemos supor que  $(1, 2, 3, 4, 5)$  é um segmento de  $Q$ . Suponha que  $(1, 2, 3, 4, 5, 0)$  seja segmento de  $Q$ . Nesse caso,  $(0, 1)$  não está em  $Q$ , pois  $Q$  tem oito vértices. Então,  $(10, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 13)$  é segmento de  $Q$ . No entanto, 10 não é adjacente a 13, contradição. De fato,  $(0, 5)$  não está em  $Q$ . Portanto,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$  é segmento de  $Q$ . Suponha que  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  seja segmento de  $Q$ . O único vizinho de 7 ainda não confirmado dentro de  $Q$  é 8. Portanto, nesse caso,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$  seria segmento de  $Q$ . No entanto, 1 não é adjacente a 8 em  $H_{14}$ . De fato,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 11)$  é segmento de  $Q$ . O único vértice adjacente tanto a 1 como a 11 é 10. Portanto,  $Q$  é igual a  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 10)$ . No entanto, o grafo  $H_{14} - V(Q)$ , que é igual a  $G[\{7, 8, 9, 12, 13, 0\}]$ , não tem emparelhamento perfeito. Sendo assim, nenhum circuito com oito vértices de  $H_{14}$  é conforme.

Suponha, por absurdo, que existe um circuito  $C$  de  $H_{14}$  com doze vértices. Suponha, por absurdo, que  $C$  seja conforme. Sendo assim,  $H_{14} - V(C)$  tem emparelhamento perfeito. No entanto,  $H_{14}$  tem precisamente quatorze vértices. Sendo assim,  $H_{14} - C$  é composto por precisamente uma aresta. Seja  $e = vw$  tal aresta. O vértice  $w$  é adjacente a um vértice  $u_0$  de  $C$ . Seja  $(u_0, u_1, u_2)$  um segmento de  $C$ . Pelo Lema 2.5.4,  $H_{14}$  é  $P_5$ -transitivo. Portanto,  $(v, w, u_0, u_1, u_2)$  pode ser levado por um automorfismo a  $(0, 1, 2, 3, 4)$ . Sendo assim, podemos supor que  $H_{14} - V(C)$  é igual ao caminho  $(0, 1)$ . Dessa forma,  $(2, 3, 4)$  é segmento de  $C$ . Além disso, 2 tem três vizinhos em  $H_{14}$ , e o vizinho 1 não está em  $C$ . Portanto,  $(7, 2, 3, 4)$  é segmento de  $C$ . Além disso, 5 tem somente dois vizinhos em  $H_{14} - \{0, 1\}$ : 4 e 6. Portanto,  $(7, 2, 3, 4, 5, 6)$  é segmento de  $C$ . Como  $C$  é circuito de tamanho doze, o vértice seguinte a 6 não é o vértice 7. O mesmo vale para 7. Sendo assim,  $(8, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 11)$  é segmento de  $C$ . Os vértices restantes são 9, 10, 12 e 13. Mas, a escolha do próximo vértice depois de 12 força a escolha do seguinte, definindo um circuito de tamanho dez, uma contradição. De fato, não existe circuito conforme de tamanho doze em  $H_{14}$ .

Sendo assim, todo circuito conforme de  $H_{14}$  tem orientação ímpar em  $D$ . De fato,  $D$  é Pfaffiana.  $\square$

#### LEMA 2.5.11

O grafo de Heawood é uma presilha Pfaffiana.

Demonstração: Pelo Lema 2.5.10,  $H_{14}$  é Pfaffiano. Seja  $\{P, I\}$  a bipartição de  $H_{14}$ , tal que  $0 \in P$ . O grafo de Heawood tem pelo menos seis vértices. Portanto, podemos mostrar que  $H_{14}$  é presilha mostrando que para todo subconjunto não vazio  $X$  de  $P$ , tal que  $|X| \leq |P| - 2$ , temos que  $|N(X)| \geq |X| + 2$ . Seja  $X$  um tal subconjunto. Todo vértice de  $H_{14}$  tem três vizinhos. Portanto, se  $|X| = 1$ , a propriedade vale. Suponha, portanto, que  $|X| \geq 2$ . Pelo Corolário 2.5.8, podemos supor que  $0, 2 \in X$ . Sendo assim,  $N(X)$  contém  $\{1, 3, 5, 7, 13\}$ , e a propriedade vale se  $|X| \leq 3$ . Suponha, agora, que  $|X| = 4$ . Seja  $w$  um vértice em  $X - \{0, 2\}$ . Então,  $w$  está em  $P - \{0, 2\}$ . No entanto, todo os vértices de  $P - \{0, 2\}$  são adjacentes a um dentre 9 e 11. Portanto,  $N(X)$  contém  $\{1, 3, 5, 7, 13, u\}$ , onde  $u \in \{9, 11\}$ . Portanto,  $|N(X)| \geq 6$ , e a propriedade vale. Suponha, então que  $|X| = 5$ . Então,  $P - X$  tem precisamente dois vértices. De acordo com o Corolário 2.5.8, podemos ajustar a notação de forma que  $X$  não contenha 12 e 10. Sendo assim,  $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ . Portanto,  $N(X) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ , e  $|N(X)| = 7 \geq 5 + 2 = |X| + 2$ . De fato, a propriedade vale em todos os casos. Portanto,  $H_{14}$  é presilha.  $\square$

## 2.6 Grafos Planares

A primeira classe de grafos para a qual se resolveu o problema de se decidir se um grafo é Pfaffiano foi a classe dos grafos planares. O seguinte lema é devido a Kasteleyn [7].

**LEMA 2.6.1**

*Todo grafo planar é Pfaffiano.*

Demonstração: Uma prova deste lema pode ser encontrada no livro escrito por Lovász e Plummer [11, Teoremas 8.3.3 e 8.3.4].  $\square$

O seguinte lema é um resultado clássico e uma prova para ele pode ser encontrada no livro de Diestel [6][Proposição 4.2.5, pág. 72].

**LEMA 2.6.2**

*Seja  $G$  um grafo planar simples 2-conexo. Então toda face de  $G$  é delimitada por um circuito.*

O seguinte resultado pode ser encontrado no artigo “Pólya’s Permanent Problem” [13, Lema 42, pág. 47].

**LEMA 2.6.3**

*Toda face de um grafo bipartido planar coberto por emparelhamentos é delimitada por um circuito conforme.*

O seguinte lema aparece como Lema 8.3.3 do livro de Lovász e Plummer [11].

#### LEMA 2.6.4

*Se  $D$  é uma orientação das arestas de um grafo planar conexo tal que todo circuito facial de  $D$  (exceto possivelmente o circuito que delimita a face infinita) tem um número ímpar de arestas no sentido horário, então em cada circuito, o número de arestas orientadas no sentido horário tem paridade oposta à paridade do número de vértices de  $D$  dentro do circuito. Dessa forma,  $D$  é Pfaffiano.*

#### COROLÁRIO 2.6.5

*A paridade da orientação de um circuito em uma orientação Pfaffiana de um grafo bipartido planar coberto por emparelhamentos é o oposto da paridade do número de vértices internos ao circuito numa imersão planar.*

Demonstração: Seja  $G$  um grafo bipartido planar coberto por emparelhamentos,  $\tilde{G}$  uma imersão planar de  $G$ . Seja  $D$  uma orientação Pfaffiana de  $G$ . Seja  $F$  uma face de  $\tilde{G}$ . De acordo com o Lema 2.6.3,  $F$  é delimitada por um circuito  $Q$  conforme em  $G$ . Como  $Q$  é circuito conforme em  $G$  e  $D$  é Pfaffiana, a orientação de  $Q$  em  $D$  é ímpar. Portanto, o número de arestas de  $Q$  orientadas no sentido horário em  $D$  é ímpar. Este argumento vale para toda face de  $\tilde{G}$ . Seja  $Q'$  um circuito qualquer de  $G$ . Então, de acordo com o Lema 2.6.4, a paridade do número de arestas no sentido horário de  $Q'$  em  $D$  é o oposto da paridade do número de vértices de  $G$  dentro de  $Q'$ . Como  $G$  é bipartido,  $Q'$  tem um número par de arestas, e a paridade do número de arestas de  $Q'$  no sentido horário em  $D$  é igual à paridade da orientação de  $Q'$ .  $\square$

Dizemos que duas imersões planares  $\tilde{G}_1$  e  $\tilde{G}_2$  de um grafo  $G$  são *iguais* se o conjunto de fronteiras que delimitam as faces de  $\tilde{G}_1$  é igual ao conjunto de fronteiras que delimitam as faces de  $\tilde{G}_2$ . Dizemos que um grafo planar tem uma *única* imersão planar se todas as suas imersões planares são iguais. O próximo resultado é um teorema clássico devido a Hassler Whitney [21].

#### TEOREMA 2.6.6

*Um grafo simples planar 3-conexo tem uma única imersão planar.*

Seja  $\{U, W\}$  a bipartição de um grafo simples  $G$ . Seja  $H$  tal que  $V(H) = V(G)$  e  $E(H) := \{uw : u \in U, w \in W, uw \notin E(G)\}$ . Nesse caso, chamamos  $H$  de *complemento bipartido* de  $G$ . Note que  $G$  é o complemento bipartido de  $H$ .

#### LEMA 2.6.7

*O cubo é a única presilha simples planar com oito vértices, e a única presilha simples Pfaffiana com oito vértices.*

Demonstração: Seja  $G$  uma presilha simples com oito vértices, e  $H$  o complemento bipartido de  $G$ . De acordo com o Corolário 2.3.14, o grau mínimo de  $G$  é três. Portanto,  $H$  tem grau máximo um. Sendo assim,  $H$  é um emparelhamento. Seja  $\{U, W\}$  a bipartição de  $G$ , tal que  $U = \{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ , e  $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ . Mostraremos agora que se  $H$  é um emparelhamento perfeito, então  $G$  é o cubo. Suponha que  $H$  seja um emparelhamento perfeito. Ajuste a notação de forma que  $u_i w_i$  seja uma aresta de  $H$ , para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Sendo assim,  $u_i w_j$  é aresta de  $G$  se e somente se  $i \neq j$ . Portanto,  $G$  é o cubo, como pode ser visto na Figura 2.3.

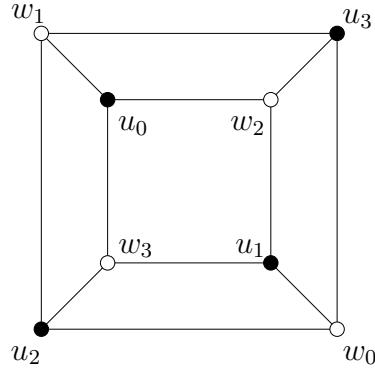


Figura 2.3: O grafo  $G$ , igual ao cubo, no caso em que  $H$  é um emparelhamento perfeito.

Suponha agora que  $G$  seja distinto do cubo. Então,  $H$  é um emparelhamento não perfeito. Portanto,  $H$  é um subgrafo do emparelhamento com quatro arestas. Ajuste a notação de forma que  $E(H)$  seja um subconjunto de  $\{u_1 w_1, u_2 w_2, u_3 w_3\}$ . Sendo assim, o cubo mostrado na Figura 2.3 mais a aresta  $u_0 w_0$  é um subgrafo de  $G$ . Seja  $G'$  este subgrafo. Nesse caso,  $G' - u_0 w_3 - u_2 w_0$  é uma bissubdivisão do  $K_{3,3}$ , onde  $\{u_0, u_1, u_3, w_0, w_1, w_2\}$  é o conjunto de vértices de grau três da subdivisão, e  $(u_1, w_3, u_2, w_1)$  é o único caminho subdividido da bissubdivisão. Além disso,  $G' - u_0 w_3 - u_2 w_0$  é conforme em  $G$ , pois  $G' - u_0 w_3 - u_2 w_0$  tem o mesmo número de vértices que  $G$ . Então, de acordo com o Teorema 2.4.1,  $G$  não é Pfaffiano. Além disso,  $G$  não é planar. De fato,  $G$  é a única presilha simples com oito vértices planar, e a única presilha simples com oito vértices Pfaffiana.  $\square$

# Capítulo 3

## 4-Somas

Relembramos, a seguir, a definição de grafo redutível. Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição  $\{U, W\}$ . Uma quádrupla  $Z$  de vértices de  $G$  reduz  $G$  se:

- $Z$  contém dois vértices em  $U$  e dois vértices em  $W$ ;
- $G - Z$  consiste de três ou mais componentes conexas.

Um grafo bipartido coberto por emparelhamentos  $G$  é redutível se alguma quádrupla de vértices de  $G$  reduz  $G$  e é irredutível caso contrário.

Sejam  $G_1, G_2, \dots, G_n$  ( $n \geq 2$ )  $n$  grafos e  $Q$  um quadrilátero tal que:

- para  $i = 1, 2, \dots, n$ , o grafo  $G_i$  tem seis ou mais vértices;
- para quaisquer dois índices  $i, j$  tal que  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $G_i \cap G_j = Q$ .

Para cada subconjunto  $R$  (possivelmente vazio) de  $E(Q)$ , o grafo  $G := (\bigcup_{1 \leq i \leq n} G_i) - R$  é a  $(Q, R)$ -*soma* das  $n$  *parcelas*  $G_i$ . Se  $Q$  e  $R$  estão sub-entendidos, diz-se simplesmente *4-soma*, ao invés de  $(Q, R)$ -soma. Se  $R$  é vazio, dizemos que a 4-soma é *completa*: nesse caso,  $G$  é a união das  $n$  parcelas. Se  $R = E(Q)$  então dizemos que a 4-soma é *fina*: nesse caso, nenhuma aresta de  $Q$  está em  $G$ . O grafo  $H_{10}$ , mostrado na Figura 3.1, é a 4-soma fina de três  $K_{3,3}$ 's.

É conveniente estendermos a definição de 4-soma para admitir o caso em que há apenas uma parcela,  $G_1$ . Nesse caso, é necessário que  $Q$  seja um quadrilátero de  $G_1$  e que  $G$  seja igual a  $G_1 - R$ .

### 3.1 Presilhas e 4-Somas

No grafo  $H_{10}$ , mostrado na Figura 3.1, nenhum emparelhamento perfeito de  $H_{10}$  contém tanto  $u_1w_1$  quanto  $u_3w_3$ . Portanto,  $H_{10} - u_1 - u_3 - w_1 - w_3$  não tem emparelhamento

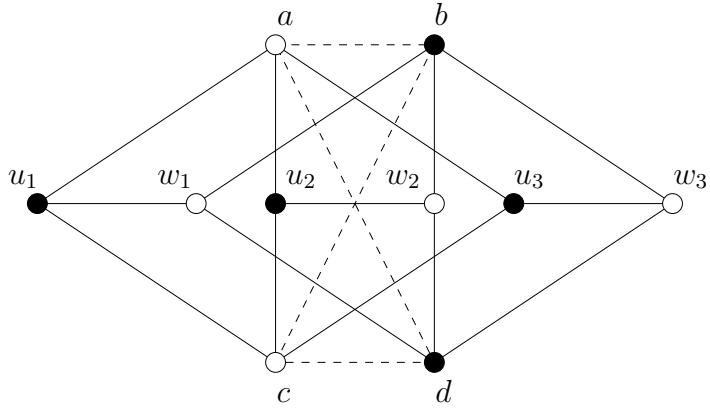


Figura 3.1: O grafo  $H_{10}$ , a 4-soma fina de três  $K_{3,3}$ 's. (o quadrilátero  $Q$  é mostrado em linhas pontilhadas)

perfeito. Sendo assim,  $H_{10}$  não é presilha, de acordo com o Teorema 2.3.8. O resultado seguinte implica que  $H_{10}$  é a única 4-soma de três ou mais presilhas que não é uma presilha, como provado por McCuaig [13, Lema 19].

### TEOREMA 3.1.1

Seja  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos que é uma 4-soma de  $n \geq 2$  grafos bipartidos. Então,

- (i) se  $G$  é uma presilha, então cada parcela é uma presilha;
- (ii) se  $G$  não é uma presilha mas cada parcela é uma presilha, então  $n \leq 3$  e a soma não é completa. Se, além disso,  $n = 3$ , então a soma é fina e  $G = H_{10}$ .

Demonstração: Sejam  $G_1, G_2, \dots, G_n$  as parcelas, e  $Q := (a, b, c, d, a)$  seu quadrilátero comum. Lembremos que a definição de 4-soma exige que cada parcela tenha pelo menos seis vértices. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , seja  $\{U_i, W_i\}$  a bipartição de  $G_i$ . Como  $Q$  é um quadrilátero de  $G_i$ , um dentre  $\{a, c\}$  e  $\{b, d\}$  é parte de  $U_i$ , e o outro é parte de  $W_i$ . Ajuste a notação de forma que, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\{a, c\} \subset U_i$  e  $\{b, d\} \subset W_i$ . Sejam  $U := \bigcup U_i$  e  $W := \bigcup W_i$ . Então,  $\{U, W\}$  é a bipartição de  $G$ .

prova do (i):

Suponha que  $G$  é uma presilha. Mostraremos que  $G_1$  é uma presilha. Para tanto, podemos supor que  $G$  é uma 4-soma completa. De fato, se  $ab$  não é aresta de  $G$ , então  $G + ab$  também é presilha, de acordo com o Corolário 2.3.11. Além disso,  $G + ab$  também é uma 4-soma de  $n$  parcelas. Sendo assim, podemos supor que  $Q$  é um quadrilátero de  $G$ , e portanto  $G_1$  é um subgrafo de  $G$ .

Sejam  $u_1, u_2$  dois vértices quaisquer em  $U_1$ , e  $w_1, w_2$  dois vértices quaisquer de  $W_1$ . Então,  $u_1$  e  $u_2$  estão ambos em  $U$ , e  $w_1$  e  $w_2$  estão ambos em  $W$ . Seja  $X := \{u_1, u_2, w_1, w_2\}$ . Por hipótese,  $G$  é presilha. Pelo Teorema 2.3.8,  $G - X$  tem emparelhamento perfeito  $M$ . Seja  $M_1 := M \cap E(G_1)$ . Se escolhermos  $X$  igual a  $V(Q)$ , então  $M_1$  é um emparelhamento perfeito de  $G_1 - V(Q)$ . Sendo assim, temos que  $|U_1 - a - c| = |W_1 - b - d|$ , e portanto  $|U_1| = |W_1|$ .

Consideremos agora um  $X$  qualquer. Então,  $M_1$  é um emparelhamento (não necessariamente perfeito) de  $G_1 - X$ . Mostraremos agora que  $M_1$  tem uma extensão a um emparelhamento perfeito de  $G_1 - X$ . Seja  $S$  o conjunto de vértices de  $G_1 - X$  não emparelhados por  $M_1$ . Então,  $S \subseteq V(Q) - X$ . Se  $S$  é vazio, então  $M_1$  é emparelhamento perfeito de  $G_1 - X$ . Se  $S = V(Q)$ , então  $M_1 \cup \{ab, cd\}$  é emparelhamento perfeito de  $G_1 - X$ .

Podemos, portanto, supor que  $S$  é um subconjunto próprio não nulo de  $V(Q)$ . Como  $|U_1| = |W_1|$ , temos que  $|U_1 - X| = |W_1 - X|$ . Portanto, o conjunto  $S$  contém um número par de vértices, metade dos quais em  $U_1$  e metade em  $W_1$ . Como  $S$  é um subconjunto próprio e não nulo de  $V(Q)$ , temos que  $S$  consiste de precisamente dois vértices, um deles,  $u$ , em  $U_1$ , e o outro,  $w$ , em  $W_1$ . Então,  $uw$  é uma aresta de  $Q$  e também uma aresta de  $G_1 - X$ . Sendo assim,  $M_1 \cup \{uw\}$  é um emparelhamento perfeito de  $G_1 - X$ .

Em todos os três casos, deduzimos que  $G_1 - X$  tem um emparelhamento perfeito. Esta conclusão vale para todo conjunto  $X$  que consista de dois vértices em  $U_1$  e dois vértices em  $W_1$ . Como  $G_1$  tem seis ou mais vértices, e  $|U_1| = |W_1|$ , temos, pelo Teorema 2.3.8, que  $G_1$  é uma presilha. Analogamente, cada uma das parcelas é uma presilha. A prova da parte “somente se” está completa.

prova do (ii):

Suponha que cada parcela  $G_i$  é uma presilha, e que  $G$  não é presilha. Seja  $C_X := \partial_G(X)$  um corte justo não trivial de  $G$ . Determinaremos agora algumas propriedades da praia  $X$  de  $C_X$ . Pelo Lema 2.3.5, podemos definir  $A := X \cap U$  e  $B := X \cap W$ , onde  $|A| = |B| - 1$  e cada vértice de  $A$  é adjacente somente a vértices de  $B$  em  $G$ . Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , seja  $X_i := X \cap V(G_i)$ ,  $A_i := A \cap V(G_i)$  e  $B_i := B \cap V(G_i)$ . Sejam

$$\begin{aligned} I &:= \{i : 1 \leq i \leq n, A_i - V(Q) \neq \emptyset\}, \\ J &:= \{j : 1 \leq j \leq n, B_j - V(Q) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Seja  $i$  um índice de  $I$ . Ajuste a notação de forma que  $A \subseteq U$ , e portanto  $A_i \subseteq U_i$ . Todo vértice de  $A$  é adjacente em  $G$  somente a vértices de  $B$ . Portanto, cada vértice de  $A_i - V(Q)$  é adjacente em  $G_i$  somente a vértices de  $B_i$ . Como  $i$  está em  $I$ ,  $A_i - V(Q)$  é um subconjunto não nulo de  $U_i$ . Além disso,  $U_i$  contém dois vértices em  $V(Q)$ . Portanto,  $|A_i - V(Q)| \leq |U_i| - 2$ . Pela hipótese,  $G_i$  é uma presilha. Portanto, pelo Teorema 2.3.8,  $|N_{G_i}(A_i - V(Q))| \geq |A_i - V(Q)| + 2$ . Por outro lado, como  $A$  é a parte minoritária

de  $X$ , todo vizinho de vértice em  $A_i - V(Q)$  está em  $X$ , de acordo com o Lema 2.3.5. Sendo assim,  $N_{G_i}(A_i - V(Q)) \subseteq B_i$ . Desta forma,  $|B_i| \geq |A_i - V(Q)| + 2$ , e portanto  $|A_i - V(Q)| \leq |B_i| - 2$ . Ou, em outras palavras,

$$|A_i - V(Q)| \leq |B_i - V(Q)| - 2 + |B \cap V(Q)| \quad (\forall i \in I). \quad (3.1)$$

O somatório da desigualdade 3.1 para todo  $i$  em  $I$  resulta em:

$$|A - V(Q)| \leq \sum_{i \in I} |B_i - V(Q)| - |I|(2 - |B \cap V(Q)|). \quad (3.2)$$

Considerando que pelo menos  $|J - I|$  vértices de  $B$  não estão presentes no conjunto  $\bigcup_{i \in I} B_i - V(Q)$ , temos que:

$$\sum_{i \in I} |B_i - V(Q)| \leq |B - V(Q)| - |J - I|. \quad (3.3)$$

A soma de 3.2 e 3.3 resulta em:

$$|A - V(Q)| \leq |B - V(Q)| - |J - I| - |I|(2 - |B \cap V(Q)|), \quad (3.4)$$

que é equivalente a

$$|A - V(Q)| \leq |B| - 2 - |J - I| - (|I| - 1)(2 - |B \cap V(Q)|). \quad (3.5)$$

A substituição de  $|B|$  por  $|A| + 1$  e a troca de lado de  $|A|$  em 3.5 resulta em:

$$|A - V(Q)| - |A| \leq -1 - |J - I| - (|I| - 1)(2 - |B \cap V(Q)|). \quad (3.6)$$

A inversão de sinal e a troca de  $|A| - |A - V(Q)|$  por  $|A \cap V(Q)|$  resulta em:

$$|A \cap V(Q)| \geq 1 + |J - I| + (|I| - 1)(2 - |B \cap V(Q)|). \quad (3.7)$$

Se o conjunto  $I$  é vazio, então  $A$  é um subconjunto (não vazio) de  $V(Q)$ . Se o conjunto  $I$  não é vazio, então o lado direito da desigualdade 3.7 é estritamente positivo, pois  $2 - |B \cap V(Q)|$  é não negativo. Em ambos os casos,  $A$  contém um ou dois vértices em  $V(Q)$ . Este fato tem duas consequências importantes. A primeira é que  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ . Isto se deve ao fato de que cada vértice  $q$  de  $V(Q)$  é adjacente a pelo menos um vértice de  $V(G_i) - V(Q)$ , para toda parcela  $G_i$ . Pelo Corolário 2.3.13 aplicado a  $G_i - (V(Q) - q)$ , o grafo  $G_i - (V(Q) - q)$  é conexo, para todo  $q \in V(Q)$ . Sendo assim, o vértice de  $A$  em  $V(Q)$  tem vizinho em  $B_i - V(Q)$ , para toda parcela  $G_i$ . Portanto,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ , e  $|J - I| = n - |I|$ . Desta igualdade com a desigualdade 3.7, temos que:

$$|A \cap V(Q)| \geq n + |I| + |B \cap V(Q)| - 1. \quad (3.8)$$

A segunda consequência do fato de  $A \cap V(Q)$  ser não vazio é que a mesma conclusão vale para a outra praia de  $C_X$ . Ou seja,  $\bar{X}$  também contém um vértice minoritário em  $V(Q)$ . Portanto,  $|B \cap V(Q)| \leq 1$ . Em resumo,  $A \cap V(Q)$  não é vazio mas  $B$  não contém vértice em  $V(Q)$ . Portanto,  $G$  não é uma 4-soma completa. Sendo assim, o teorema é válido quando  $n = 2$ .

Suponha que  $n \geq 3$ . De 3.8 deduzimos que  $|A \cap V(Q)| \geq 2 + |I|$ . Sendo assim,  $I$  é o conjunto vazio, caso contrário  $|A \cap V(Q)| \geq 3$ , uma contradição. Como  $I$  é vazio, a desigualdade 3.8 implica que:

$$|A \cap V(Q)| \geq n + |B \cap V(Q)| - 1.$$

Como  $n \geq 3$ , temos que

$$|A \cap V(Q)| = 2, \quad |B \cap V(Q)| = 0 \quad \text{e} \quad n = 3.$$

Nossa tarefa se resume, agora, a provar que a 4-soma é fina e que todas parcelas são  $K_{3,3}$ . Caso dois vértices de  $Q$  sejam adjacentes em  $G$ , temos que um deles está em  $A$ , pois  $|A \cap V(Q)| = 2$ . Conseqüentemente, o outro estará em  $B$ . No entanto,  $|B \cap V(Q)| = 0$ , uma contradição. De fato,  $G$  não tem aresta cujos dois extremos estejam em  $V(Q)$ . Portanto,  $G$  é 4-soma fina.

Para provarmos que cada parcela é um  $K_{3,3}$ , usaremos o fato de que, como  $I$  é vazio, o conjunto  $A$  está inteiramente contido em  $V(Q)$ . Sendo assim,  $|A| = 2$ , e portanto  $|B| = 3$ . Sejam  $A' := U - X$ , e  $B' := W - X$ . Os argumentos aplicados aqui sobre  $X$  podem ser aplicados à outra praia de  $C_X$ :  $\bar{X}$ . Sendo assim,  $|B'| = 2$  e  $|A'| = 3$ . Note que  $U = A \cup A'$  e  $W = B \cup B'$ . Sendo assim, deduzimos que  $|U| = 5 = |W|$ , e  $|V(G)| = 10$ . Sabemos que  $V(G_i) - V(Q)$  tem o mesmo número de vértices em  $U$  e em  $W$ . Portanto,  $|V(G_i) - V(Q)| \geq 2$ , para toda parcela  $G_i$ . No entanto, quatro vértices de  $G$  estão em  $Q$ . Portanto,  $n = 3$ , e cada parcela  $G_i$  tem precisamente seis vértices. A única presilha de seis vértices é o  $K_{3,3}$ . De fato,  $G$  é uma 4-soma fina, e todas suas parcelas são  $K_{3,3}$ 's, quando  $G$  não é presilha. Portanto, se  $G$  não é presilha,  $G$  é o grafo  $H_{10}$ .  $\square$

### COROLÁRIO 3.1.2

*Seja  $G$  uma presilha que é uma  $(Q, R)$ -soma dos grafos de uma coleção  $\mathcal{G}$  de grafos bipartidos. Para cada sub-coleção  $\mathcal{G}'$  de  $\mathcal{G}$  e para cada superconjunto  $R'$  de  $R$ , a  $(Q, R')$ -soma  $G'$  dos grafos em  $\mathcal{G}'$  é um subgrafo conforme de  $G$ .*

Demonstração: Cada parcela de  $G'$  também é uma parcela de  $G$ . Além disso, o conjunto de arestas  $E(Q) - R'$ , que é o conjunto de arestas de  $G'$  em  $Q$ , é um subconjunto de  $E(Q) - R$ , que é o conjunto de arestas de  $G$  em  $Q$ . Portanto,  $G'$  é um subgrafo de  $G$ . Para provar que  $G'$  é conforme em  $G$ , seja  $S$  uma parcela em  $\mathcal{G}$ . Por hipótese, cada parcela

de  $\mathcal{G}$  é bipartido. Além disso,  $G$  é uma presilha. Pelo Teorema 3.1.1,  $S$  é uma presilha. Como  $Q$  é um quadrilátero de  $S$ , ele tem precisamente dois vértices em cada parte da bipartição de  $S$ . Como  $S$  é presilha, temos que  $S - V(Q)$  tem emparelhamento perfeito, pelo Teorema 2.3.8. Esta conclusão vale para cada parcela  $S$  em  $\mathcal{G}$ . O grafo  $G - V(G')$  é união disjunta dos grafos  $S - V(Q)$  para todo  $S$  que está em  $\mathcal{G} - \mathcal{G}'$ . Portanto,  $G - V(G')$  tem emparelhamento perfeito. Portanto,  $G'$  é subgrafo conforme de  $G$ .  $\square$

## 3.2 Presilha Pfaffianas e 4-Somas

### TEOREMA 3.2.1

*Seja  $G$  uma  $(Q, R)$ -soma de  $n \geq 2$  grafos bipartidos. Se a 4-soma é completa ou se  $n \geq 3$ , então  $G$  é uma presilha Pfaffiana se e somente se cada parcela é uma presilha Pfaffiana.*

Demonstração: Sejam  $G_1, G_2, \dots, G_n$  as  $n$  parcelas de  $G$ , e  $Q := (a, b, c, d, a)$  seu quadrilátero comum.

“parte somente se”:

Suponha que  $G$  é uma presilha Pfaffiana. Mostraremos que cada parcela  $G_i$  é uma presilha Pfaffiana. Pelo Teorema 3.1.1, cada parcela  $G_i$  é uma presilha. Provaremos, por indução em  $|R|$ , que cada parcela é Pfaffiana. Primeiramente, considere o caso em que  $G$  é uma 4-soma completa das  $n$  parcelas. Nesse caso,  $R$  é vazio. Portanto, pelo Corolário 3.1.2,  $G_i$  é subgrafo conforme de  $G$ . Sendo assim, pelo Corolário 1.2.4,  $G_i$  é Pfaffiano. Esta conclusão vale para toda parcela  $G_i$  de  $G$ , se  $G$  é uma 4-soma completa das  $n$  parcelas.

Podemos, portanto, supor que  $R$  não é vazio. Por hipótese,  $n \geq 3$ . Sejam  $e$  uma aresta de  $R$ , e  $S := R - e$ . Seja  $H$  a  $(Q, S)$ -soma dos  $n$  parcelas. O grafo  $H$ , que é igual a  $G + e$ , é uma presilha pelo Corolário 2.3.11. Nossa tarefa se resume a provar que  $H$  é Pfaffiano, pois uma vez tendo isso provado, pela hipótese de indução cada parcela é Pfaffiana. Seja  $D(G)$  uma orientação Pfaffiana de  $G$ . Seja  $D(H)$  uma extensão de  $D(G)$  que atribui uma orientação qualquer a  $e$ . Seja  $s$  o sinal em  $D(G)$  de todos os emparelhamentos perfeitos de  $G$ . Se todos os emparelhamentos perfeitos de  $H$  que contém  $e$  tem sinal  $s$ , então  $D(H)$  é Pfaffiano. Se todos os emparelhamentos perfeitos de  $H$  que contém  $e$  tem sinal  $-s$  em  $D(H)$ , então  $D(H) \oplus e$  é Pfaffiano. Em ambos os casos,  $H$  é Pfaffiano.

Podemos, portanto, supor que  $H$  tem dois emparelhamentos perfeitos  $M$  e  $N$ , ambos contendo  $e$ , tal que o sinal de  $M$  é igual a  $s$  e o sinal de  $N$  é igual a  $-s$ . Pelo Lema 1.2.2, o grafo  $H$  tem um circuito  $M, N$ -alternado  $C$  cuja orientação em  $D(H)$  é par. Como  $e$  pertence a  $M$ , no máximo dois vértices de  $Q$  estão emparelhados por  $M$  com vértices de fora de  $Q$ . Além disso,  $V(G_i) - V(Q)$  tem o mesmo número de vértices em cada parte de

sua bipartição. Portanto, no máximo um conjunto  $\partial(V(G_i) - V(Q))$  tem aresta em  $M$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Analogamente, no máximo um conjunto  $\partial(V(G_j) - V(Q))$  tem aresta em  $N$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Como  $n \geq 3$ , existe um  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $\partial(V(G_k) - V(Q))$  não tem aresta em  $M \cup N$ . Ajuste a notação de forma que  $\partial(V(G_1) - V(Q))$  não tenha aresta em  $M \cup N$ . Sendo assim,  $C$  não tem vértice em  $V(G_1) - V(Q)$ .

Ajuste a notação de forma que  $e = ab$ . Sendo assim, como  $e \in M \cap N$ , temos que  $\partial(V(G_1) - \{c, d\})$  não tem aresta em  $M \cup N$ . Pelo Corolário 2.3.13,  $G_1 - b - c - d$  é conexo. Portanto, existe uma aresta  $f$  com um extremo em  $a$  e o outro em  $V(G_1) - V(Q)$ . Seja  $M'_1$  um emparelhamento perfeito de  $G_1$  que contém  $cd$  e  $f$ . O emparelhamento  $M_1 := M'_1 - cd$  satura todos os vértices de  $V(G_1) - \{c, d\}$  e não contém  $e$ . Além disso, sabemos que  $\partial(V(G_1) - \{c, d\})$  não tem aresta em  $M \cup N$ , e que  $C$  não tem vértice em  $V(G_1) - V(Q)$ . Portanto,  $M' := (M \cap E(G[V(G) - V(G_1) + c + d])) \cup M_1$  é emparelhamento perfeito de  $V(G)$ , tal que  $C$  é  $M'$ -alternado, e  $e$  não está em  $M'$ . Então,  $M'$  é emparelhamento perfeito de  $G = H - e$ . Dessa forma,  $C$  é circuito alternado de  $G$ , cuja orientação em  $D(G)$  é par. Isto é uma contradição à hipótese de que  $D(G)$  é Pfaffiana. De fato,  $H$  é Pfaffiano. Sendo assim, a afirmação segue por indução.

“parte se”:

Suponha que cada parcela  $G_i$  é uma presilha Pfaffiana. O grafo  $K_{3,3}$  não é Pfaffiano. Portanto, nenhuma parcela  $G_i$  é isomorfa ao  $K_{3,3}$ , mesmo desconsiderando-se arestas múltiplas. Pela hipótese, ou  $G$  é uma soma completa, ou  $n \geq 3$ . Sendo assim, pelo Teorema 3.1.1,  $G$  é presilha. A soma completa  $G^*$  das  $n$  parcelas também é presilha, pelo Corolário 2.3.11. O grafo  $G$  é subgrafo conforme de  $G^*$ . Portanto, pelo Corolário 1.2.4, para provarmos que  $G$  é Pfaffiano, basta provar que  $G^*$  é Pfaffiano.

Seja  $D(Q)$  a orientação Pfaffiana de  $Q$ , tal que a única aresta de  $Q$  que discorda do sentido  $(a, b, c, d, a)$  é a aresta  $ad$ . Pelo Teorema 2.4.5, para cada parcela  $G_i$ , existe orientação Pfaffiana  $D(G_i)$  de  $G_i$ , tal que  $D(G_i)$  restrito a  $E(Q)$  é igual a  $D(Q)$ . Seja  $D(G^*)$  a união de  $D(G_i)$ , para toda parcela  $G_i$ . Mostraremos, a seguir, que  $D(G^*)$  é Pfaffiana.

Seja  $N$  a extensão de  $\{ab, cd\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G^*$ . Seja  $N'$  o emparelhamento  $N \oplus E(Q)$ . Como  $D(Q)$  é Pfaffiana e  $D(G^*)$  estende  $D(Q)$ , temos que os sinais de  $N$  e  $N'$  são iguais em  $D(G^*)$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito qualquer de  $G^*$ . Mostraremos que  $D(G^*)$  é Pfaffiana, provando que os sinais de  $M$  e de um dentre  $N$  e  $N'$  em  $D(G^*)$  são iguais, para todo  $M$ .

Se todo circuito  $M, N$ -alternado é circuito de uma parcela  $G_i$ , então todos os circuitos  $M, N$ -alternados tem orientação ímpar em  $D(G_i)$ , pois  $D(G_i)$  é Pfaffiana. Lembremos que  $D(G^*)$  é a união dos  $D(G_i)$ , para toda parcela  $G_i$ . Sendo assim, pelo Lema 1.2.2 os sinais de  $M$  e  $N$  são iguais em  $D(G^*)$ .

Nesse caso, podemos supor que existe um circuito  $C$  de  $G^*$  que é  $M, N$ -alternado, tal que  $C \cap \partial(V(G_i) - V(Q))$  não é nulo para pelo menos duas parcelas  $G_i$  distintas. Vide Figura 3.2. No entanto,  $V(G_i) - V(Q)$  tem o mesmo número de vértices em cada parte da bipartição. Portanto, se  $M$  tem uma aresta em  $\partial(V(G_i) - V(Q))$ ,  $M$  tem pelo menos duas arestas em  $\partial(V(G_i) - V(Q))$ , para qualquer parcela  $G_i$ . Além disso,  $N$  não tem aresta em  $\partial(V(G_i) - V(Q))$ . Sendo assim, como  $C$  é  $M, N$ -alternado,  $C$  tem aresta em  $\partial(V(G_i) - V(Q))$ , para precisamente duas parcelas  $G_i$  distintas. Vide Figura 3.2. Ajuste a notação de forma que  $G_1$  e  $G_2$  sejam estas parcelas. Sendo assim,  $C$  é o único circuito  $M, N$ -alternado não inteiramente contido em uma parcela. Portanto, todos os outros circuitos  $M, N$ -alternados tem orientação ímpar em  $D(G^*)$ .

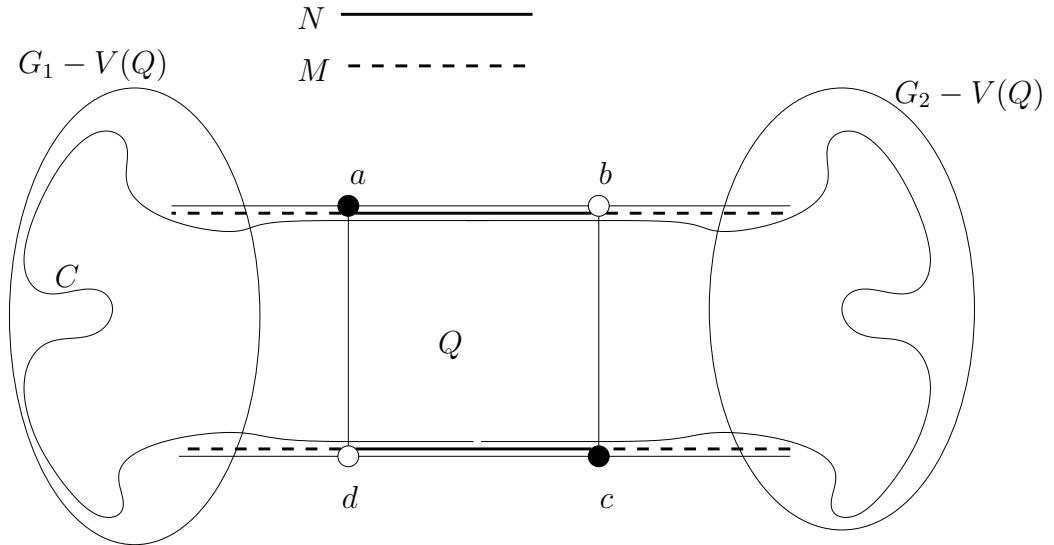


Figura 3.2: O caso em que existe circuito  $M, N$ -alternado com aresta em  $\partial(V(G_i) - V(Q))$ , para duas parcelas  $G_i$ .

Ajuste a notação de forma que uma aresta de  $C$  tenha um extremo em  $a$  e outro extremo em  $V(G_1) - V(Q)$ . Como  $C$  não está inteiramente contido em  $G_1$ , a segunda aresta de  $C$  em  $\partial(V(G_1) - V(Q))$  tem seu extremo em  $d$ . Analogamente, as arestas de  $C$  em  $\partial(V(G_2) - V(Q))$  tem seus extremos em  $b$  e  $c$ . Vide Figura 3.2. Considere o conjunto  $\mathcal{C}' := M \oplus N'$ . O circuito  $C$  é o único circuito  $M, N$ -alternado que contém vértice de  $Q$ . Portanto, como  $N' = N \oplus E(Q)$ , todos os circuitos  $M, N$ -alternados distintos de  $C$  estão em  $\mathcal{C}'$ . Além disso, os únicos circuitos de  $\mathcal{C}'$  que não são  $M, N$ -alternados são os circuitos de  $C \oplus E(Q)$ . O emparelhamento  $N'$  contém  $\{ad, bc\}$ . Portanto, como as arestas de  $C$  em  $\partial(V(G_1) - V(Q))$  tem seus extremos em  $a$  e  $d$ , um dos circuitos de  $C \oplus E(Q)$  está inteiramente contido em  $G_1$ . Analogamente, como as arestas de  $C$  em  $\partial(V(G_2) - V(Q))$

tem seus extremos em  $b$  e  $c$ , o outro circuito de  $C \oplus E(Q)$  está inteiramente contido em  $G_2$ . Desta forma, todos os circuitos de  $M, N'$ -alternados estão inteiramente contidos em alguma parcela  $G_i$ . Portanto, os sinais de  $M$  e  $N'$  são iguais em  $D(G^*)$ .  $\square$



# Capítulo 4

## O Teorema Principal

### 4.1 Demonstração do Teorema Principal

Já vimos que o grafo de Heawood é uma presilha Pfaffiana e não planar. O resultado a seguir mostra que o grafo de Heawood é irredutível.

LEMA 4.1.1

*O grafo de Heawood é irredutível.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o grafo de Heawood,  $H_{14}$ , é redutível. Pelo Lema 2.5.11,  $H_{14}$  é uma presilha Pfaffiana. Pelo Teorema 3.2.1, cada parcela de  $H_{14}$  é uma presilha Pfaffiana. A única presilha de seis vértices é o  $K_{3,3}$ , que não é Pfaffiano. Portanto, cada parcela de  $H_{14}$  tem pelo menos oito vértices. Seja  $n$  o número de parcelas. Então,  $n \geq 3$ . Portanto,

$$14 = |V(H_{14})| \geq 8n - 4(n - 1) = 4n + 4 \geq 16.$$

Isto é uma contradição. □

Assim, o grafo de Heawood é uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar.

Nosso objetivo neste capítulo é provar que o grafo de Heawood é a única presilha simples, Pfaffiana, irredutível e não planar. Chamaremos de *spin* uma presilha Simples Pfaffiana Irredutível e Não planar. Assim, provaremos que o grafo de Heawood é o único spin.

TEOREMA 4.1.2 (TEOREMA PRINCIPAL)

*Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar. Então,  $G$  é o grafo de Heawood.*

Demonstração do Teorema Principal: Suponha que  $G$  seja um spin. Nossa tarefa é demonstrar que  $G$  é o grafo  $H_{14}$ , o grafo de Heawood. Um grafo  $H$  é *menor* que  $G$  se:

- $|V(H)| < |V(G)|$ , ou
- $|V(H)| = |V(G)|$  e  $|E(H)| < |E(G)|$ .

A demonstração é feita por indução. Adotaremos como hipótese de indução que se  $H$  é um spin menor que  $G$ , então  $H = H_{14}$ . Usaremos três importantes lemas, enunciados a seguir, cujas provas encontram-se em capítulos subseqüentes.

### 4.1.1 Os Três Lemas

LEMA 4.1.3 (LEMA DO GRAFO DE HEAWOOD NÃO CONTIDO)

Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana, e uma aresta de  $G$ . Então, nenhuma presilha de  $G - e$  é isomorfa ao grafo de Heawood, mesmo desconsiderando-se arestas múltiplas.

LEMA 4.1.4 (LEMA DA HERANÇA DA REDUTIBILIDADE)

Seja  $G$  um spin, e uma aresta de  $G$ , e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que  $G$ , e se (i) o grafo  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se (ii) a aresta  $e$  é magra, então  $H$  é irredutível.

LEMA 4.1.5 (LEMA DA NÃO PLANARIDADE DAS CONTRAÇÕES)

Seja  $G$  uma presilha Pfaffiana e irredutível e  $e$  uma aresta de  $G$ . Seja  $C := \partial_G(X)$  um corte de  $G$  tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Se  $G - e$  não é planar, e  $|\overline{X}| \leq 5$ , então a contração  $(G - e)\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\}$  não é planar.

COROLÁRIO 4.1.6

Seja  $G$  um spin, e  $e$  uma aresta de  $G$ . Então,  $G - e$  não é planar.

O Lema do Grafo de Heawood Não Contido será demonstrado no Capítulo 5. O Lema da Herança da Redutibilidade será demonstrado no Capítulo 6. Finalmente, no Capítulo 7, será provado o Lema da Não Planaridade das Contrações.

### 4.1.2 O Grafo Furtivo

Mostraremos agora que se  $G$  é um spin, então  $G$  é o grafo de Heawood. A prova está organizada da seguinte forma. Inicialmente, mostraremos que  $G - e$  não é planar. Em seguida, veremos que toda aresta magra  $e$  de  $G$  tem índice 2, e todas as presilhas de  $G - e$  são planares. Depois, utilizando o Teorema de McCuaig (2.3.27), mostraremos que  $G$  tem uma aresta verdadeiramente magra  $e$ . Definiremos  $H$  como a presilha interna de

$G - e$ . Em seguida, baseando-nos no Teorema de McCuaig e no Lema da Não Planaridade das Contrações, mostraremos que se  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $G$  é o grafo de Heawood. Finalmente, mostraremos que  $H$ , de fato, não tem aresta verdadeiramente magra, provando assim o Teorema Principal, a menos dos três lemas da seção anterior.

#### LEMA 4.1.7

Seja  $J$  uma presilha simples Pfaffiana não planar,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $J$ . Então  $J - e$  não é planar.

Demonstração: Suponha que  $J - e$  seja planar. Seja  $\tilde{K}$  uma imersão planar de  $J - e$ . Seja  $\tilde{F}$  a face de  $\tilde{K} - x_0$  que contém  $x_0$  em  $\tilde{K}$ . Toda presilha com no máximo quatro vértices é planar. Portanto,  $J$  tem pelo menos seis vértices. Então, pelo Corolário 2.3.14,  $J$  é 3-conexo. Sendo assim,  $J - x_0$  é 2-conexo. Dessa forma, pelo Lema 2.6.2,  $\tilde{F}$  é delimitada por um circuito  $F$ . O vértice  $y_0$  não está em  $F$ , caso contrário  $J$  seria planar, contradição. O grafo  $J - x_0 - y_0$  é coberto por emparelhamentos, de acordo com o Corolário 2.3.9. Ademais,  $\tilde{F}$  é uma face de  $\tilde{K} - x_0 - y_0$ , delimitada por  $F$ . Portanto, pelo Lema 2.6.3,  $F$  é conforme em  $J - x_0 - y_0$ . Sendo assim,  $F$  é conforme em  $J$ , devido à aresta  $e$ . Por outro lado,  $x_0$  é isolado em  $\tilde{K}$  por  $F$ . Seja  $D$  uma orientação Pfaffiana de  $J$ . A orientação  $D - e$  de  $J - e$  é Pfaffiana. Portanto, pelo Corolário 2.6.5, a orientação de  $F$  em  $D - e$  é par. Logo, ela é par em  $D$ . Em resumo,  $F$  tem orientação par em  $D$  e é conforme em  $J$ . Isto é uma contradição à hipótese de que  $D$  é Pfaffiana. De fato,  $J - e$  não é planar.  $\square$

#### LEMA 4.1.8

Seja  $e$  uma aresta de  $G$ , e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Se  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se  $e$  é magra, então  $H$  é planar.

Demonstração: Seja  $H_0$  o grafo simples subjacente de  $H$ . Pelo Teorema 2.4.7,  $H_0$  é Pfaffiano. Pela hipótese de indução adotada, o Teorema Principal vale para todo grafo menor que que  $G$ . Portanto, de acordo com o Lema da Herança da Redutibilidade,  $H_0$  é irredutível. Então,  $H_0$  ou é um spin ou é planar. Pela hipótese de indução adotada,  $H_0$  é um spin somente se  $H_0$  é o grafo de Heawood. De acordo com o Lema do Grafo de Heawood Não Contido,  $H_0$  não é o grafo de Heawood. Portanto,  $H_0$  não é um spin. Sendo assim,  $H_0$  é planar. Logo,  $H$  é planar.  $\square$

#### LEMA 4.1.9

Toda aresta magra  $e$  de  $G$  tem índice igual a 2, e a presilha interna de  $G - e$  é planar.

Demonstração: Seja  $e$  uma aresta magra de  $G$ , e seja  $H$  a presilha obtida de  $G - e$  por bicontrações. Pelo Lema 4.1.8,  $H$  é planar. Seja  $r$  o índice de  $e$ . Vamos mostrar que  $r$  é

dois. Pelo Lema 4.1.7,  $G - e$  não é planar. Portanto,  $G - e$  não é  $H$ . Então,  $r$  é distinto de 0. Sendo assim,  $G$  tem um corte  $C := \partial_G(X)$ , tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ , e  $|\overline{X}| = 3$ . Pelo Lema da Não Planaridade das Contrações, a  $(C - e)$ -contração  $L := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$  de  $G - e$  não é planar. Logo,  $L$  não é  $H$ . Então,  $r$  não é 1. Portanto, o índice de  $e$  é igual a 2. Nesse caso,  $H$  é a presilha interna de  $G - e$  e é planar.  $\square$

Mostraremos agora que  $G$  tem uma aresta verdadeiramente magra. Para tanto, de acordo com o Teorema de McCuaig (2.3.27), basta provar que  $G$  nem é uma escada de Möbius bipartida, nem é um prisma bipartido e nem é uma roda dupla. Os prismas e as rodas duplas são planares. As escadas de Möbius bipartidas não são Pfaffianas, pelo Lema 2.3.32. Como  $G$  é Pfaffiano e não planar, temos que  $G$  tem uma aresta verdadeiramente magra.

Seja  $e := x_0y_0$  uma aresta verdadeiramente magra de  $G$ . A aresta  $e$  tem índice 2, de acordo com o Lema 4.1.9. Então, sejam  $X := \{x_0, x_1, x_2\}$  e  $Y := \{y_0, y_1, y_2\}$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são os (únicos) vizinhos de  $x_0$  em  $G - e$ , e  $y_1$  e  $y_2$  são os (únicos) vizinhos de  $y_0$  em  $G - e$ . Sejam  $C(X) := \partial_G(X)$  e  $C(Y) := \partial_G(Y)$ . Note que tanto  $C(X) - e$  como  $C(Y) - e$  são justos em  $G - e$ . Vide Figura 4.1.

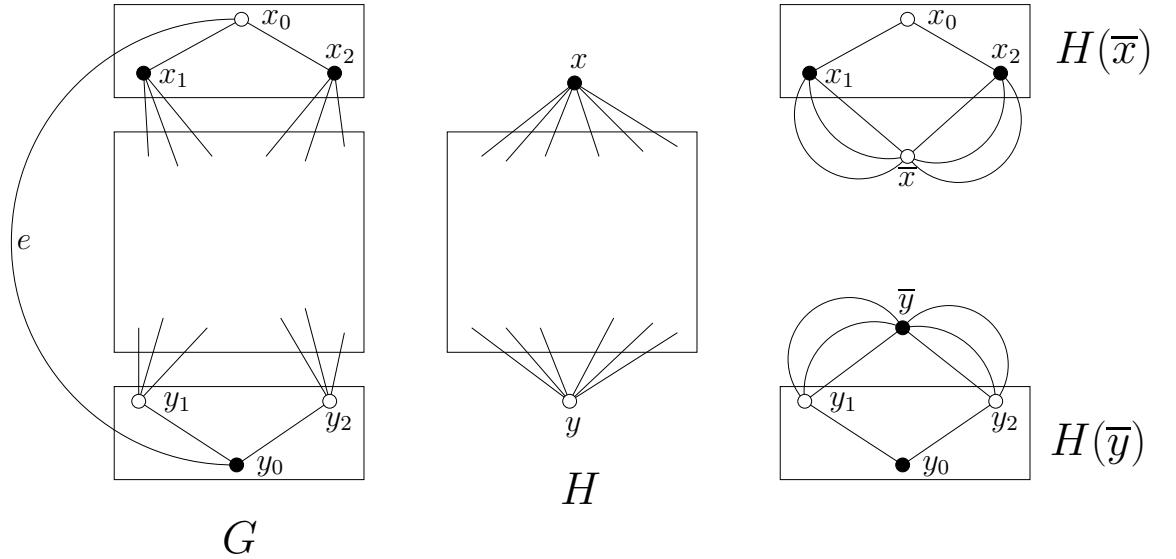


Figura 4.1: Os grafos  $G$ ,  $H$ ,  $H(\overline{x})$  e  $H(\overline{y})$ .

Neste caso, temos que  $H := (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ ,  $H(\overline{x}) := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ , e  $H(\overline{y}) := (G - e)\{\overline{Y} \rightarrow \overline{y}\}$  são as presilhas de  $G - e$ . Note que  $H$  é a única presilha com dois vértices de contração. Sejam ainda  $H(x) := (G - e)\{X \rightarrow x\}$ , e  $H(y) := (G - e)\{Y \rightarrow y\}$ . Vide Figura 4.2. Em resumo,

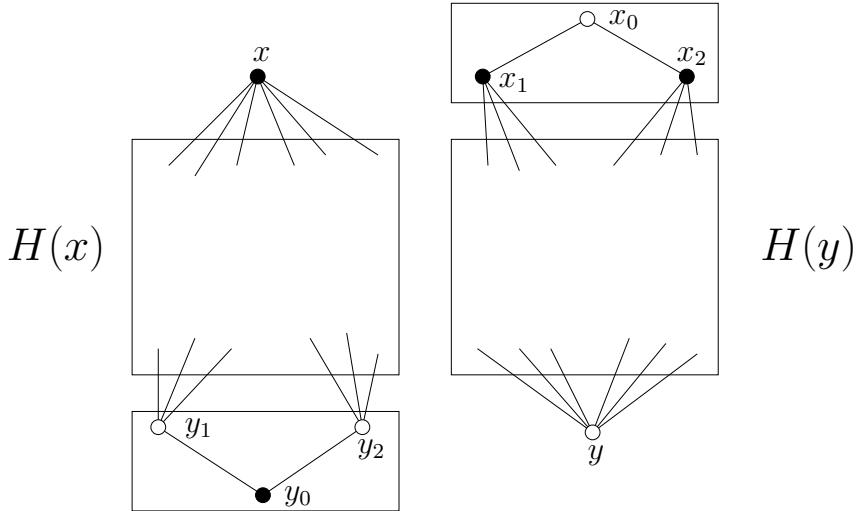


Figura 4.2: Os grafos \$H(x)\$ e \$H(y)\$.

## NOTAÇÃO 4.1.10

- \$X := \{x\_0, x\_1, x\_2\}\$ e \$C(X) := \partial\_G(X)\$;
- \$Y := \{y\_0, y\_1, y\_2\}\$ e \$C(Y) := \partial\_G(Y)\$;
- \$H := (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}\$;
- \$H(\bar{x}) := (G - e)\{\bar{X} \rightarrow \bar{x}\}\$ e \$H(\bar{y}) := (G - e)\{\bar{Y} \rightarrow \bar{y}\}\$;
- \$H(x) := (G - e)\{X \rightarrow x\}\$ e \$H(y) := (G - e)\{Y \rightarrow y\}\$.

## LEMA 4.1.11

O grafo \$H\$ tem dez ou mais vértices, e portanto \$G\$ tem pelo menos quatorze vértices.

Demonstração: Sabemos que \$H(x)\$ não é presilha, pois \$\partial(Y)\$ é um corte justo de \$H(x)\$. Pelo Lema 4.1.7, \$G - e\$ não é planar. Então, pelo Lema da Não Planaridade das Contrações, \$H(x)\$ não é planar. Todo grafo bipartido com menos de seis vértices é planar. O único grafo simples bipartido com seis vértices e não planar é o \$K\_{3,3}\$, uma presilha. Logo, \$H(x)\$ tem pelo menos oito vértices. Então, \$H\$ tem pelo menos seis vértices. No entanto, a única presilha simples com seis vértices é o \$K\_{3,3}\$, que não é planar. Sabemos que \$H\$ é planar. Sendo assim, \$H\$ tem mais de seis vértices.

Mostraremos agora que \$H\$ tem mais de oito vértices. O grafo \$H\$ é simples, planar, tem mais de seis vértices e não é 3-regular (os vértices de contração têm grau maior do que três). De acordo com o Lema 2.6.7, a única presilha simples planar com oito vértices

é o cubo, que é 3-regular. Portanto,  $H$  tem mais de oito vértices. De fato,  $H$  tem pelo menos dez vértices, e  $G$  tem pelo menos quatorze vértices.  $\square$

Como  $e$  é verdadeiramente magra, temos que  $H$  é simples. Sabemos que  $H$  é presilha planar, de acordo com o Lema 4.1.9. Além disso, de acordo com o Lema 4.1.11,  $H$  tem pelo menos dez vértices. Logo,  $H$  é 3-conexo, de acordo com o Corolário 2.3.14. Portanto, pelo Teorema de Whitney (2.6.6),  $H$  tem uma única imersão planar. Denotamos por  $\tilde{H}$  a única imersão planar de  $H$ .

Neste ponto, já mostramos que  $G$  tem uma aresta verdadeiramente magra  $e$ , e definimos  $H$  como a presilha interna de  $G - e$ . Sabemos também que  $H$  é planar. A seguir, provaremos um lema auxiliar e em seguida mostraremos, baseando-nos no Teorema de McCuaig e no Lema da Não Planaridade das Contrações, que se  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $G$  é o grafo de Heawood. E no final do capítulo, mostraremos, finalmente, que  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, fechando assim a prova do Teorema Principal, a menos dos três lemas da seção anterior. O lema seguinte, baseando-se no Lema da Não Planaridade das Contrações, mostra a existência da situação mostrada na Figura 4.3.

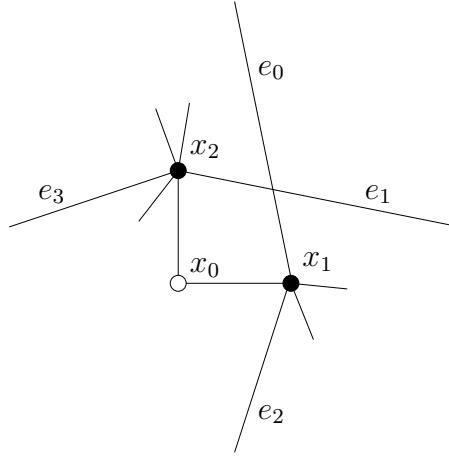
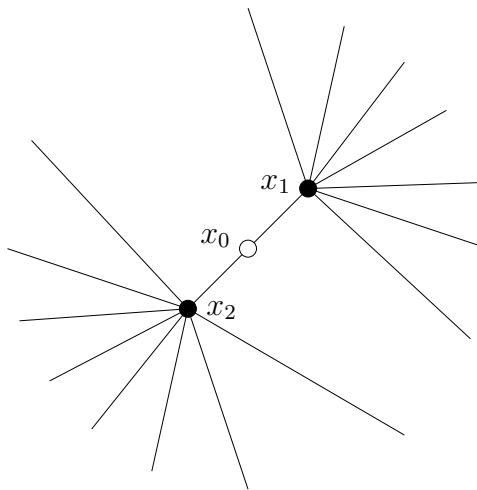


Figura 4.3: Um extensão de  $\tilde{H}$  a um desenho no plano do grafo  $H(y)$  que não é planar, como definido pelo Lema 4.1.12.

#### LEMA 4.1.12

As arestas de  $\partial_G(x_1) - x_1x_0$  não são contíguas na ordem cíclica de  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Vide Figura 4.3.

Demonstração: O grafo  $H$  é planar. Consideremos a ordem cíclica das arestas de  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Suponha, por absurdo, que as arestas de  $\partial_G(x_1) - x_1x_0$  sejam contíguas

Figura 4.4: A imersão planar  $\tilde{H}(y)$  da prova do Lema 4.1.12.

naquela ordem cíclica em  $\tilde{H}$ . Isto é, existe uma enumeração

$$(e_0, e_1, \dots, e_{r-1}, e_r, \dots, e_{s-1})$$

das arestas de  $\partial_H(x)$  tal que a enumeração indica a ordem cíclica ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$  e as arestas de  $\{e_0, e_1, \dots, e_{r-1}\}$  incidem em  $x_1$  em  $G$  e as arestas de  $\{e_r, \dots, e_{s-1}\}$  incidem em  $x_2$  em  $G$ . Lembremos que  $H(y) = (G - e)\{Y \rightarrow y\}$ . Note que  $H = H(y)\{X \rightarrow x\}$ . Assim,  $H(y)$  pode ser obtido a partir de  $H$  pela expansão de  $x$  ao caminho  $(x_1, x_0, x_2)$ . Neste caso, podemos obter uma imersão planar do grafo  $H(y)$ , a partir de  $\tilde{H}$ , pela expansão do vértice  $x$  ao caminho  $(x_1, x_0, x_2)$ . Vide Figura 4.4. No entanto,  $G - e$  não é planar, pelo Lema 4.1.7. Então, pelo Lema da Não Planaridade das Contrações,  $H(y)$  não é planar, uma contradição. De fato, as arestas de  $\partial_G(x_1) - x_1x_0$  não são contíguas na ordem cíclica das arestas de  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ .  $\square$

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que há uma simetria entre  $x$  e  $y$ , e entre  $x_1$  e  $x_2$  e entre  $y_1$  e  $y_2$ . Portanto, analogamente ao enunciado do lema anterior, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas na ordem cíclica de  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ , as arestas de  $\partial_G(y_1) - y_1y_0$  não são contíguas na ordem cíclica de  $\partial_H(y)$  ao redor de  $y$  em  $\tilde{H}$  e as arestas de  $\partial_G(y_2) - y_2y_0$  não são contíguas na ordem cíclica de  $\partial_H(y)$  ao redor de  $y$  em  $\tilde{H}$ .

#### LEMA 4.1.13

*A aresta  $e$  não pertence a quadrilátero de  $G$  que tenha vértice de grau três não incidente em  $e$ .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $e$  pertença a quadrilátero  $Q$  de  $G$  que tenha vértice de grau três não incidente em  $e$ . Nesse caso, um vértice de  $\{x_1, x_2\}$  está em  $Q$  e um vértice de  $\{y_1, y_2\}$  está em  $Q$ . Ajustemos a notação de forma que  $x_1$  e  $y_1$  estejam em  $Q$ , e portanto sejam adjacentes. Pela hipótese de absurdo adotada, um dentre  $x_1$  e  $y_1$  tem grau três. Ajuste a notação de forma que  $x_1$  tenha grau três em  $G$ .

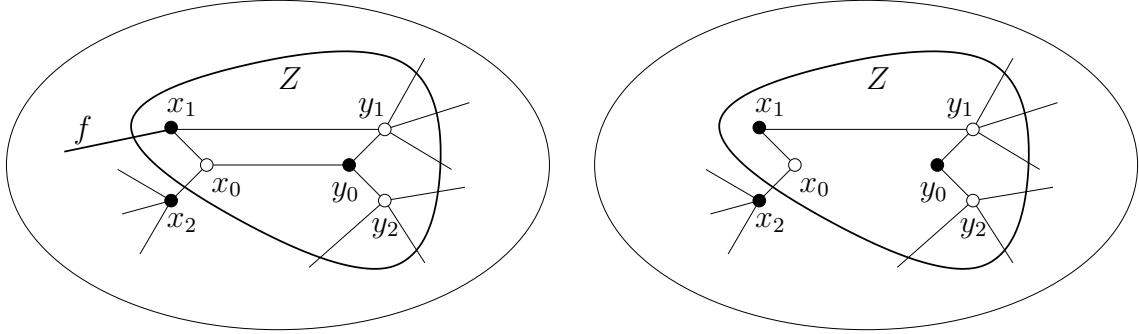


Figura 4.5: O caso  $x$  e  $y$  adjacentes em  $H$  com  $x_1$  de grau 3: à esquerda o grafo  $G$ , a aresta  $f$  e o conjunto  $Z$ ; à direita o grafo  $G - e - f$ .

Sendo assim,  $x_1$  tem no máximo um vizinho fora de  $Z := \{x_0, x_1, y_0, y_1, y_2\}$ . Observe que  $\{x_1, y_0\}$  é a parte minoritária de  $Z$ . Vide Figura 4.5. Seja  $f$  a aresta incidente em  $x_1$  distinta de  $x_1y_1$  e de  $x_1x_0$ . Então,  $x_1$  não tem vizinho fora de  $Z$  em  $G - f$ . Dessa forma,  $C(Z) := \partial_G(Z)$  é corte não trivial de  $G$ , tal que  $C(Z) - f$  é justo em  $G - f$ . Vamos obter uma contradição ao Lema da Não Planaridade das Contrações, mostrando que a  $(C(Z) - f)$ -contração  $H(z) := (G - f)\{Z \rightarrow z\}$  de  $G - f$  é planar.

A contração  $H(z)$  é igual à  $(C(Z) - f)$ -contração  $(G - e - f)\{Z \rightarrow z\}$ , pois ambos os extremos de  $e$  estão em  $Z$ . Além disso,  $(G - e - f)\{Z \rightarrow z\}$  é igual ao grafo  $(G - e - f)\{Y \rightarrow y\}\{\{y, x_1, x_0\} \rightarrow z\}$ . Entretanto,  $(G - e - f)\{Y \rightarrow y\}\{\{y, x_1, x_0\} \rightarrow z\}$  é isomorfo a  $(G - e - f)\{Y \rightarrow y\}\{X \rightarrow x\}$ , pois  $(y, x_1, x_0, x_2)$  é um  $P_4$  do grafo  $(G - e - f)\{Y \rightarrow y\}$ , cujos vértices internos têm grau dois em  $(G - e - f)\{Y \rightarrow y\}$ . Assim,  $H(z)$  é isomorfo a  $H - f = (G - e - f)\{Y \rightarrow y\}\{X \rightarrow x\}$ , e portanto planar. Como, de acordo com o Lema 4.1.7,  $G - e$  não é planar, temos uma contradição ao Lema da Não Planaridade das Contrações.  $\square$

#### LEMA 4.1.14

Se  $f$  for uma aresta verdadeiramente magra de  $H$  e se um extremo  $v$  de  $f$  tem grau três em  $G$ , então  $v$  não pertence a quadrilátero de  $G - f$ .

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista um extremo  $v$  de  $f = vu$ , de grau três em  $G$ , e que pertença a um quadrilátero  $Q = (v, r_1, t, r_2)$  de  $G - f$ . Vide Figura 4.6.

As arestas  $e$  e  $f$  não são adjacentes em  $G$ , pois  $f$  é uma aresta de  $H$ . A aresta  $e$  não está em  $E(Q)$ , pois senão  $Q$  seria um quadrilátero de  $G$  que contém  $e$  e contém o vértice  $v$  não incidente em  $e$  cujo grau é três, em contradição ao Lema 4.1.13. Portanto,  $Q$  é um quadrilátero de  $G - e - f$ . Além disso,  $e$  não incide em vértice de  $V(Q)$ , pois  $e$  é verdadeiramente magra de índice 2 em  $G$ .

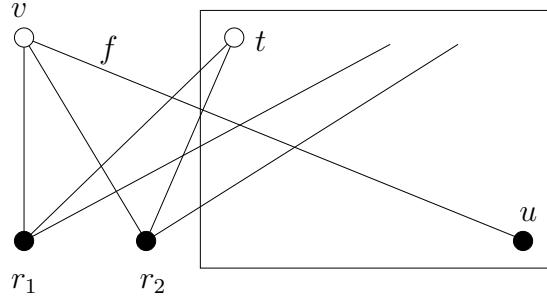


Figura 4.6: O grafo  $G$  quando um extremo  $v$  de  $f$  cujo grau é três pertence a um quadrilátero de  $G - f$ .

Chegaremos a uma contradição à escolha de  $f$  como aresta verdadeiramente magra, mostrando que  $f$  incide em um vértice de grau três de um quadrilátero de  $H - f$ . Mostraremos, inicialmente, que  $E(Q)$  induz um quadrilátero de  $H$ . Suponha que não. Então, como  $Q$  é quadrilátero de  $G - e - f$ , temos que dois vértices de  $V(Q)$  são contraídos a um único vértice de  $H$ . Os dois vértices pertencem a uma mesma parte da bipartição de  $G$  e são ambos adjacentes a um mesmo extremo de  $e$ . Isto implica que  $e$  não é verdadeiramente magra em  $G$ , uma contradição. De fato,  $E(Q)$  induz um quadrilátero  $Q_H$  de  $H$ .

Mostraremos agora que  $v$  é um vértice (de grau três) de  $Q_H$ . Suponha o contrário. Então,  $v$  está contraído em  $H$ . Sendo assim, ou  $v$  ou um vizinho de  $v$  é incidente em  $e$ . No entanto,  $v$  tem três vizinhos, dois deles ( $r_1$  e  $r_2$ ) estão em  $Q$ , e o outro ( $u$ ) é extremo de  $f$ . No entanto, vimos que  $e$  não pertence a  $Q$  e não incide em vértice de  $Q$ . Portanto, temos que  $e$  incide em  $u$ . Sendo assim,  $e$  é adjacente a  $f$ , uma contradição, pois  $f$  é aresta de  $H$ . De fato,  $v$  é um vértice (que não foi contraído) de  $H$ . Sendo assim, o grau de  $v$  em  $H$  é igual ao seu grau em  $G$ . Portanto,  $f$  incide no vértice  $v$  de grau três de  $H$  que pertence ao quadrilátero  $Q_H$  de  $H$ . Isto é uma contradição à escolha de  $f$  como verdadeiramente magra em  $H$ . De fato, se um extremo  $v$  de  $f$  tem grau três em  $G$ , então  $v$  não pertence a quadrilátero de  $G - f$ .  $\square$

Seja  $f$  uma aresta de  $G$ . O grafo  $G - f$  não é uma presilha, pois  $G$  não tem aresta magra de índice 0, de acordo com o Lema 4.1.9. Utilizaremos durante o restante da prova a decomposição em cortes justos de  $G - f$ . Para tanto, adotaremos a notação do

Lema 2.3.18. Sendo assim,  $\mathcal{C} := \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ , com  $r \geq 1$ , é o conjunto de cortes justos de uma decomposição em cortes justos de  $G - f$ . Além disso,  $X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r$  são subconjuntos de  $V(G)$ , tais que  $C_i = \partial_G(X_i) - f$ ,  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r \subset V(G)$  e o conjunto das presilhas de  $G - f$  é  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} G_i$ , onde  $G_i$  é um dentre:

- $G_0 := (G - f)\{\overline{X_1} \rightarrow \overline{x_1}\};$
- $G_i := (G - f)\{X_i \rightarrow X_i\}\{\overline{X_{i+1}} \rightarrow \overline{x_{i+1}}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ;
- $G_r := (G - f)\{X_r \rightarrow x_r\}.$

Vide Figura 4.7.

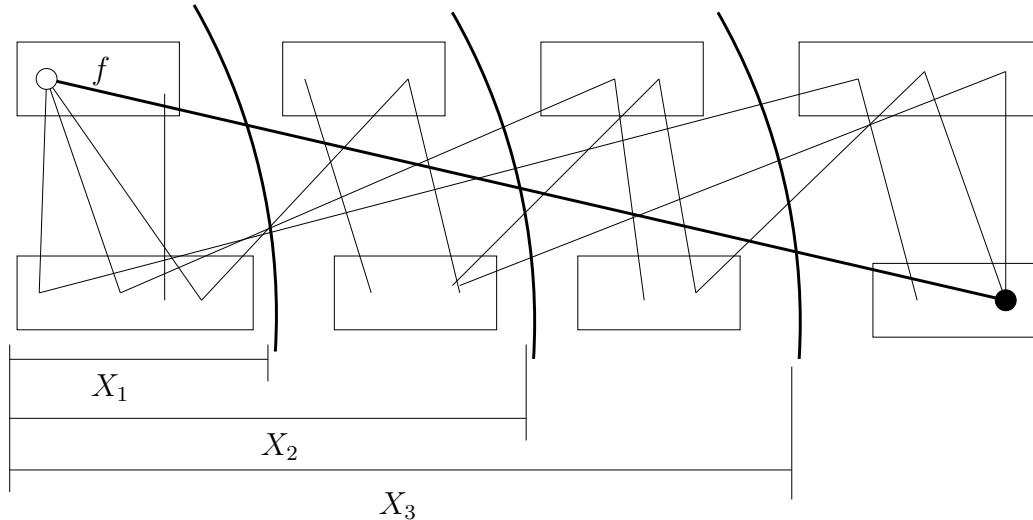


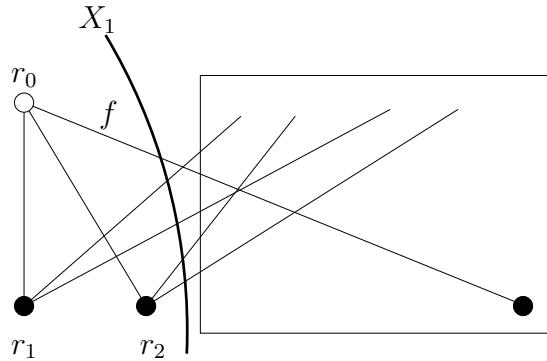
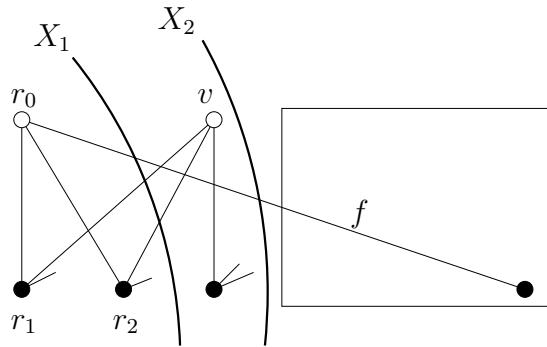
Figura 4.7: Um exemplo de decomposição em cortes justos de  $G - f$  com os cortes justos destacados.

#### LEMA 4.1.15

*Suponha que  $f$  seja uma aresta verdadeiramente magra de  $H$ , e que  $G_0$  tenha precisamente quatro vértices. Então,  $G_1$  tem mais de quatro vértices.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $G_0$  e  $G_1$  tenham ambos quatro vértices. Lembremos que estamos adotando a notação utilizada no Lema 2.3.18. Então  $X_1$  tem precisamente três vértices, e o extremo de  $f$  em  $X_1$ , digamos  $r_0$ , é o (único) vértice minoritário de  $X_1$ . Vide Figura 4.8. Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os demais vértices de  $X_1$ . Assim,  $G$  restrito a  $X_1$  é o grafo  $K_{1,2}$ .

Como  $G_1$  também tem apenas quatro vértices, então  $X_2 - X_1$  consiste de precisamente dois vértices, um em cada parte da bipartição de  $G$ . Vide Figura 4.9. Logo,  $|X_2| = 5$ , e  $r_0$  é

Figura 4.8: O grafo  $G$  quando a presilha  $G_0$  de  $G - f$  é um  $C_4$ .Figura 4.9: O grafo  $G$  quando ambas as presilhas  $G_0$  e  $G_1$  de  $G - f$  são  $C_4$ 's.

minoritário em  $X_2$ . Seja  $v$  o vértice minoritário de  $X_2$  distinto de  $r_0$ . Este vértice somente é adjacente em  $G$  a vértices da parte majoritária de  $X_2$ . Deduz-se que  $v$  é adjacente aos três vértices majoritários de  $X_2$ . Portanto,  $Q := (r_0, r_1, v, r_2)$  é um quadrilátero de  $G - f$ . Além disso, o extremo  $r_0$  de  $f$  em  $Q$  tem grau três, em contradição ao Lema 4.1.14. De fato,  $G_0$  e  $G_1$  não têm ambos quatro vértices.  $\square$

#### TEOREMA 4.1.16

Seja  $f$  uma aresta magra de  $H$ , tal que ou (i)  $f$  é verdadeiramente magra em  $H$ , ou (ii) o índice de  $f$  em  $G$  é menor do que 2. Então,  $f$  é uma aresta magra de  $G$ .

Demonstração: Seja  $i_G$  o índice de  $f$  em  $G$ , e  $i_H$  o índice de  $f$  em  $H$ . Seja  $b(G-f)$  o número de presilhas obtidas em uma decomposição em cortes justos de  $G - f$ . Analogamente, seja  $b(G - e - f)$  o número de presilhas obtidas em uma decomposição em cortes justos de  $G - e - f$ . Sabemos que  $b(G-f) \leq b(G-e-f)$ . Além disso,  $b(G-e-f) = 3 + i_H$ , pois  $G - e$  tem três presilhas (dois  $C_4$ 's e  $H$ ), e  $H - f$  tem  $1 + i_H$  presilhas. Por outro

lado, o índice de  $f$  em  $G$  é maior do que ou igual a  $i_H$ . Sendo assim, temos:

$$b(G - f) \leq b(G - e - f) = 3 + i_H \leq 3 + i_G. \quad (4.1)$$

#### LEMA 4.1.17

*O número de presilhas com mais de quatro vértices obtidas na decomposição em cortes justos de  $G - f$  é precisamente um.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que duas presilhas obtidas na decomposição em cortes justos de  $G - f$  tenham mais de quatro vértices. A aresta  $e$  é magra em  $G$ , e  $f$  é magra em  $H$ . De acordo com o Lema 4.1.11,  $G$  tem pelo menos quatorze vértices. Então,  $H$  tem pelo menos dez vértices, e precisamente uma presilha obtida na decomposição em cortes justos de  $H - f$  tem mais de quatro vértices. Portanto, pelo Teorema de Lovász (2.2.5) precisamente uma presilha com mais de quatro vértices é obtida na decomposição em cortes justos de  $G - e - f$ . Sendo assim, temos que  $b(G - f) \leq b(G - e - f) - 1$ , ou seja uma presilha de  $G - f$  se decompõe em pelo menos duas presilhas após a remoção de  $e$ . Então, pela Desigualdade 4.1 temos que  $b(G - f) \leq b(G - e - f) - 1 \leq 2 + i_G$ . Além disso,  $G - f$  tem pelo menos  $i_G$  presilhas com quatro vértices. Como  $G - f$  tem pelo menos duas presilhas com mais de quatro vértices, temos que  $b(G - f) \geq 2 + i_G$ . Portanto, temos que:

$$2 + i_G \leq b(G - f) \leq b(G - e - f) - 1 \leq 2 + i_G.$$

Sendo assim,  $b(G - f) = b(G - e - f) - 1$ . Então, uma presilha de  $G - f$  se decompõe em duas presilhas, após a remoção de  $e$ . Além disso,  $G - f$  tem mais de uma presilha com mais de quatro vértices, enquanto  $G - e - f$  tem precisamente uma presilha com mais de quatro vértices. Portanto, precisamente uma presilha com mais de quatro vértices de  $G - f$  se decompõe em precisamente duas presilhas com quatro vértices após a remoção de  $e$ . No entanto, a única presilha simples que após a remoção de uma aresta se decompõe em duas presilhas com precisamente quatro vértices é o  $K_{3,3}$ . Então, uma presilha de  $G - f$  é o  $K_{3,3}$ , a menos de arestas múltiplas, que não é Pfaffiano, em contradição ao Corolário 2.4.8. De fato, no máximo uma presilha de  $G - f$  tem mais de quatro vértices. No entanto, vimos anteriormente que precisamente uma presilha  $G - e - f$  tem mais de quatro vértices. Então, precisamente uma presilha de  $G - f$  tem mais de quatro vértices.  $\square$

Sendo assim, precisamente uma presilha da decomposição em cortes justos de  $G - f$  tem mais de quatro vértices. Seja  $J$  tal presilha. Adote a Notação do Lema 2.3.18 para a decomposição em cortes justos de  $G - f$ . Sendo assim, as praias dos cortes justos da decomposição em cortes justos de  $G - f$  são  $X_1, X_2, \dots, X_r$ , tal que  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r \subset V(G)$ . Além disso,  $G_0, G_1, \dots, G_r$  são as presilhas obtidas da decomposição em cortes justos de  $G - f$ , onde  $G_i$  é um dentre:

- $G_0 := (G - e)\{\overline{X_1} \rightarrow \overline{x_1}\};$
- $G_i := (G - e)\{X_i \rightarrow X_i\}\{\overline{X_{i+1}} \rightarrow \overline{x_{i+1}}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ;
- $G_r := (G - e)\{X_r \rightarrow x_r\}.$

Como precisamente uma presilha de  $G - f$  tem mais de quatro vértices, temos que se  $b(G - f)$  é no máximo dois, a aresta  $f$  é magra em  $G$ . Então, podemos supor que  $b(G - f)$  é pelo menos três. Suponha, primeiramente, que  $b(G - f) = 3$ . Então,  $G_0$ ,  $G_1$  e  $G_2$  são as presilhas de  $G - f$ . Se  $J$  é presilha interna de  $G - f$ , então  $f$  é magra em  $G$ . Podemos, portanto, supor que  $J$  é presilha externa de  $G - f$ . Ajuste a notação de forma que  $G_2$  seja a presilha  $J$ . Nesse caso,  $G_0$  e  $G_1$  tem quatro vértices cada. Então,  $X_2$  tem precisamente cinco vértices, e  $J = (G - f)\{X_2 \rightarrow x_2\}$ . O grafo  $G - e$  não é planar, de acordo com o Lema 4.1.7. Portanto, de acordo com o Lema da Não Planaridade das Contrações,  $J$  não é planar. No entanto, pelo Lema 4.1.8,  $J$  é planar, uma contradição. Sendo assim, podemos supor que  $b(G - f) \geq 4$ .

Consideremos o caso em que  $i_G \leq 1$ . Vimos que  $b(G - f) \leq b(G - e - f) \leq 3 + i_G$ , e portanto  $b(G - f) \leq 4$ . No entanto, supusemos que  $b(G - f) \geq 4$ . Portanto, temos que  $4 \leq b(G - f) \leq b(G - e - f) \leq 3 + i_G \leq 4$ , ou seja  $b(G - f) = b(G - e - f) = 4$  e  $i_G = 1$ . Sendo assim,  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são as presilhas da decomposição de  $G - f$ . Como  $i_G = 1$ , uma presilha da decomposição de  $G - f$  com mais de quatro vértices é externa. No entanto,  $J$  é a única presilha de  $G - f$  com mais de quatro vértices. Sendo assim, podemos ajustar a notação de forma que  $J = G_3$ . Então,  $X_3$  tem sete vértices. Vide Figura 4.10. Ajuste a notação de forma que  $\{r_0, r_1, r_2\} = X_1$ ,  $\{s_1, s_2\} = X_2 - X_1$  e  $\{t_1, t_2\} = X_3 - X_2$  e que  $r_0$ ,  $s_1$  e  $t_1$  sejam os vértices da parte minoritária de  $X_3$ . O vértice  $s_1$  só é adjacente a vértices de  $X_2$ , e tem pelo menos três vizinhos. Portanto,  $s_1$  é adjacente a  $r_1$ ,  $r_2$  e  $s_2$ . Analogamente,  $t_1$  tem três vizinhos em  $X_3$ , sendo que um deles é  $t_2$ . Portanto, dois vértices dentre  $r_1$ ,  $r_2$  e  $s_2$  são vizinhos de  $t_1$ . Ajuste a notação, trocando  $r_1$  com  $r_2$  se necessário, de forma que  $t_1$  seja adjacente a  $r_2$ . Vimos anteriormente que  $b(G - f) = b(G - e - f) = 4$ . Portanto, toda presilha de  $G - f$  é uma presilha após a remoção de  $e$ . Ambos os extremos de  $e$  tem grau três em  $G$ . Como  $J = (G - f)\{X_3 \rightarrow x_3\}$  tem mais de quatro vértices, nenhum extremo de  $e$  está em  $V(J) - x_3$ . Portanto, ambos os extremos de  $e$  estão em  $X_3$  em  $G$ . O grafo  $G - e - f$  é coberto por emparelhamentos. As arestas de  $\{r_0r_1, r_0r_2, s_1s_2, t_1t_2\}$  não são removíveis em  $G - f$ , e portanto  $e$  não pertencem a este conjunto. Além disso,  $e$  não pertence a  $\{r_1s_1, r_2s_1\}$ , pois  $(r_0, r_1, s_1, r_2)$  seria quadrilátero contendo  $e$ , e contendo o vértice  $r_0$  de grau três não incidente em  $e$ , em contradição ao Lema 4.1.13. Sendo assim, um extremo de  $e$  é o vértice  $t_1$ . O outro extremo de  $e$  não está em  $\{r_1, r_2\}$ , pois  $(r_0, r_1, s_1, r_2)$  seria um quadrilátero de  $G - e$  com um vértice incidente em  $e$ , em contradição à escolha de  $e$  como verdadeiramente magra. Então, o outro extremo de  $e$  está em  $\{s_2, t_2\}$ . No entanto,  $t_1t_2$

não é removível em  $G - f$ . Como  $G - e - f$  é coberto por emparelhamentos, temos que  $t_1 s_2$  é a aresta  $e$ . Nesse caso,  $(t_1, s_2, s_1, r_2, t_1)$  é um quadrilátero de  $G$ , com o vértice  $s_1$  de grau três não incidente em  $e$ , em contradição ao Lema 4.1.13. Sendo assim, podemos supor que  $i_G = 2$ .

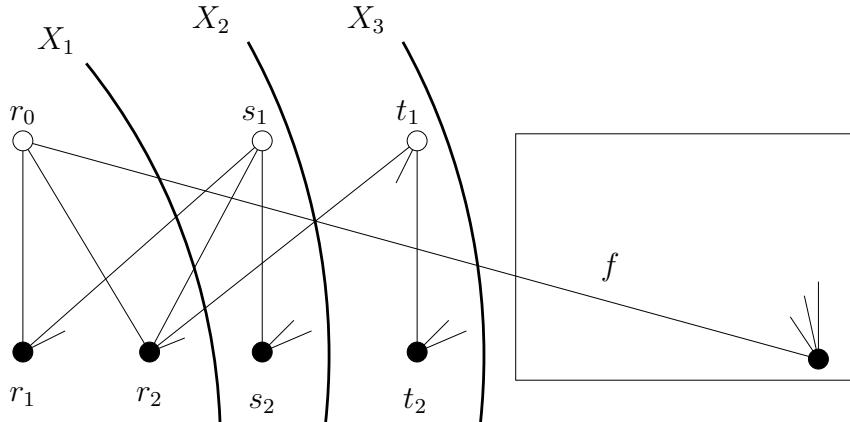


Figura 4.10: A imersão planar  $\tilde{H}(y)$  da prova do Lema 4.1.12.

Como  $i_G = 2$ , temos pela hipótese deste teorema que  $f$  é verdadeiramente magra em  $H$ . Além disso, também temos que  $b(G - f) \geq 4$ , e que precisamente uma das presilhas (a presilha  $J$ ) de  $G - f$  tem mais de quatro vértices. Lembremos que adotamos a notação do Lema 2.3.18 para a decomposição em cortes justos de  $G - f$ . Então,  $G_0, G_1, \dots, G_r$ , com  $r \in \{4, 5\}$ , é o conjunto de presilhas de  $G - f$ . Ajuste a notação, trocando  $G_0, G_1, \dots, G_r$  com  $G_r, G_{r-1}, \dots, G_0$  se necessário, de forma que  $J$  não esteja em  $\{G_0, G_1\}$ . Sendo assim,  $G_0$  e  $G_1$  são presilhas de  $G - f$  com precisamente quatro vértices cada. Além disso,  $f$  é verdadeiramente magra em  $H$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.15. Em resumo, todos os casos analisados ou nos levaram a uma contradição, ou à conclusão de que  $f$  é magra em  $G$ . De fato, se  $f$  tem índice menor do que 2 em  $G$ , ou se  $f$  é verdadeiramente magra em  $H$ , a aresta  $f$  é magra em  $G$ .  $\square$

#### TEOREMA 4.1.18

*Se a presilha  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $G$  é o grafo de Heawood.*

Demonstração: A prova deste teorema está organizada da seguinte forma. Primeiramente, baseando-nos no Teorema de McCuaig, provamos que se  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $H$  é igual à roda dupla  $B_{10}$ , com dez vértices. Em seguida, baseando-nos no Lema da Não Planaridade das Contrações, mais especificamente no Lema 4.1.12 derivado dele, mostramos que se  $H$  é igual ao  $B_{10}$ , então  $G$  é igual ao grafo de Heawood.

## LEMA 4.1.19

*Se a presilha  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $H$  é a roda dupla  $B_{10}$ .*

Demonstração: Suponha que  $H$  não tenha aresta verdadeiramente magra. Como  $e$  é verdadeiramente magra em  $G$ , temos que  $H$  é simples. Portanto, de acordo com o Teorema de McCuaig (2.3.27), a presilha  $H$  é ou uma escada de Möbius bipartida ou um prisma bipartido ou uma roda dupla. Os vértices de contração de  $H$  têm grau pelo menos quatro. Portanto,  $H$  não é cúbico. Logo,  $H$  não é nem uma escada de Möbius, nem um prisma, que são cúbicos. O grafo  $H$  também não é  $B_8$ , a roda dupla com oito vértices, pois esta é o cubo (que é cúbico). Portanto,  $H$  é uma roda dupla  $B_{2n}$ , para algum  $n$  natural maior do que quatro.

Para mostrar que  $H$  é o  $B_{10}$ , suponha, por absurdo, que  $H$  é um  $B_{2n}$ , para algum  $n \geq 6$ . Chegaremos a uma contradição mostrando que  $G$  tem uma aresta magra de índice 1, em contradição ao Lema 4.1.9. Os vértices  $x$  e  $y$ , de contração em  $H$ , têm ambos grau quatro ou mais em  $H$ . Logo,  $x$  e  $y$  são os centros da roda dupla e estão portanto fora do aro. Então, podemos ajustar a notação de forma que  $H - x - y$  seja o circuito  $F := (u_0, w_0, u_1, w_1, \dots, u_{n-2}, w_{n-2}, u_0)$  em que  $u_i$  é adjacente a  $x$ , e  $w_i$  adjacente a  $y$ , para  $i = 0, 1, \dots, n-2$ . O vértice  $x$  tem pelo menos cinco vizinhos em  $V(F)$ . Portanto, um dentre  $x_1$  e  $x_2$  tem em  $G$  pelo menos três vizinhos em  $V(F)$ . Ajuste a notação de forma que  $x_1$  tenha pelo menos três vizinhos em  $V(F)$ . Ajuste também a notação dos vértices de  $F$  de forma que  $u_1$  seja adjacente a  $x_1$ . Seja  $g_1$  a aresta de  $G$  cujos extremos são  $x_1$  e  $u_1$ . Os extremos de  $g_1$  em  $H$  são  $x$  e  $u_1$ . Além disso,  $L := (H - g_1)\{\{w_0, u_1, w_1\} \rightarrow w'\}$  é uma roda dupla  $B_{2n-2}$ , com  $2n-2$  vértices. Sendo assim,  $L$  é uma presilha. Dessa forma,  $g_1$  é uma aresta magra de  $H$ , e de índice 1 em  $G$ , por definição. Portanto, de acordo com o Teorema 4.1.16,  $g_1$  é aresta magra de  $G$ . Como  $g_1$  tem índice 1 em  $G$ , temos uma contradição ao Lema 4.1.9. De fato, se  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $H$  é igual à roda dupla  $B_{10}$ .  $\square$

Mostraremos agora que se  $H$  é igual ao  $B_{10}$ , o grafo  $G$  é igual ao grafo de Heawood. Isto será feito derivando adjacências que o Lema 4.1.12 implica. Nossa plano é em seguida mostrar que  $H$  é igual a  $B_{10}$ , fechando assim a prova do Teorema Principal, a menos dos três lemas da seção anterior.

## LEMA 4.1.20

*Se  $H$  é igual ao grafo  $B_{10}$ , então  $G$  é igual ao grafo de Heawood.*

Demonstração: Em  $H$ , os vértices  $x$  e  $y$  têm grau pelo menos quatro, pois são de contração. Suponha que  $H = B_{10}$ . Então,  $x$  e  $y$  são os vértices de grau quatro de  $H$ . Então,  $H - x - y$  é igual a um circuito de tamanho oito. Podemos ajustar a notação de forma que este circuito seja  $F := (u_0, w_0, u_1, w_1, u_2, w_2, u_3, w_3, u_0)$ . De acordo com o Lema 4.1.12, as arestas de

$\partial_G(x_1) - x_1x_0$  não são contíguas ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Portanto, existe uma quádrupla de arestas  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  incidentes em  $x$  tal que a ordem cíclica no corte  $\partial(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$  é  $e_0, e_1, e_2, e_3$ , e  $e_0$  e  $e_2$  incidem em  $x_1$  e  $e_1$  e  $e_3$  incidem em  $x_2$  em  $G$ . Como  $x$  e  $y$  não são adjacentes, todas estas arestas incidem em  $x$  e em vértices de  $F$ . Portanto, temos que a ordem cíclica em  $F$  dos extremos destas arestas é igual à ordem cíclica destas arestas, pois  $H$  é simples. Sendo assim, podemos ajustar a notação de forma que  $e_i$  incide em  $u_i$  em  $H$ . Então, temos que  $x_1u_0, x_1u_2, x_2u_1$  e  $x_2u_3$  são arestas de  $G$ . Analogamente, podemos ajustar a notação de forma que  $y_1w_0, y_1w_2, y_2w_1$  e  $y_2w_3$  são arestas de  $G$ . Então, temos o grafo mostrado na Figura 4.11. Este grafo é isomorfo ao grafo de Heawood, ilustrado nas Figuras 4.11 e 4.12.  $\square$

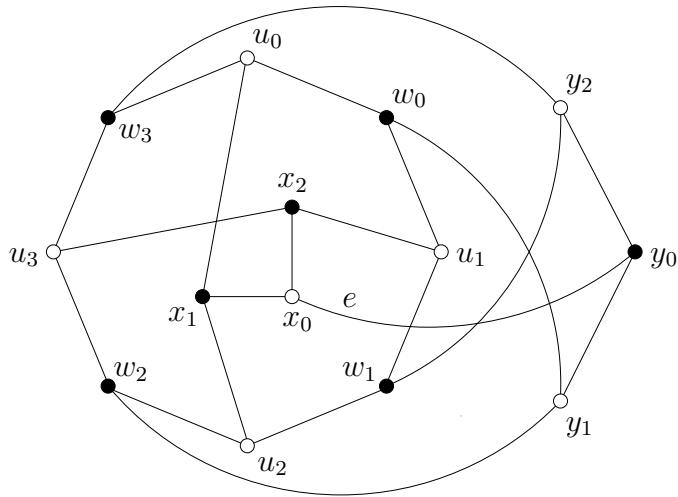


Figura 4.11: O grafo  $G$ , o grafo de Heawood.

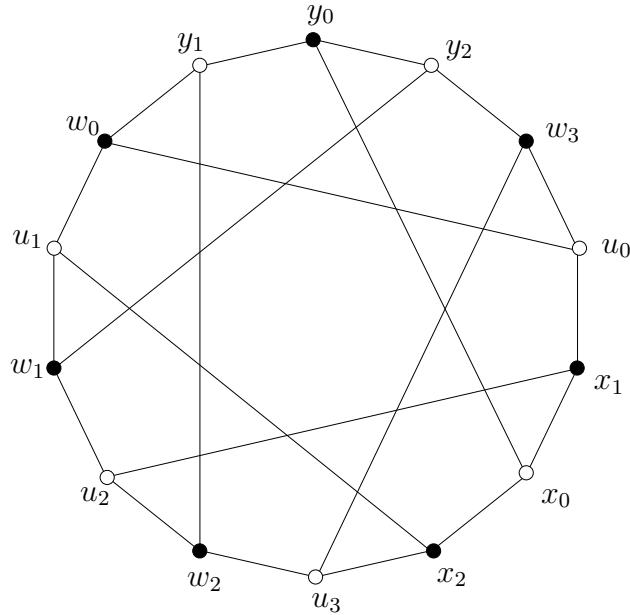
De fato, se  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, então  $G$  é o grafo de Heawood,  $H_{14}$ .  $\square$

Mostraremos a seguir que  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra. Vimos anteriormente que, nesse caso,  $G$  é o grafo de Heawood. Sendo assim, a prova do Teorema seguinte completa a prova do Teorema Principal, a menos dos três lemas da Seção 4.1.1.

#### TEOREMA 4.1.21

*A presilha  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $f$  seja uma aresta verdadeiramente magra de  $H$ . De acordo com o Teorema 4.1.16,  $f$  é magra em  $G$ . Pelo Lema 4.1.9, o índice de  $f$  é 2 em  $G$ . Sejam  $r_0$  e  $s_0$  os extremos de  $f$  em  $G$ . Então,  $r_0$  tem dois vizinhos  $r_1$  e  $r_2$

Figura 4.12: O grafo  $G$ , o grafo de Heawood.

em  $G$ , distintos de  $s_0$ . Analogamente,  $s_0$  tem dois vizinhos  $s_1$  e  $s_2$  em  $G$ , distintos de  $r_0$ . Sejam  $R := \{r_0, r_1, r_2\}$  e  $S := \{s_0, s_1, s_2\}$ . Então,  $J := (G - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$  é a presilha interna de  $G - f$ . Para chegarmos a uma contradição à hipótese de que  $f$  é verdadeiramente magra em  $H$ , analisaremos quatro casos, após a demonstração dos seguintes lemas auxiliares:

## LEMA 4.1.22

*Se  $f$  não incide nem em  $x$  nem em adjacente de  $x$ , então  $X \cap (R \cup S) = \emptyset$ .*

Demonstração: Como  $f$  é aresta de  $H$ , temos que  $f$  é distinta de  $e$ , de  $x_0x_1$  e de  $x_0x_2$ . Logo,  $f$  não incide em  $x_0$ , e  $r_0 \neq x_0$ . Analogamente,  $r_0 \neq y_0$ . Por hipótese,  $f$  não incide em  $x$ , e portanto  $r_0 \notin \{x_1, x_2\}$ . Mostraremos agora que  $x_0 \notin \{r_1, r_2\}$ . Suponha que  $x_0 \in \{r_1, r_2\}$ . Nesse caso,  $r_0$  seria adjacente a  $x_0$ , e  $r_0$  estaria em  $\{x_1, x_2, y_0\}$ , uma contradição às conclusões anteriores. Pela hipótese do caso,  $f$  não incide em adjacente de  $x$ . Portanto,  $r_i \notin \{x_1, x_2\}$ , para  $i \in \{1, 2\}$ . De fato,  $R \cap X = \emptyset$ . Analogamente,  $S \cap X = \emptyset$ .  $\square$

## LEMA 4.1.23

*Se  $f$  não incide em  $x$ , mas incide em adjacente de  $x$ , então podemos ajustar a notação de forma que  $x_1 = r_1$  seja o único vértice de  $X \cup R$  que pertença a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso,  $x_1 = r_1$  não pertence a  $Y \cup S$ .*

Demonstração: Por hipótese,  $f$  incide em vértice adjacente a  $x$  em  $H$ . Portanto, podemos ajustar a notação de forma que  $r_0$  é adjacente a  $x$  em  $H$ . Sendo assim, um vértice do conjunto de vizinhos de  $r_0$  ( $\{s_0, r_1, r_2\}$ ) está em  $\{x_1, x_2\}$ . No entanto, pela hipótese do caso,  $f$  não incide em  $x$ , e portanto  $s_0$  não está em  $\{x_1, x_2\}$ . Sendo assim, um vértice de  $\{r_1, r_2\}$  está em  $\{x_1, x_2\}$ . Ajuste a notação de forma que  $x_1 = r_1$ . Como  $x_1 = r_1$ , temos que  $\{y_1, y_2, x_0, r_0, s_1, s_2\}$  é uma parte da bipartição de  $Y \cup X \cup S \cup R$ , e  $\{y_0, x_2, x_1 = r_1, r_2, s_0\}$  é a outra parte, como ilustrado na Figura 4.14.

Mostraremos agora que  $R \cap X = \{x_1 = r_1\}$ . Suponha, por absurdo, que  $r_2$  esteja em  $X$ . Nesse caso, como  $r_2 \neq r_1$  e  $r_2$  e  $x_0$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ , temos que  $r_2 = x_2$ . Então,  $(r_0, r_1 = x_1, x_0, x_2 = r_2, r_0)$  é um quadrilátero de  $G - e$  com o vértice  $x_0$  incidente em  $e$ , em contradição à escolha de  $e$  como verdadeiramente magra de índice 2 em  $G$ . De fato,  $r_2 \notin X$ . Suponha, por absurdo, que  $r_0$  esteja em  $X$ . O único vértice de  $X$  na mesma parte da bipartição de  $r_0$  é o vértice  $x_0$ . Portanto,  $r_0 = x_0$ , e a aresta  $f$  incide em  $x_0$ , em contradição ao fato de que  $f$  é aresta de  $H$ . De fato,  $R \cap X = \{x_1 = r_1\}$ .

Mostraremos agora que  $S \cap (X \cup R) = \emptyset$ . Suponha, por absurdo, que  $s_0$  está em  $X$ . Os vértices de  $X$  que estão na mesma parte da bipartição de  $s_0$  são  $x_1$  e  $x_2$ . No entanto,  $x_1$  está em  $R$ , e  $S$  e  $R$  são disjuntos. Portanto,  $s_0 = x_2$ . Nesse caso,  $(x_0, x_1 = r_1, r_0, s_0 = x_2, x_0)$  é um quadrilátero de  $G - e$  com o vértice  $x_0$  incidente em  $e$ . Isto é uma contradição à escolha de  $e$  como aresta verdadeiramente magra de índice 2 em  $G$ . De fato,  $s_0 \notin X$ . Suponha, por absurdo, que  $s_1$  esteja em  $X$ . O único vértice de  $X$  na mesma parte da bipartição de  $s_1$  é o vértice  $x_0$ . Então,  $s_1 = x_0$ . Nesse caso,  $(x_0 = s_1, s_0, r_0, r_1 = x_1)$  é um quadrilátero de  $G - e$  com o vértice  $x_0$  incidente em  $e$ . Isto é uma contradição à escolha de  $e$  como aresta verdadeiramente magra de índice 2 em  $G$ . De fato,  $s_1$  não está em  $X$ , e analogamente  $s_2$  não está em  $X$ . Sendo assim,  $X \cap S = \emptyset$ . Como  $R \cap S = \emptyset$ , temos que  $S \cap (X \cup R) = \emptyset$ .

Mostraremos agora que  $Y \cap (X \cup R) = \emptyset$ , e em seguida fecharemos a prova. Suponha, por absurdo, que  $y_0$  esteja em  $R$ . Os vértices de  $R$  que estão na mesma parte da bipartição de  $y_0$  são  $r_1$  e  $r_2$ . No entanto,  $r_1$  está em  $X$ , e  $X$  e  $Y$  são disjuntos. Portanto,  $y_0 = r_2$ . Nesse caso,  $(r_0, r_1 = x_1, x_0, y_0 = r_2, r_0)$  é um quadrilátero de  $G$  contendo  $e$  com o vértice  $r_0$  de grau três não incidente em  $e$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.13. De fato,  $y_0 \notin R$ . Suponha, por absurdo, que  $y_1$  esteja em  $R$ . O único vértice de  $R$  que está na mesma parte da bipartição de  $y_1$  é o vértice  $r_0$ . Portanto,  $y_1 = r_0$ . Sendo assim,  $(x_0, y_0, y_1 = r_0, r_1 = x_1, x_0)$  é um quadrilátero de  $G$  contendo  $e$  com o vértice  $r_0 = y_1$  de grau três não incidente em  $e$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.13. De fato,  $y_1 \notin R$ . Analogamente,  $y_2 \notin R$ , e portanto  $Y \cap R = \emptyset$ . Como,  $X \cap Y = \emptyset$ , temos que  $Y \cap (X \cup R) = \emptyset$ . Vimos que  $S \cap (X \cup R) = \emptyset$ , portanto  $(X \cup R) \cap (Y \cup S) = \emptyset$ . Além disso,  $X \cap R = \{x_1 = r_1\}$ . De fato,  $x_1 = r_1$  é o único vértice de  $X \cup R$  que pertence mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ .  $\square$

CASO 1 A aresta  $f$  não é incidente nem em  $x$  nem em  $y$  nem em vértice adjacente a  $x$  ou a  $y$ .

Mostraremos que a situação, nesse caso, é a mostrada na Figura 4.13, ou seja, os quatro conjuntos  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$  são disjuntos. Sabemos que  $X$  e  $Y$  são disjuntos e que  $R$  e  $S$  são disjuntos. Pela hipótese do caso,  $f$  não incide nem em  $x$ , nem em adjacente de  $x$ . Portanto, de acordo com o Lema 4.1.22,  $X \cap (R \cup S) = \emptyset$ . Pela hipótese do caso,  $f$  também não incide nem em  $y$ , nem em adjacente de  $y$ . Portanto, analogamente,  $Y \cap (R \cup S) = \emptyset$ . Nesse caso, a aresta  $f$  tem índice 2 em  $H$ .

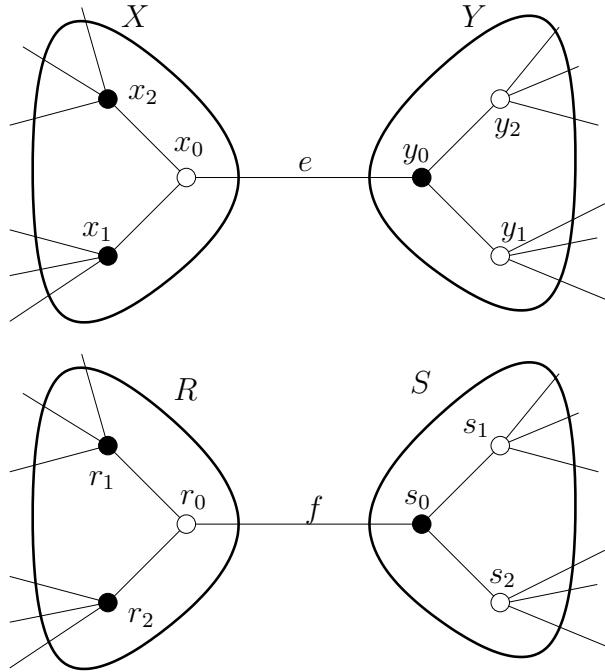


Figura 4.13: O grafo  $G$  no caso em que  $f$  não é incidente em vértice adjacente a  $x$  ou a  $y$ , nem em  $x$  e nem em  $y$ .

O grafo  $H$  é igual a  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ . Como  $f$  tem índice 2 em  $H$ ,  $L := (H - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$  é a presilha interna de  $H - f$ . Sendo assim,  $L$  é obtido de  $G - e - f$  pela contração de cada um dos conjuntos disjuntos  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$  a um vértice cada. Vamos obter uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6), obtendo duas imersões planares distintas para  $L$  e mostrando que  $L$  é simples e 3-conexo.

Sabemos que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  é planar. Pelo Lema 4.1.12, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{H} - f$  pela contração das arestas dos caminhos  $(r_1, r_0, r_2)$  e  $(s_1, s_0, s_2)$ . Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas

não contraídas em um corte. Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_1$ .

Lembremos que  $J$  denota a presilha  $(G - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$ . Como  $f$  é magra em  $G$ , temos que  $J$  é planar, de acordo com o Lema 4.1.9. Seja  $\tilde{J}$  uma imersão planar de  $J$ . Então, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_J(X)$  ao redor de  $X$  em  $\tilde{J}$ . Uma imersão planar  $M_2$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{J} - e$  pela contração das arestas dos caminhos  $(x_1, x_0, x_2)$  e  $(y_1, y_0, y_2)$ . Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas em  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_2$ .

Em resumo, temos uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  na qual as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas no corte  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$ , e uma imersão  $M_2$  de  $L$  na qual as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$ . Sendo assim,  $L$  tem duas imersões planares distintas. No entanto,  $L$  é uma presilha 3-conexa e simples. Isto é uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6). De fato,  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra que não incida nem em  $x$ , nem em  $y$  e nem em adjacente de  $x$  ou de  $y$ .

**CASO 2** A aresta  $f$  incide em vértice adjacente a  $y$  em  $H$ , mas não a vértice adjacente a  $x$ , e não incide nem em  $x$  nem em  $y$ .

Mostraremos agora que a situação de  $G$  é como mostrada na Figura 4.14, ou seja o vértice  $y_1 = s_1$  é o único vértice que pertence a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Sabemos que  $X$  e  $Y$  são disjuntos, e que  $R$  e  $S$  são disjuntos. Pela hipótese do caso,  $f$  não incide em  $x$ , nem em adjacente de  $x$ . Logo, de acordo com o Lema 4.1.22,  $X \cap (R \cup S) = \emptyset$ . Pela hipótese do caso,  $f$  incide em vértice adjacente a  $y$ , mas não incide em  $y$ . Portanto, pelo Lema 4.1.23 aplicado a  $Y$  e  $S$ , podemos ajustar a notação de forma que  $Y \cap S = \{y_1 = s_1\}$ , e  $y_1 = s_1$  seja o único vértice de  $Y \cup S$  que pertence a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso,  $y_1 = s_1$  não pertence a  $X \cup R$ , por este mesmo lema. Portanto,  $X \cup R$  e  $Y \cup S$  são disjuntos. Como  $X$  e  $R$  são disjuntos, temos que  $y_1 = s_1$  é o único vértice de  $X \cup Y \cup R \cup S$  que pertence a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso, o índice de  $f$  em  $H$  é igual a 2.

O grafo  $H$  é igual a  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ . Como  $f$  tem índice 2 em  $H$ ,  $L := (H - f)\{R \rightarrow r\}\{S' \rightarrow q\}$  é a presilha interna de  $H - f$ , onde  $S' := \{y, s_0, s_2\}$ . Vamos obter uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6), obtendo duas imersões planares distintas para  $L$  e mostrando que  $L$  é simples e 3-conexo.

Sabemos que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  é planar. Pelo Lema 4.1.12, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{H} - f$  pela contração das arestas dos caminhos  $(r_1, r_0, r_2)$  e  $(y, s_0, s_2)$ . Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em

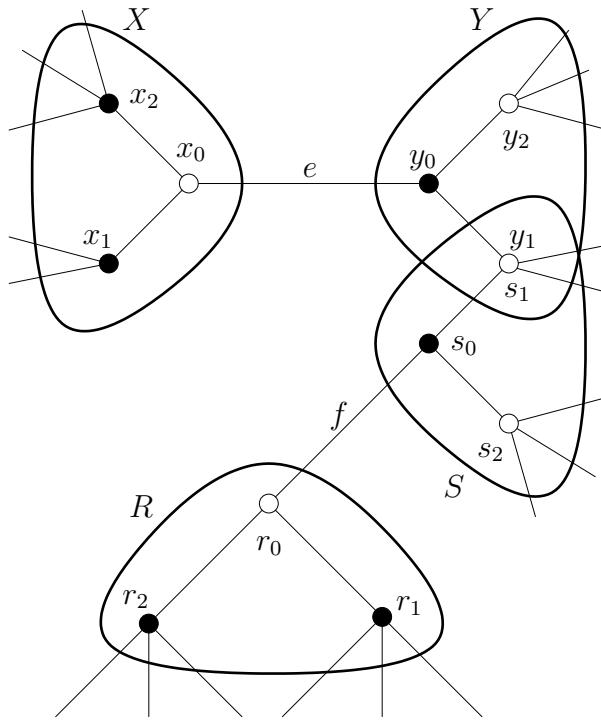


Figura 4.14: O grafo  $G$  no caso em que  $f$  incide em adjacente de  $y$  em  $H$ , mas não incide em adjacente de  $x$  em  $H$ , e não incide nem em  $x$  nem em  $y$ .

$\partial_L(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_1$ .

Lembremos que  $J$  denota a presilha  $(G - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$ . Como  $f$  é magra em  $G$ , temos que  $J$  é planar, de acordo com o Lema 4.1.9. Seja  $\tilde{J}$  uma imersão planar de  $J$ . Então, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_J(X)$  ao redor de  $X$  em  $\tilde{J}$ . Uma imersão planar  $M_2$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{J} - e$  pela contração das arestas dos caminhos  $(x_1, x_0, x_2)$  e  $(s, y_0, y_2)$ . Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas em  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_2$ .

Em resumo, temos uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  na qual as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas no corte  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$ , e uma imersão  $M_2$  de  $L$  na qual as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_L(x)$  ao redor de  $x$ . Sendo assim,  $L$  tem duas imersões planares distintas. No entanto,  $L$  é uma presilha 3-conexa e simples. Isto é uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6). De fato,  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra que não incida nem em  $x$ , nem em  $y$  e nem em adjacente de  $x$ , mas incida em adjacente de  $y$ .

CASO 3 A aresta  $f$  incide em vértice adjacente a  $x$  e em vértice adjacente a  $y$ , mas não

incide nem em  $x$ , nem em  $y$ .

Mostraremos agora que, nesse caso, temos a situação da Figura 4.15, ou seja os vértices  $x_1 = r_1$  e  $y_1 = s_1$  são os únicos vértices que pertencem a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Sabemos que  $X$  e  $Y$  são disjuntos, e que  $R$  e  $S$  são disjuntos. Pela hipótese do caso, a aresta  $f$  é incidente em vértice adjacente a  $x$  em  $H$ , mas não é incidente em  $x$ . Portanto, de acordo com o Lema 4.1.23, podemos ajustar a notação de forma que  $x_1 = r_1$  é o único vértice de  $X \cup R$  que pertence a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso, por este mesmo lema,  $x_1 = r_1$  não pertence a  $Y \cup S$ . Então,  $X \cup R$  e  $Y \cup S$  são disjuntos. Pela hipótese do caso, a aresta  $f$  é incidente em adjacente de  $y$ , mas não é incidente em  $y$ . Portanto, de acordo com o Lema 4.1.23, podemos ajustar a notação de forma que  $y_1 = s_1$  seja o único vértice de  $Y \cup S$  que pertence a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . De fato,  $x_1 = r_1$  e  $y_1 = s_1$  são os únicos vértices de  $X \cup Y \cup R \cup S$  que pertencem a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso, o índice de  $f$  em  $H$  é igual a 2.

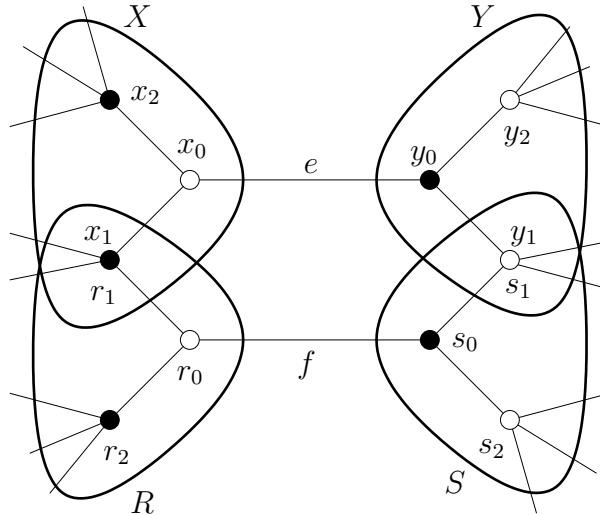


Figura 4.15: O grafo  $G$  no caso em que  $f$  incide em adjacente de  $x$  e em adjacente de  $y$  em  $H$ .

O grafo  $H$  é igual a  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ , e  $L := (H - f)\{R' \rightarrow p\}\{S' \rightarrow q\}$  é a presilha interna de  $H - f$ , onde  $R' := \{x, r_0, r_2\}$  e  $S' := \{y, s_0, s_2\}$ . Vamos obter uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6), obtendo duas imersões planares distintas para  $L$  e mostrando que  $L$  é simples e 3-conexo. A seguir enunciaremos um lema utilizado no restante da prova deste caso.

## LEMA 4.1.24

Seja  $\tilde{L} := (\tilde{H} - f)\{\{x, r_0, r_2\} \rightarrow p\}\{\{y, s_0, s_2\} \rightarrow q\}$  uma imersão de  $L$  obtida de  $\tilde{H} - f$  pela contração dos caminhos  $(x, r_0, r_2)$  e  $(y, s_0, s_2)$  aos vértice  $p$  e  $q$ , respectivamente. Seja  $F$  um subconjunto das arestas de  $\partial_H(x) - xr_0$ . Então, as arestas de  $F$  são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$  se e somente se as arestas de  $F$  são contíguas em  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $\tilde{L}$ .

Demonstração: Seja  $(e_0, e_1, \dots, e_m)$  uma enumeração das arestas de  $\partial_H(x)$ , tal que a enumeração indica a ordem cíclica das arestas ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Ajuste a notação de forma que  $e_0 = xr_0$ . Analogamente, seja  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  uma enumeração das arestas de  $\partial_H(r_2)$ , tal que a enumeração indica a ordem cíclica das arestas ao redor de  $r_2$  em  $\tilde{H}$ . Ajuste a notação de forma que  $f_0 = r_0r_2$ . Vide Figura 4.15. Sendo assim, é possível ajustar a notação, trocando  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  por  $(f_0, f_n, f_{n-1}, \dots, f_1)$  se necessário, de forma que  $(e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_n)$  seja uma enumeração das arestas de  $\partial_L(p)$ , tal que a enumeração indica a ordem cíclica ao redor de  $p$  em  $\tilde{L}$ .

Suponha, primeiramente, que as arestas de  $F$  são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ , ou seja contíguas em  $(e_0, e_1, \dots, e_m)$ . Então, existem  $i$  e  $j$ , tais que  $1 \leq i \leq j \leq m$ , e  $F = \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$ . Nesse caso, as arestas de  $F = \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$  são contíguas em  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $\tilde{L}$ , ou seja contíguas em  $(e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Sendo assim, se as arestas de  $F$  são contíguas em  $\tilde{H}$  ao redor de  $x$ , elas são contíguas em  $\tilde{L}$  ao redor de  $p$ .

Suponhas, agora, que as arestas de  $F$  são contíguas em  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $\tilde{L}$ , ou seja contíguas em  $(e_1, e_2, \dots, e_m, f_1, f_2, \dots, f_n)$ . No entanto,  $F$  é um subconjunto de  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ . Portanto, existem  $i$  e  $j$ , tais que  $1 \leq i \leq j \leq m$ , e  $F = \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$ . Nesse caso, as arestas de  $F = \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_j\}$  são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ , ou seja contíguas em  $(e_0, e_1, \dots, e_m)$ . Sendo assim, se as arestas de  $F$  são contíguas em  $\tilde{L}$  ao redor de  $p$ , elas são contíguas em  $\tilde{H}$  ao redor de  $x$ . De fato, o lema é válido.  $\square$

Sabemos que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  é planar. Pelo Lema 4.1.12, as arestas de  $F := \partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Note que  $F$  é um subconjunto de  $\partial_H(x) - xr_0$ . Uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{H} - f$  pela contração das arestas de  $(x, r_0, r_2)$  e de  $(y, s_0, s_2)$ . Sendo assim, pelo Lema 4.1.24, as arestas de  $F$  não são contíguas em  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $M_1$ .

Seja  $J := (G - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$ . Como  $f$  é magra em  $G$ , temos que  $J$  é planar, de acordo com o Lema 4.1.9. Seja  $\tilde{J}$  uma imersão planar de  $J$ . Então, as arestas de  $F = \partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_J(X')$  ao redor de  $X'$  em  $\tilde{J}$ , onde  $X' := \{r, x_0, x_2\}$ . O grafo  $L$  é igual a  $(J - e)\{X' \rightarrow p\}\{Y' \rightarrow q\}$ , onde  $X' := \{r, x_0, x_2\}$  e  $Y' := \{s, y_0, y_2\}$ , como visto na Figura 4.15. Além disso,  $J - e$  restrito a  $X'$  é igual ao caminho  $(r, x_0, x_2)$ , e restrito a  $Y'$  é igual ao caminho  $(s, y_0, y_2)$ . Portanto, uma imersão

planar  $M_2$  de  $L$  pode ser obtida de  $\tilde{J} - e$  pela contração das arestas deste caminhos. Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Portanto, as arestas de  $F = \partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $M_2$ .

Em resumo, temos uma imersão planar  $M_1$  de  $L$  tal que as arestas de  $F = \partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas no corte  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $M_1$ , e uma imersão  $M_2$  de  $L$  tal que as arestas de  $F = \partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_L(p)$  ao redor de  $p$  em  $M_2$ . Sendo assim,  $L$  tem duas imersões planares distintas. No entanto,  $L$  é uma presilha 3-conexa e simples. Isto é uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6). De fato,  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra que não incida nem em  $x$  nem em  $y$ , mas incida em adjacente de  $x$  e em adjacente de  $y$ .

#### CASO 4 Nenhum dos anteriores.

Mostraremos inicialmente que, nesse caso,  $f$  incide em  $x$  ou em  $y$  em  $H$ . Como o Caso 1 não acontece, temos que  $f$  incide ou em vizinho de  $x$ , ou em vizinho de  $y$ , ou em  $x$  ou em  $y$ . Ajuste a notação de forma que  $f$  incida ou em  $y$  ou em vizinho de  $y$ . Se  $f$  incide em  $y$ , a nossa afirmação é válida. Portanto, podemos supor que  $f$  não incide em  $y$ . Sendo assim,  $f$  incide em vizinho de  $y$ . Como o Caso 2 não acontece, temos que  $f$  incide ou em  $x$  ou em vizinho de  $x$ . Como o Caso 3 não acontece, temos que  $f$  não incide em vizinho de  $x$ , e portanto incide em  $x$ . De fato,  $f$  incide ou em  $x$  ou em  $y$ . Ajuste a notação de forma que  $f$  incida em  $y$ .

Mostraremos agora que, nesse caso, temos a situação da Figura 4.16, ou seja  $y_0 = r_1$  e  $y_1 = r_0$  são os únicos vértices que pertencem a mais de um conjunto dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Sabemos que  $X$  e  $Y$  são disjuntos e  $R$  e  $S$  são disjuntos. Como  $f$  incide em  $y$  em  $H$ , então um dentre  $r_0$  e  $s_0$  está em  $\{y_1, y_2\}$ . Podemos ajustar a notação de forma que  $r_0 = y_1$ . Nesse caso,  $y_0$  é adjacente a  $r_0$ . Então,  $y_0$  está em  $\{s_0, r_1, r_2\}$ . No entanto,  $f$  não é adjacente a  $e$ . Portanto,  $y_0 \neq s_0$ , e então  $y_0 \in \{r_1, r_2\}$ . Ajuste a notação de forma que  $y_0 = r_1$ . Sendo assim,  $\{x_2, x_1, y_0 = r_1, r_2, s_0\}$  está em uma parte da bipartição de  $G$ , e  $\{x_0, y_2, y_1 = r_0, s_1, s_2\}$  está na outra, como ilustrado na Figura 4.16. Suponha, por absurdo, que  $r_2$  esteja em  $X$ . Então, como  $r_2$  e  $x_0$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ , temos que  $r_2 \in \{x_1, x_2\}$ . Sendo assim,  $(r_2 = x_i, x_0, y_0 = r_1, y_1 = r_0, r_2 = x_i)$  é um quadrilátero de  $G$  contendo  $e$  com o vértice  $r_0 = y_1$  de grau três não incidente em  $e$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.13. De fato,  $r_2 \notin X$ . Então, como  $R - Y = \{r_2\}$  e  $X \cap Y = \emptyset$ , temos que  $Y \cup R$  e  $X$  são disjuntos. Suponha, por absurdo, que  $y_2$  está em  $S$ . Então, como  $y_2$  e  $s_0$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ , temos que  $y_2 \in \{s_1, s_2\}$ . Sendo assim,  $(y_2 = s_i, s_0, r_0 = y_1, r_1 = y_0, y_2 = s_i)$  é um quadrilátero de  $G - e$  com o vértice  $y_0 = r_1$  incidente em  $e$ . Isto é uma contradição à escolha de  $e$  como aresta verdadeiramente magra de índice 2 de  $G$ . De fato,  $y_2 \notin S$ . Então, como

$Y - R = \{y_2\}$ , e  $R \cap S = \emptyset$ , temos que  $Y \cup R$  e  $X \cup S$  são disjuntos. Suponha, por absurdo, que  $s_0$  esteja em  $X$ . Então, como  $s_0$  e  $x_0$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ , temos que  $s_0 \in \{x_1, x_2\}$ . Sendo assim,  $(s_0 = x_i, x_0, y_0 = r_1, y_1 = r_0, s_0 = x_i)$  é um quadrilátero de  $G$  contendo  $e$  com o vértice  $s_0 = x_i$  de grau três não incidente em  $e$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.13. De fato,  $s_0 \notin X$ . Suponha, por absurdo, que  $s_1$  esteja em  $X$ . Então, como  $s_1$  está em parte da bipartição distinta da parte contendo  $\{x_1, x_2\}$ , temos que  $s_1 = x_0$ . Então,  $(s_1 = x_0, y_0 = r_1, y_1 = r_0, s_0, s_1 = x_0)$  é um quadrilátero de  $G$  contendo  $e$  com o vértice  $s_0$  de grau três não incidente em  $e$ . Isto é uma contradição ao Lema 4.1.13. De fato,  $s_1 \notin X$ . Analogamente,  $s_2 \notin X$ . De fato,  $X$  e  $S$  são disjuntos. Vimos, anteriormente, que  $(Y \cup R)$  e  $(X \cup S)$  são disjuntos. Então,  $y_0 = r_1$  e  $y_1 = r_0$  são os únicos vértices que pertencem a mais de um dentre  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  e  $S$ . Além disso,  $y_0 = r_1$  e  $y_1 = r_0$  não pertencem a  $X \cup S$ .

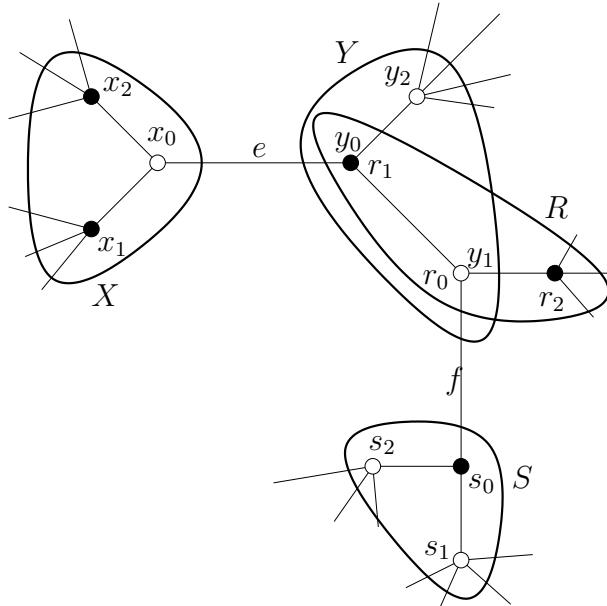


Figura 4.16: O grafo  $G$  no caso em que  $f$  incide em  $y$  em  $H$ .

O grafo  $H$  é igual a  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ , e  $L := (H - f)\{S \rightarrow s\}$  é a presilha interna de  $H - f$ . Sendo assim,  $L$  é igual a  $(G - e - f)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}\{S \rightarrow s\}$ . Seja  $K := (G - e - f)\{X \rightarrow x\}\{S \rightarrow s\}$ . O grafo  $K$  pode ser obtido de  $L$  pela subdivisão da aresta  $yr_2$  no caminho  $(y_2, y_0, y_1, r_2)$ . Subdivisão de aresta preserva a unicidade da imersão planar. Vamos obter duas imersões planares distintas de  $K$ . Em seguida, mostraremos que  $L$  é simples e 3-conexo. Como  $K$  tem uma única imersão planar se e somente se  $L$  tem uma única imersão planar, isto é uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6).

Sabemos que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  é planar. Pelo Lema 4.1.12, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Uma imersão planar  $M_1$  de  $K$  pode ser obtida de  $\tilde{H} - f$  pela contração das arestas de  $(s_1, s_0, s_2)$  e pela subdivisão da aresta  $ry_2$  no caminho  $(y_2, y_0, y_1, r_2)$ . Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Além disso, a aresta subdividida não está em  $\partial_H(x)$ . Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas em  $\partial_K(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_1$ .

Seja  $J := (G - f)\{R \rightarrow r\}\{S \rightarrow s\}$ . Como  $f$  é magra em  $G$ , temos que  $J$  é planar, de acordo com o Lema 4.1.9. Seja  $\tilde{J}$  uma imersão planar de  $J$ . As arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_J(X)$  ao redor de  $X$  em  $\tilde{J}$ . Uma imersão planar  $M_2$  de  $K$  pode ser obtida de  $\tilde{J} - e$  pela contração do conjunto  $X$  ao vértice  $x$  e subdivisão da aresta  $ry_2$  no caminho  $(y_2, y_0, y_1, r_2)$ . Vide Figura 4.16. Contração de arestas de uma imersão preserva a ordem cíclica das arestas não contraídas em um corte. Além disso, a aresta subdividida não está em  $\partial_J(X)$ . Portanto, as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_K(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_2$ .

Em resumo, temos uma imersão planar  $M_1$  de  $K$  tal que as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  não são contíguas no corte  $\partial_K(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_1$ , e uma imersão  $M_2$  de  $K$  tal que as arestas de  $\partial_G(x_2) - x_2x_0$  são contíguas no corte  $\partial_K(x)$  ao redor de  $x$  em  $M_2$ . Sendo assim,  $K$  tem duas imersões planares distintas. No entanto,  $K$  é obtido de  $L$  através de uma subdivisão de uma aresta em um caminho. A subdivisão de uma aresta em um caminho preserva a unicidade da imersão planar. Então,  $L$  tem mais de uma imersão planar. O grafo  $L$  é uma presilha 3-conexa e simples. Isto é uma contradição ao Teorema de Whitney (2.6.6). De fato, nenhum dos casos é possível.

Em resumo, a hipótese de absurdo de que  $H$  tem uma aresta verdadeiramente magra nos levou a contradições em todos os casos. De fato, a presilha  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra.  $\square$

Sendo assim,  $H$  não tem aresta verdadeiramente magra, pelo Teorema 4.1.21 anterior. Então, de acordo com o Teorema 4.1.18, o grafo  $G$  é igual ao grafo de Heawood, como queríamos demonstrar. Sendo assim, a prova do Teorema Principal estará completa logo que as provas para os três lemas enunciados na Seção 4.1.1 sejam feitas. Isto será feito nos capítulos seguintes.  $\square$

# Capítulo 5

## Lema do Grafo de Heawood não Contido

Neste Capítulo, mostraremos que se  $G$  é uma presilha simples Pfaffiana, nenhuma presilha de  $G - e$  é isomorfa ao grafo de Heawood.

### 5.1 Lema do Grafo de Heawood não Contido

O Lema seguinte foi enunciado anteriormente no Capítulo 4 com o nome de Lema do Grafo de Heawood não Contido, ou Lema 4.1.3.

LEMA 5.1.1

*Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ . Então, o grafo simples subjacente de qualquer presilha de  $G - e$  não é isomorfo ao grafo de Heawood.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $H$  seja uma presilha de  $G - e$  cujo grafo simples subjacente é isomorfo ao grafo de Heawood. Considere a enumeração dos vértices de  $H$  mostrada na Figura 5.1. Seja  $D(H)$  uma orientação bipartida orientada de  $H$ . De acordo com o Lema 2.5.1,  $D(H)$  é Pfaffiana. Além disso, todo vértice de  $H$  é ou uma fonte ou um sorvedouro. Portanto, de acordo com o Lema 2.4.10,  $D(H)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G - e)$  de  $G - e$ . Pelo Teorema 2.4.5,  $D(G - e)$  pode ser estendida a uma orientação Pfaffiana  $D(G)$  de  $G$ .

Como  $D(H)$  é bipartida orientada, todo circuito de tamanho  $n$ , com  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , de  $H$  tem orientação par em  $D(H)$ . Em particular,  $Q := (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 1)$  tem orientação par em  $D(H)$ . Caso  $Q$  seja um circuito de  $G$ , sua orientação em  $D(G)$  também é par. Analisaremos vários casos e, em cada um deles, ou mostraremos que  $Q$  é conforme em  $G$ , ou que  $Q$  é parte de um circuito conforme de  $G$  cuja orientação em  $D(G)$  é par, em contradição ao Teorema 1.2.3. Assim, provamos o lema.

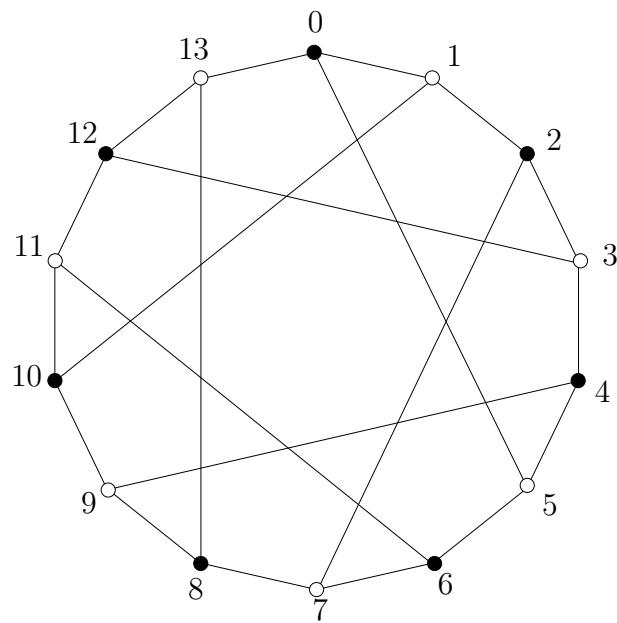
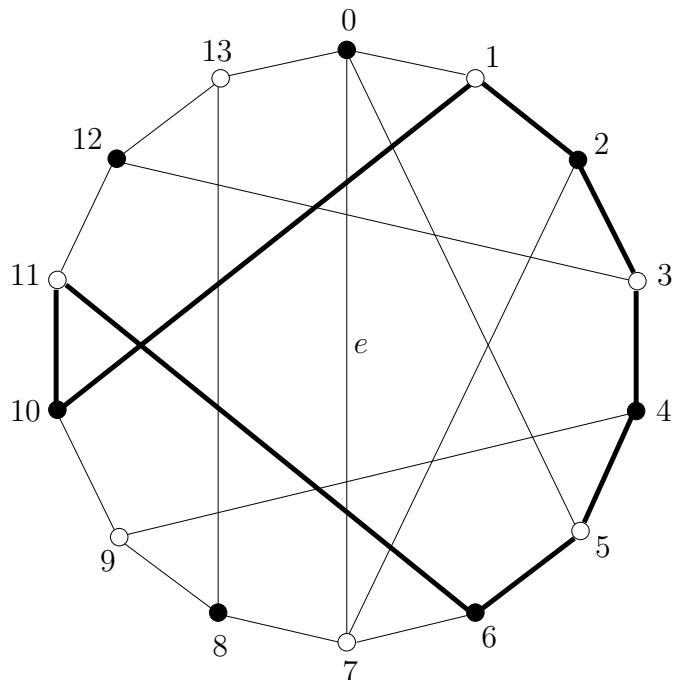
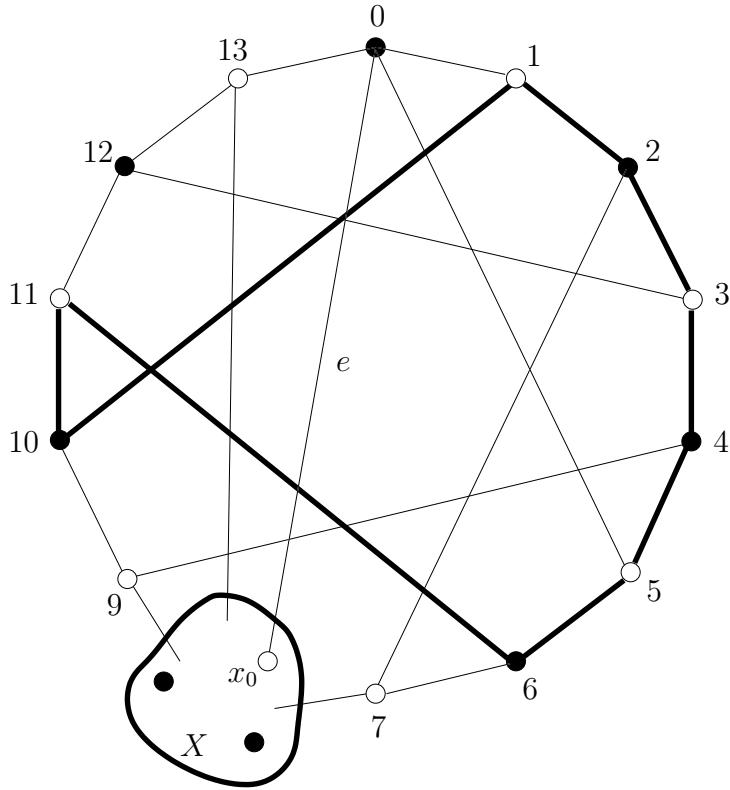


Figura 5.1: O grafo de Heawood.

Figura 5.2: O grafo de Heawood mais a aresta  $e$ ,  $e$  em negrito  $Q$ . Caso 1.

Figura 5.3: Caso 2: grafo  $G$ , em negrito o circuito  $Q$  e o conjunto  $X$ .

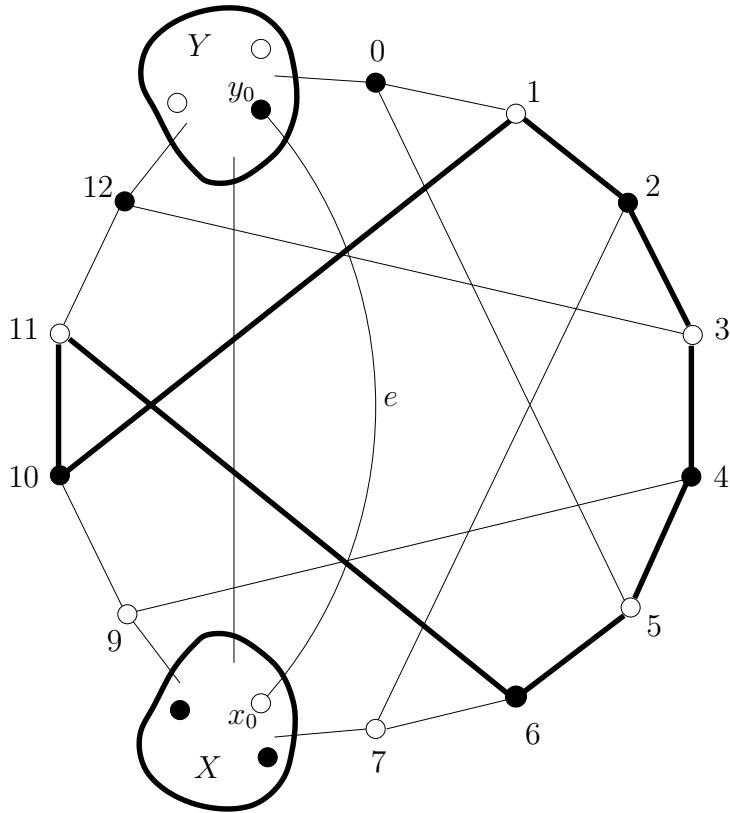
De acordo com o Corolário 2.3.19,  $H$  tem no máximo dois vértices de contração. Sendo assim, temos três casos a analisar:  $H$  tem zero, um ou dois vértices de contração.

**CASO 1** *O grafo  $H$  não tem vértice de contração.*

Como  $H$  não tem vértice de contração, então  $G = H + e$ . Pelo Corolário 2.5.6, podemos supor que  $e = (0, 7)$ . Nesse caso,  $\{(0, 7), (8, 9), (12, 13)\}$  é emparelhamento perfeito de  $G - V(Q)$ . Sendo assim,  $Q$  é circuito conforme em  $G$ , cuja orientação em  $D(G)$  é par. Portanto, pelo Teorema 1.2.3,  $D(G)$  não é Pfaffiana, uma contradição.

**CASO 2** *O grafo  $H$  tem precisamente um vértice de contração.*

Nesse caso, tanto o vértice de contração como o outro extremo da aresta  $e$  estão na mesma parte da bipartição de  $H$ , de acordo com o Corolário 2.3.19. Lembremos que  $e = x_0y_0$ . Ajuste a notação de forma que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}$ , e que  $x_0 \in X$ . Pelo Corolário 2.5.8, podemos supor que  $x = 8$ , e que  $y_0 = 0$ , como visto na Figura 5.3. Seja  $M$  a extensão de  $\{e, (12, 13)\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Pelo Corolário 2.3.17,  $M$  tem precisamente três arestas em  $\partial(X)$ . É fácil ver que  $N_G(X) - X = \{0, 7, 9, 13\}$ , conforme ilustrado

Figura 5.4: Caso 3.1: grafo  $G$ , em negrito o circuito  $Q$  e os conjuntos  $X$  e  $Y$ .

na Figura 5.3. O vértice 13 está emparelhado por  $M$  com o vértice 12, fora de  $X$ . Portanto, os vértices 0, 7 e 9 são precisamente os vértices de  $V(G) - X$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $X$ . Dessa forma,  $M$  restrito a  $G[X \cup \{0, 7, 9, 12, 13\}]$  é emparelhamento perfeito deste grafo. Por outro lado,  $V(Q) = V(G) - X - \{0, 7, 9, 12, 13\}$ . Sendo assim,  $Q$  é circuito conforme em  $G$ , cuja orientação em  $D(G)$  é par. Portanto, pelo Teorema 1.2.3,  $D(G)$  não é Pfaffiana, uma contradição.

**CASO 3** *O grafo  $H$  tem precisamente dois vértices de contração.*

Dividiremos este caso em dois subcasos: (i) os vértices de contração são adjacentes em  $H$ ; (ii) os vértices de contração não são adjacentes em  $H$ .

**CASO 3.1** *Os dois vértices de contração de  $H$  são adjacentes.*

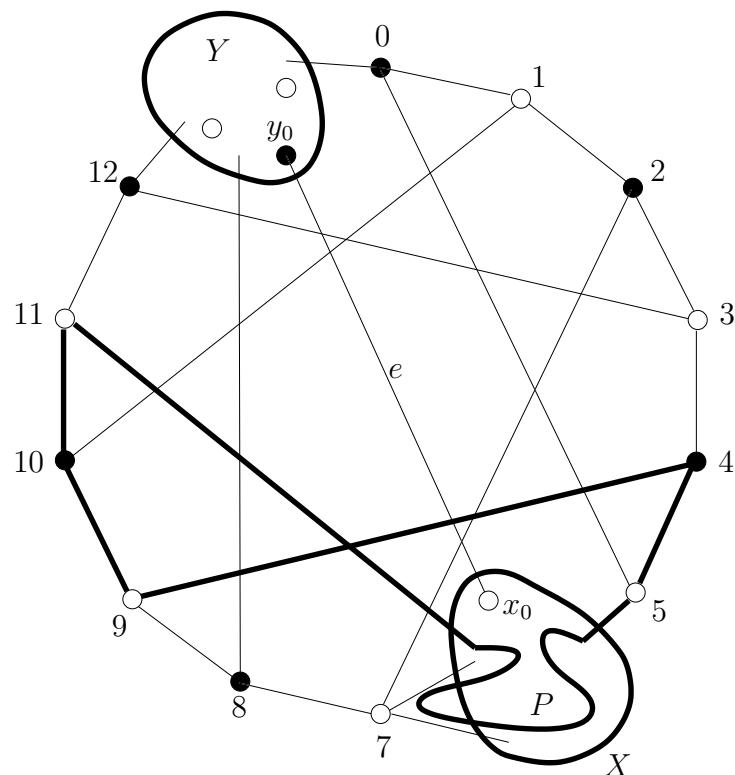
Lembremos que  $e = x_0y_0$ . Ajuste a notação tal que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ ,  $x_0 \in X$ , e  $y_0 \in Y$ . Por hipótese,  $x$  e  $y$  são adjacentes em  $H$ . Portanto, pelo Corolário 2.5.6, podemos supor que  $x = 8$  e  $y = 13$ , conforme ilustrado na Figura 5.4. Sejam

$C := \partial_G(X \cup Y)$ ,  $C'_X := C \cap \partial_G(X)$  e  $C'_Y := C \cap \partial_G(Y)$ . Ambos  $X$  e  $Y$  têm pelo menos três vértices. Portanto,  $|X \cup Y| \geq 6$ . A presilha  $H$  é isomorfa ao grafo de Heawood (a menos de arestas múltiplas), logo possui quatorze vértices. Assim,  $G - X - Y$  tem doze vértices. Sendo assim, pelo Lema 2.3.22,  $C$  tem um emparelhamento de tamanho três. Como  $C = C'_X \cup C'_Y$ , um dentre  $C'_X$  e  $C'_Y$  tem um emparelhamento de tamanho dois. Ajuste a notação de forma que  $C'_X$  tenha um emparelhamento  $M_X$  de tamanho dois. Seja  $M$  uma extensão de  $M_X$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Os vértices 7 e 9 são os únicos extremos de arestas de  $C'_X$  fora de  $X$ , pois as demais arestas de  $\partial_G(X)$  possuem um extremo em  $Y$ . Portanto, tanto 7 como 9 são incidentes em arestas de  $M \cap C'_X$ . Por outro lado,  $\partial(X) - e$  é justo em  $G - e$ . Então, pelo Corolário 2.3.17, a aresta  $e$  está em  $M$  e é a única aresta de  $M \cap \partial(X)$  além das arestas com extremos em 7 e 9. Além disso, como  $e \in M$ ,  $M \cap \partial(Y)$  tem precisamente três arestas. Destas, somente  $e$  tem extremo em  $X$ . Portanto, tanto 0 como 12 estão emparelhados por  $M$  com vértices de  $Y$ . Dessa forma,  $M$  restrito a  $G[X \cup Y \cup \{0, 7, 9, 12\}]$  é emparelhamento perfeito deste grafo. Por outro lado,  $V(Q) = V(G) - X - Y - \{0, 7, 9, 12\}$ . Sendo assim,  $Q$  é circuito conforme em  $G$ , cuja orientação em  $D(G)$  é par. Portanto, pelo Teorema 1.2.3,  $D(G)$  não é Pfaffiana, uma contradição.

**CASO 3.2** *Os dois vértices de contração de  $H$  não são adjacentes.*

Lembremos que  $e = x_0y_0$ . Ajuste a notação de forma que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ ,  $x_0 \in X$ , e  $y_0 \in Y$ . Pelo Corolário 2.3.19, os vértices de contração estão em partes distintas da bipartição de  $H$ . Por hipótese,  $x$  e  $y$  não são adjacentes. Portanto, pelo Corolário 2.5.7, podemos ajustar a notação de forma que  $x = 6$  e  $y = 13$ , conforme ilustrado na Figura 5.5. Seja  $M$  uma extensão de  $\{e, (10, 11)\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Pelo Corolário 2.3.17,  $M$  tem precisamente três arestas em  $\partial(X)$ . Por outro lado, é fácil ver que  $N(X) - X = \{y_0, 5, 7, 11\}$ . No entanto, 11 está emparelhado por  $M$  com o vértice 10, fora de  $X$ . Então,  $y_0$ , 5 e 7 são precisamente os vértices de  $V(G) - X$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $X$ . Sendo assim,  $M' := M \cap E(G[X \cup N(X) - 11])$  é emparelhamento perfeito de  $G[X \cup N(X) - 11]$ . Analogamente, seja  $N$  uma extensão de  $\{e, (4, 5)\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Pelo mesmo argumento anterior, temos que  $N' := N \cap E(G[X \cup N(X) - 5])$  é emparelhamento perfeito de  $G[X \cup N(X) - 5]$ . Portanto,  $M' \oplus N'$  é subgrafo de  $G[X \cup N(X)]$ . Além disso, 5 e 11 são os únicos vértices de grau um em  $M' \oplus N'$ . Dessa forma,  $G[X \cup N(X)]$  tem um caminho  $M', N'$ -alternado  $P$  cujos extremos são 5 e 11. Note que  $M$  restrito a  $G[X \cup N(X)] - V(P)$  é emparelhamento perfeito deste grafo.

Mostraremos agora que o circuito  $Q_1 := P \cdot (11, 10, 9, 4, 5)$  é conforme em  $G$ . Vide Figura 5.5. Já vimos que  $G[X \cup N(X)] - V(P)$  tem emparelhamento perfeito. Portanto, para provarmos que  $Q_1$  é conforme em  $G$ , basta mostrar que  $G - V(Q_1) - X - N(X)$

Figura 5.5: Caso 3.2: grafo  $G$ , em negrito os conjuntos  $X$  e  $Y$  e o circuito  $Q_1$ .

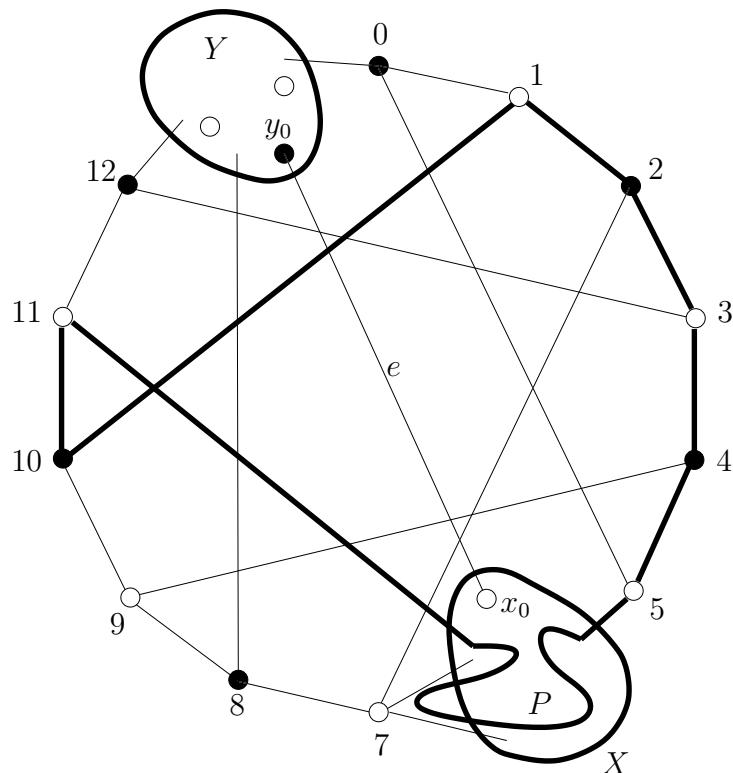


Figura 5.6: Caso 3.2: grafo  $G$ , em negrito os conjuntos  $X$  e  $Y$  e o circuito  $Q_2$ .

tem emparelhamento perfeito. No entanto,  $G - V(Q_1) - X - N(X)$  é igual ao grafo  $G[(Y - y_0) \cup \{0, 1, 2, 3, 8, 12\}]$ , como ilustrado na Figura 5.5. Definiremos agora um emparelhamento perfeito deste grafo. Seja  $M_1$  uma extensão de  $\{e, (0, 1)\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Pelo Corolário 2.3.17,  $M_1$  tem precisamente três arestas em  $\partial(Y)$ . Por outro lado, é fácil ver que  $N(Y) - Y = \{x_0, 0, 8, 12\}$ . No entanto, 0 está emparelhado por  $M_1$  com o vértice 1, fora de  $Y$ . Então,  $x_0$ , 8 e 12 são precisamente os vértices de  $V(G) - Y$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $Y$ . Além disso,  $x_0$  está emparelhado por  $M$  com  $y_0$ . Sendo assim,  $M_1$  restrito a  $G[(Y - y_0) \cup \{0, 1, 2, 3, 8, 12\}]$  é emparelhamento perfeito deste grafo. De fato,  $Q_1$  é conforme em  $G$ .

Mostraremos agora que o circuito  $Q_2 := P \cdot (11, 10, 1, 2, 3, 4, 5)$  é conforme em  $G$ . Vide Figura 5.6. Já vimos que  $G[X \cup N(X)] - V(P)$  tem emparelhamento perfeito. Portanto, para provarmos que  $Q_2$  é conforme em  $G$ , basta mostrar que  $G - V(Q_2) - X - N(X)$  tem emparelhamento perfeito. No entanto,  $G - V(Q_2) - X - N(X)$  é igual ao grafo  $G[(Y - y_0) \cup \{0, 8, 9, 12\}]$ , como ilustrado na Figura 5.6. Seja  $M_2$  uma extensão de  $\{e, (8, 9)\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Pelo Corolário 2.3.17,  $M_2$  tem precisamente três arestas em  $\partial(Y)$ . Por outro lado, é fácil ver que  $N(Y) - Y = \{x_0, 0, 8, 12\}$ .

No entanto, 8 está emparelhado por  $M_2$  com o vértice 9, fora de  $Y$ . Então,  $x_0$ , 0 e 12 são precisamente os vértices de  $V(G) - Y$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $Y$ . Além disso,  $x_0$  está emparelhado por  $M$  com  $y_0$ . Sendo assim,  $M_2$  restrito a  $G[(Y - y_0) \cup \{0, 8, 9, 12\}]$  é emparelhamento perfeito deste grafo. De fato,  $Q_2$  é conforme em  $G$ .

Veremos agora que um dentre  $Q_1$  e  $Q_2$  tem orientação par em  $D(G)$ . A restrição de  $D(G)$  a  $H$  é bipartida orientada. Sendo assim, o caminho  $(5, 4, 9, 10, 11)$  tem orientação par. Como  $Q_1 = (5, 4, 9, 10, 11) \cdot P$ , temos que a orientação de  $Q_1$  em  $D(G)$  é igual à orientação de  $P$ . Analogamente, o caminho  $(5, 4, 3, 2, 1, 10, 11)$  tem orientação ímpar. Como  $Q_2 = (5, 4, 3, 2, 1, 10, 11) \cdot P$ , temos que a orientação de  $Q_2$  em  $D(G)$  é diferente da orientação de  $P$ . Em resumo, a orientação de  $Q_1$  é distinta da orientação de  $Q_2$  em  $D(G)$ . Sendo assim, um dentre  $Q_1$  e  $Q_2$  tem orientação par. No entanto, vimos anteriormente que tanto  $Q_1$  como  $Q_2$  são conformes em  $G$ . Então, pelo Teorema 1.2.3,  $D(G)$  não é Pfaffiana, uma contradição. De fato, o lema é válido.  $\square$

# Capítulo 6

## Herança da Redutibilidade

Neste capítulo, mostraremos que se uma presilha  $H$  de  $G - e$  é redutível, onde  $G$  é presilha e  $e$  é uma aresta removível de  $G$ , então se (i)  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se (ii)  $e$  é uma aresta magra, então  $G$  é redutível se o Teorema Principal vale para todo grafo com menos vértices do que  $G$ . Como consequência disto, temos que, dado um spin  $G$ , e uma aresta magra  $e$ , toda presilha de  $G - e$  é irredutível, sob a hipótese de indução do Teorema Principal. O Lema da Herança da Redutibilidade, que será provado na seção seguinte, foi enunciado anteriormente como Lema 4.1.4

### 6.1 Lema da Herança da Redutibilidade

Relembremos a definição de redução. Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição  $\{U, W\}$ . Uma quádrupla  $Z$  de vértices de  $G$  reduz  $G$  se:

- $Z$  contém dois vértices em  $U$  e dois vértices em  $W$ , e
- $G - Z$  consiste de três ou mais componentes conexas.

Uma presilha  $G$  é *redutível* se alguma quádrupla de vértices de  $G$  reduz  $G$ , e é *irredutível* caso contrário. O seguinte lema foi enunciado no Capítulo 4.

#### LEMA 6.1.1 (LEMA DA HERANÇA DA REDUTIBILIDADE)

Seja  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ , e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que  $G$ , e se (i) o grafo  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se (ii) a aresta  $e$  é magra, então  $H$  é irredutível.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o enunciado do lema é falso. Então, podemos supor que o Teorema Principal vale para grafos menores do que  $G$ , e que uma quádrupla  $Z$  de vértices de  $H$  reduz  $H$ . Logo, temos que  $H$  é uma  $(Q, R)$ -soma de

parcelas  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , com  $n \geq 3$ , onde  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_0)$ , e  $V(Q) = Z$ . Seja  $J_k := H_k - V(Q)$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Se necessário, uma parcela pode ser trocada por duas ou mais de forma que  $J_k$  seja conexo, para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Portanto, podemos supor que  $J_k$  é conexo, para  $k = 1, 2, \dots, n$ . De acordo com o Teorema 3.2.1,  $H_i$  é presilha Pfaffiana, para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

A prova deste lema será dividida em três lemas. Cada um destes lemas contempla um caso do Lema da Herança da Redutibilidade. Os enunciados dos lemas são os seguintes:

#### LEMA 6.1.2

*Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  não contém vértices de contração de  $H$ , e se o Teorema Principal vale para presilhas menores do que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .*

#### COROLÁRIO 6.1.3

*Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém precisamente um vértice de contração de  $H$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .*

#### LEMA 6.1.4

*Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém dois vértices de contração de  $H$ , a aresta  $e$  é magra, e o Teorema Principal vale para todo grafo com menos vértices que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .*

### 6.1.1 $Z$ não contém vértice de contração de $H$

Analisaremos agora o caso em que  $Z$  não contém vértice de contração de  $H$ .

#### LEMA 6.1.5

*Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  não contém vértices de contração de  $H$ , e se o Teorema Principal vale para presilhas menores do que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $Z$  reduza  $H$ . Lembremos que, nesse caso,  $H$  é uma  $(Q, R)$ -soma de  $n \geq 3$  presilhas Pfaffianas  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , onde  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_0)$  e  $V(Q) = Z$ . Além disso,  $J_k = H_k - V(Q)$  é conexo, para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por hipótese, o conjunto  $Z$  não contém vértice de contração.

Sejam  $x_0$  e  $y_0$  os extremos de  $e$ . A presilha  $H$  tem zero, um ou dois vértices de contração. Defina os conjuntos  $X$  e  $Y$  de vértices de  $G$ , e os vértices  $x$  e  $y$  de  $H$ , de modo que  $H = (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ ,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  e:

- se  $H$  tem dois vértices de contração então tanto  $X$  quanto  $Y$  tem pelo menos três vértices;
- se  $H$  tem apenas um vértice de contração, então  $X$  tem pelo menos três vértices,  $Y = \{y_0\}$  e  $y = y_0$ ;
- se  $H$  não tem vértice de contração, então  $X = \{x_0\}$ ,  $x = x_0$ ,  $Y = \{y_0\}$  e  $y = y_0$ .

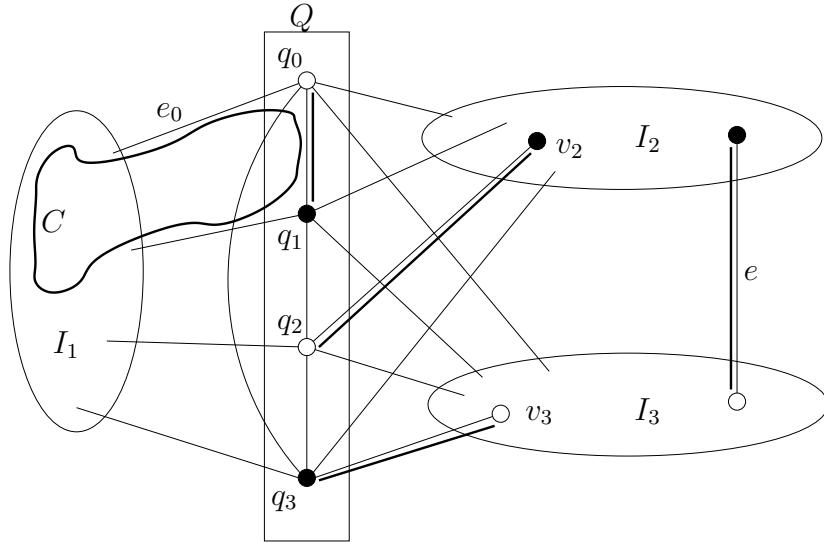
Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , podemos expandir de volta o(s) vértice(s) de contração de  $H$  pertencentes a  $J_k$ , se houver, obtendo assim um grafo que denotaremos  $I_k$ . Então,  $I_1, I_2, \dots, I_n$  são as componentes conexas de  $G - e - Z$ . Os extremos de  $e$  não estão ambos em um mesmo  $I_k$ , senão  $G - V(Q)$  teria pelo menos três componentes conexas. Sendo assim, ajuste a notação de forma que  $x_0$  esteja em  $I_2$  e  $y_0$  em  $I_3$ . Nesse caso,  $J_2 = I_2\{X \rightarrow x\}$  e  $J_3 = I_3\{Y \rightarrow y\}$ . Seja  $H^*$  a  $(Q, \emptyset)$ -soma de  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . De acordo com o Teorema 3.2.1,  $H^*$  é Pfaffiano. Seja  $G^* := G + R$ . Então,  $H^* = (G^* - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ . Pelo Corolário 2.3.19, se tanto  $x$  como  $y$  forem vértices de contração, então eles estão em partes opostas da bipartição de  $H^*$ . Portanto, pelo Lema 2.4.6,  $H^*$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(H^*)$  na qual: (i)  $x$  é uma fonte se  $x$  for vértice de contração, e (ii)  $y$  é um sorvedouro se  $y$  for um vértice de contração. Por outro lado, nenhuma aresta de  $R$  tem extremo em  $X \cup Y$ . Sendo assim, tanto  $(G^* - e)\{\bar{X} \rightarrow \bar{x}\} = (G - e)\{\bar{X} \rightarrow \bar{x}\}$  como  $(G^* - e)\{\bar{Y} \rightarrow \bar{y}\} = (G - e)\{\bar{Y} \rightarrow \bar{y}\}$ . Além disso, sabemos que  $G - e$  é Pfaffiano. Então,  $(G^* - e)\{\bar{X} \rightarrow \bar{x}\}$  tem orientação Pfaffiana  $D_{\bar{x}}$  na qual  $\bar{x}$  é sorvedouro. Analogamente,  $(G^* - e)\{\bar{Y} \rightarrow \bar{y}\}$  tem orientação Pfaffiana  $D_{\bar{y}}$  na qual  $\bar{y}$  é fonte. Seja  $D(G^* - e)$  a extensão de  $D(H^*)$  unido com  $D_{\bar{x}}$  se  $x$  for vértice de contração de  $H^*$  e com  $D_{\bar{y}}$  se  $y$  for vértice de contração de  $H^*$  a uma orientação de  $G^* - e$ . Pelo Teorema 2.4.7,  $D(G^* - e)$  é orientação Pfaffiana de  $G^* - e$ . Pelo Lema 2.4.9,  $D(G^* - e)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G^*)$  de  $G^*$  cuja restrição a  $G$  é Pfaffiana.

#### LEMA 6.1.6

A orientação  $D(G^*)$  é Pfaffiana.

Demonstração: Seja  $M_0$  um emparelhamento perfeito de  $G - e$ , e  $s$  o sinal de  $M_0$  em  $D(G^*)$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$ . Provaremos que o sinal de  $M$  é igual a  $s$ . Caso  $e$  não pertença a  $M$ , temos que  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G^* - e$ . Nesse caso, como  $D(G^*)$  restrita a  $G^* - e$  é Pfaffiana, temos que o sinal de  $M$  é igual a  $s$ . Portanto, podemos supor que  $e \in M$ . Se  $M$  não tem aresta em  $R$ , então  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G$ . Nesse caso, como  $D(G^*)$  restrita a  $G$  é Pfaffiana, o sinal de  $M$  é igual a  $s$ .

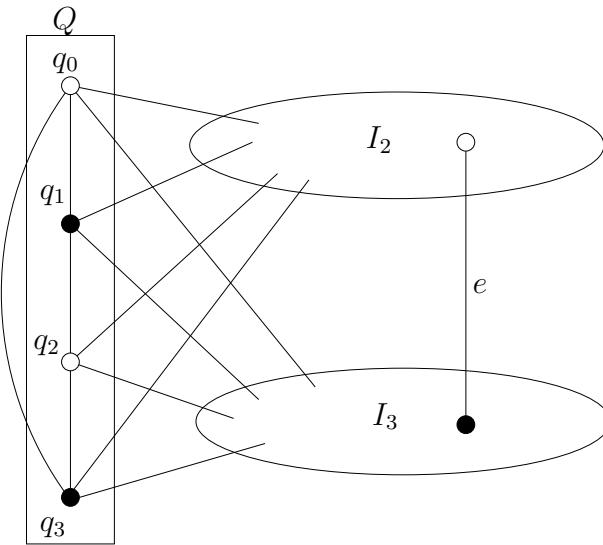
Dessa forma, podemos supor que  $e \in M$  e que  $M \cap R \neq \emptyset$ . Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , o grafo  $I_k$  tem o mesmo número de vértices em cada parte de sua bipartição. Além disso, a aresta  $e$  tem um extremo em  $I_2$  e outro extremo em  $I_3$ . Portanto, um vértice  $v_2 \in V(I_2)$

Figura 6.1: O emparelhamento  $M$  de  $G^*$ , e o circuito  $C$ .

e um vértice  $v_3 \in V(I_3)$  estão emparelhados por  $M$  com vértices de  $Q$ , e  $v_2$  e  $v_3$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ . Vide Figura 6.1. Ajuste a notação de  $q_0, q_1, q_2$  e  $q_3$ , de forma que  $q_2v_2$  e  $q_3v_3$  estejam em  $M$ . Como  $M$  tem aresta em  $R$ , temos que  $q_0q_1$  está em  $M$ . Seja  $N := M \cap E(H_1) + q_2q_3$  um emparelhamento perfeito de  $H_1$  contendo  $q_0q_1$  e  $q_2q_3$ . Seja  $N'$  um emparelhamento perfeito de  $H_1$  contendo  $q_2q_3$  e  $e_0$ , onde  $e_0$  tem um extremo em  $q_0$  e outro em  $I_1$ . Seja  $C$  o circuito  $N, N'$ -alternado contendo  $e_0$ . Como  $q_2q_3$  está em  $N \cap N'$ , temos que  $C$  não tem aresta com extremo nem em  $q_2$  nem em  $q_3$ . Além disso,  $M \cap E(H_1) + q_2q_3 = N$ . Sendo assim,  $C$  é  $M$ -alternado.

O conjunto  $M' := M \oplus E(C)$  é emparelhamento perfeito de  $G^*$  que não contém arestas em  $R$ . Vejamos agora a orientação de  $C$  em  $D(G^*)$ . O circuito  $C$  é um circuito conforme em  $H_1$ . Como  $H_1$  é conforme em  $H^*$ , temos que  $C$  é conforme em  $H^*$ . Além disso,  $D(H^*)$  é Pfaffiana. Portanto,  $C$  tem orientação ímpar em  $D(H^*)$ . Por outro lado,  $D(H^*)$  é a restrição de  $D(G^*)$  às arestas de  $H^*$ , e  $C$  também é circuito de  $G^*$ . Portanto, a orientação de  $C$  em  $D(G^*)$  é ímpar. Sendo assim, o sinal de  $M'$  em  $D(G^*)$  é igual ao sinal de  $M$ . No entanto,  $M'$  não tem aresta em  $R$ . Portanto, o sinal de  $M'$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ . Dessa forma, o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ . Logo,  $D(G^*)$  é orientação Pfaffiana de  $G^*$ .  $\square$

O grafo  $G^* - V(Q)$  tem pelo menos duas componentes conexas:  $I_1$  e a componente conexa contendo os vértices de  $I_2$  e  $I_3$ . Sendo assim,  $G^*$  é uma  $(Q, \emptyset)$ -soma de  $H_1, G_{23}, H_4, \dots, H_n$ , onde  $G_{23}$  é a restrição  $G^*[V(I_2) \cup V(I_3) \cup V(Q)]$ . De acordo com o Teorema 3.2.1,  $G_{23}$  é uma presilha Pfaffiana. Vide Figura 6.2.

Figura 6.2: O grafo  $G_{23}$ .

Primeiramente, mostraremos que  $G_{23}$  não é planar. Suponha, por absurdo, que  $G_{23}$  seja planar. Seja  $\tilde{G}_{23}$  uma imersão planar de  $G_{23}$ . Consideremos as pontes do circuito  $Q$  em  $G_{23} - e$ . De acordo com o Corolário 2.3.15,  $H_k - q_{i+1} - q_{i+2} - q_{i+3}$  é conexo, para  $k = 2, 3$  e  $i = 0, 1, 2, 3$ . Portanto, existem arestas em  $G_{23}$  de cada um dentre  $q_0$ ,  $q_1$  e  $q_2$  para vértices em  $I_2$  e para vértices em  $I_3$ . Vimos anteriormente que  $I_2$  e  $I_3$  são conexos. Portanto,  $I_2$  faz parte de uma ponte de  $Q$  em  $G_{23} - e$  que contém  $q_0$ ,  $q_1$  e  $q_2$ . Analogamente,  $I_3$  faz parte de uma ponte de  $Q$  em  $G_{23} - e$  que contém  $q_0$ ,  $q_1$  e  $q_2$ . Então, a ponte contendo  $I_2$  cruza com a ponte contendo  $I_3$ . Sendo assim,  $I_2$  e  $I_3$  estão em regiões distintas de  $\tilde{G}_{23} - e$  delimitadas por  $Q$ . No entanto, a aresta  $e$  tem um extremo em  $I_2$  e outro em  $I_3$ . Portanto,  $e$  cruza com  $Q$  em  $\tilde{G}_{23}$ , uma contradição. De fato,  $G_{23}$  não é planar.

O grafo  $G_{23}$  contém o quadrilátero  $Q$ . Portanto,  $G_{23}$  não é isomorfo ao grafo de Heawood, de acordo com o Lema 2.5.5. Pela definição de  $G_{23}$ , este grafo tem menos vértices do que  $G$ . Pela hipótese deste lema que estamos a provar, o Teorema Principal vale para  $G_{23}$ . Portanto, como  $G_{23}$  não é o grafo de Heawood,  $G_{23}$  não é um spin. Em resumo,  $G_{23}$  é uma presilha Pfaffiana não planar e distinta do Heawood que não é um spin. Portanto,  $G_{23}$  é redutível. Seja  $S$  uma quádrupla de vértices de  $G_{23}$  que reduz  $G_{23}$ . Então,  $G_{23} - S$  tem pelo menos três componentes conexas.

Mostraremos agora que os vértices de  $Q - S$  pertencem a uma mesma componente conexa de  $G_{23} - S$ . Suponha, por absurdo, que um vértice  $v$  e um vértice  $v'$  de  $Q - S$  estejam em componentes conexas distintas de  $G_{23} - S$ . Sendo assim,  $Q - S$  tem pelo

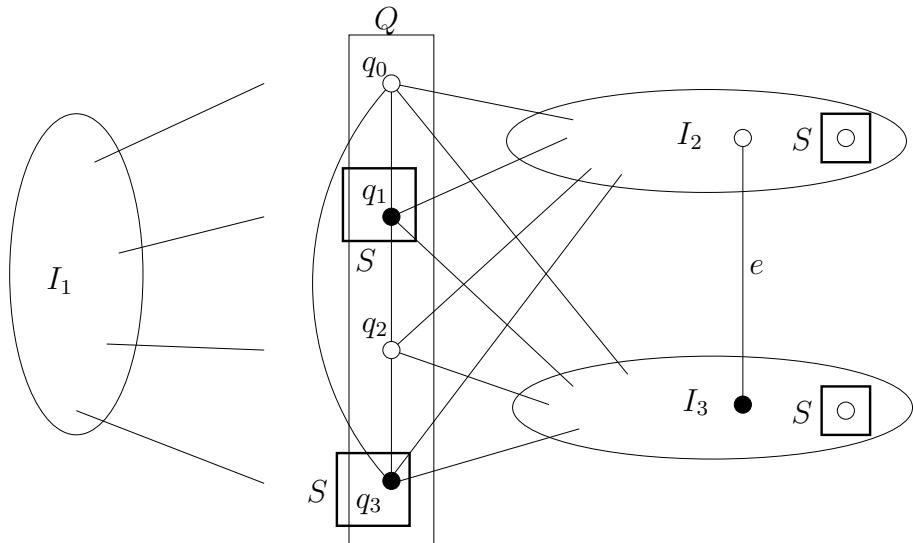


Figura 6.3: O grafo  $G_{23}$ , mostrado junto à componente conexa  $I_1$ , e os vértice de  $S$ .

menos duas componentes conexas. Como  $Q$  é um quadrilátero, temos que  $S$  contém precisamente dois vértices em  $Q$ , ambos na mesma parte da bipartição de  $G_{23}$ . Ajuste a notação de forma que  $S \cap V(Q) = \{q_1, q_3\}$ . Sendo assim, nossa tarefa se resume a mostrar que existe caminho de  $q_0$  a  $q_2$  em  $G_{23} - S$ . Sabemos que  $q_0$  e  $q_2$  têm vizinho em  $I_2$  e em  $I_3$ . Além disso,  $I_2$  e  $I_3$  são conexos. Portanto,  $S$  contém vértice em  $I_2$ , senão existiria um caminho de  $q_0$  a  $q_2$  em  $G_{23} - S$  passando por  $I_2$ . Analogamente,  $I_3$  tem vértice em  $S$ . Vide Figura 6.3. Temos dois casos a analisar: um dentre  $J_2$  e  $J_3$  não tem vértice de contração, ou ambos têm vértice de contração.

**CASO 4** Um dentre  $J_2$  e  $J_3$  não tem vértice de contração.

Ajustando a notação, suponha que  $J_3$  não tem vértice de contração. Então,  $S$  contém precisamente três vértices em  $H_3$ . Portanto, pelo Corolário 2.3.15,  $H_3 - S$  é conexo. Sendo assim, existe caminho de  $q_0$  a  $q_2$  em  $H_3 - S$ . Por outro lado,  $J_3$  não tem vértice de contração, ou seja  $H_3 - S$  é subgrafo de  $G_{23} - S$ . Dessa forma, os vértices de  $Q - S$  estão numa mesma componente conexa de  $G_{23} - S$ .

**CASO 5** Tanto  $J_2$  quanto  $J_3$  tem vértice de contração.

Seja  $\{U, W\}$  a bipartição de  $G_{23}$ , tal que  $q_1 \in U$ . Seja  $\{U', W'\}$  a bipartição de  $H^*$  tal que  $q_1 \in U'$ . Ajuste a notação trocando  $J_2$  e  $J_3$  se necessário de forma que o vértice de contração  $y$  de  $J_3$  esteja em  $W'$ . Seja  $s_3$  o vértice de  $S$  em  $I_3$ . Suponha, inicialmente, que  $s_3$  não esteja em  $Y$ . Então,  $H_3 - S$  é conexo, de acordo com o Corolário 2.3.15. De acordo

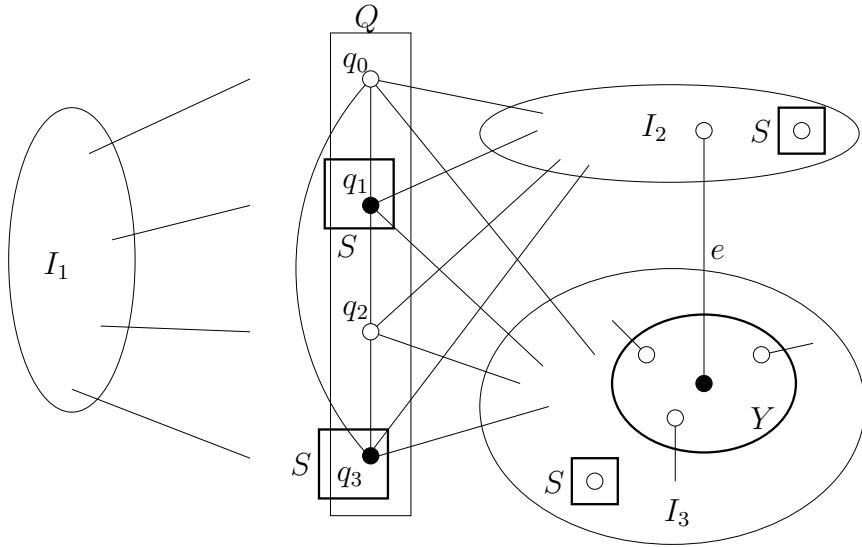


Figura 6.4: O grafo  $G_{23}$ , mostrado junto à componente conexa  $I_1$ , os vértice de  $S$  e o conjunto  $Y$ .

com o Corolário 2.2.3,  $I_3[Y]$  é conexo. Portanto,  $q_0$  e  $q_2$  são ligados em  $G_{23} - S$ . Sendo assim, podemos supor que o vértice de  $S$  em  $I_3$  está em  $Y$ . Nesse caso,  $H_3 - q_1 - q_3 - y$  é conexo, de acordo com o Corolário 2.3.15. Portanto,  $G_{23} - S$  tem caminho de  $q_0$  a  $q_2$ . De fato, em todos os casos analisados chegamos à conclusão de que os vértices de  $Q - S$  pertencem a uma mesma componente conexa de  $G_{23} - S$ .

Sejam  $L_1$  e  $L_2$  duas componentes conexas de  $G_{23} - S$  que não contém vértices em  $Q - S$ . O grafo  $G^* - S$  tem pelo menos três componentes conexas:  $L_1$ ,  $L_2$  e a componente contendo os vértice de  $I_1$ . Nesse caso, tanto  $G^*$  como  $G$  são redutíveis, uma contradição. De fato, o lema é válido.  $\square$

### 6.1.2 $Z$ contém precisamente um vértice de contração de $H$

Provaremos a seguir um lema que implica o caso em que  $Z$  contém precisamente um vértice de contração em  $H$ . Faremos isto pois este resultado mais forte será usado na prova do Lema da Não Planaridade das Contrações.

#### LEMA 6.1.7

Sejam  $G$  uma presilha Pfaffiana irredutível,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ , e  $C := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , com  $C - e$  justo em  $G - e$ , e  $x_0 \in X$ . Sejam  $H := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ , e  $\{U, W\}$  a bipartição de  $H$ . Seja  $Z \subseteq V(H)$ , tal que  $\overline{x} \in Z$ , e  $|Z \cap U| = 2 = |Z \cap W|$ . Seja  $H^*$  o grafo bipartido obtido de  $H$  pela adição de arestas com ambos os extremos em

$Z$ , de forma que  $H^*[Z]$  seja um quadrilátero. Suponha que  $H^*$  é Pfaffiano e  $H - Z$  tenha emparelhamento perfeito. Seja  $c$  o número de componentes conexas de  $H - Z$ . Então,  $c \leq 2$ , com igualdade somente se  $e$  não incide em vértice de  $Z$ .

#### COROLÁRIO 6.1.8

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém precisamente um vértice de contração de  $H$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

Demonstração: Suponha, por absurdo, que  $Z$  reduza  $H$ . Lembremos que, nesse caso,  $H$  é uma  $(Q, R)$ -soma de  $n \geq 3$  presilhas Pfaffianas  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , onde  $Q = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_0)$  e  $V(Q) = Z$ . Além disso,  $J_k = H_k - V(Q)$  é conexo, para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Seja  $H^*$  a  $(Q, \emptyset)$ -soma de  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . De acordo com o Teorema 3.2.1,  $H^*$  é uma presilha Pfaffiana.

Tenha  $H$  um ou dois vértices de contração,  $G$  tem um corte  $D := \partial(Y)$  (possivelmente trivial), com  $Y \subseteq X$ , tal que  $D - e$  é justo em  $G - e$ , e  $H = (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}\{Y \rightarrow y\}$ . Por hipótese,  $\overline{x}$  é o único vértice de contração de  $H$  em  $Z$ . Portanto, se  $y$  é vértice de contração,  $y$  não pertence a  $Z$ . Se  $y$  não é vértice de contração ( $Y$  é trivial), podemos ajustar a notação de forma que  $y$  não pertença a  $Z$ . A  $(D - e)$ -contração  $J := (G - e)\{\overline{Y} \rightarrow \overline{y}\}$  de  $G - e$  é Pfaffiana e coberta por emparelhamentos, pois  $D - e$  é justo em  $G - e$ . Seja  $L := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ . Note que  $H$  e  $J$  são as duas  $(D - e)$ -contrações de  $L$ . Como  $y$  não pertence a  $Z$ , temos que  $Z$  é um subconjunto dos vértices de  $L$ . Seja  $L^*$  o grafo bipartido obtido de  $L$  pela adição de arestas com ambos os extremos em  $Z$ , de forma que  $L^*[Z]$  seja um quadrilátero. As duas  $(D - e)$ -contrações de  $L^*$  são  $H^*$  e  $J$ . Portanto,  $L^*$  é Pfaffiano, de acordo com o Teorema 2.4.7. Como  $H$  é presilha, o grafo  $H - Z$  tem emparelhamento perfeito, de acordo com o Teorema 2.3.8. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $H - Z$ . Seja  $f$  a aresta de  $M$  incidente em  $y$ . Seja  $N$  um emparelhamento perfeito de  $J$  contendo  $f$ . Então,  $M \cup N$  é um emparelhamento perfeito de  $L - Z$ . Em resumo,  $L = (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ ,  $L^*$  é Pfaffiano e  $L - Z$  tem emparelhamento perfeito. Sendo assim, de acordo com o Lema 6.1.7,  $L - Z$  tem no máximo duas componentes conexas. O grafo  $H - Z$  pode ser obtido de  $L - Z$  pela contração de  $Y$  a um vértice. Portanto,  $H - Z$  tem no máximo tantas componentes conexas quanto  $L - Z$ . Sendo assim,  $H - Z$  tem no máximo duas componentes conexas, em contradição à hipótese de absurdo de que  $Z$  reduz  $H$ . De fato,  $Z$  não reduz  $H$  no caso em que  $Z$  tem precisamente um vértice de contração de  $H$ .  $\square$

Demonstração do Lema 6.1.7: Suponha, por absurdo, que  $Z$  contenha precisamente um vértice de contração de  $H$  e que ou (i)  $Z$  reduza  $H$ , ou (ii)  $e$  incida em vértice de  $Z$  e  $H - Z$  seja desconexo. Sejam  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , com  $n \geq 2$ , as componentes conexas de  $H - Z$ . Se

$x_0$  pertence a  $J_i$ , para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então  $n \geq 3$ . Sendo assim, ajuste a notação de forma que  $x_0$  não pertença a  $J_1$  nem a  $J_2$ . A seguir, provaremos a Proposição 6.1.9 que mostra que precisamente um vértice de  $\overline{X}$  é adjacente a vértices de  $V(J_1) \cup V(J_2)$ , e que este vértice está em  $\overline{X}_+$ . Seja  $v$  este vértice, e seja  $\{q_1, q_2, q_3\} = Z - \overline{x}$ . Então,  $G - \{v, q_1, q_2, q_3\}$  tem pelo menos três componentes conexas:  $J_1$ ,  $J_2$  e a componente contendo  $\overline{X} - v$ . Sendo assim,  $G$  é redutível, uma contradição. De fato, o Lema 6.1.7 é válido.

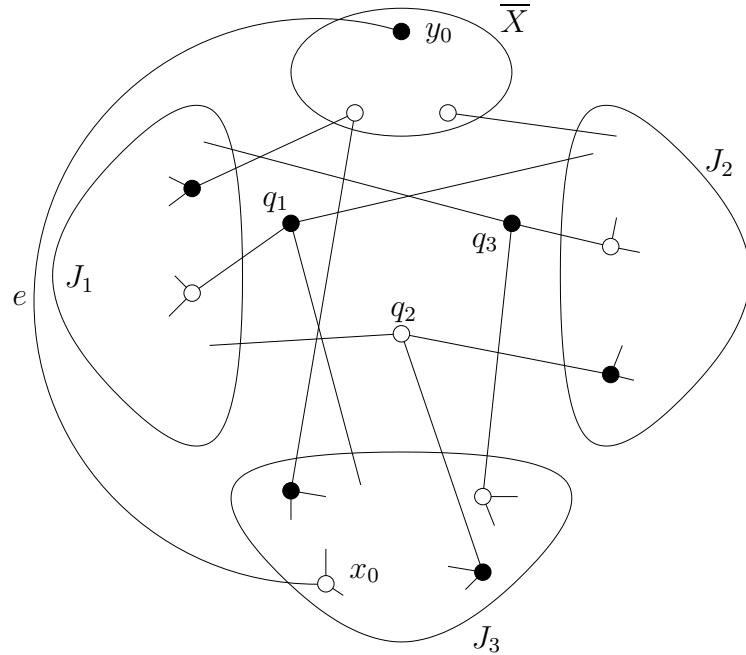


Figura 6.5: Grafo  $G$  no caso em que  $\overline{x}$  é o único vértice de contração da quádrupla redutora  $V(Q)$  de  $H$ .

### PROPOSIÇÃO 6.1.9

O conjunto  $\overline{X}$  tem somente um vértice adjacente a vértices em  $V(J_1) \cup V(J_2)$ , e este vértice está em  $\overline{X}_+$ .

Demonstração: Seja  $f$  uma aresta que liga  $\overline{X}$  a  $V(J_1) \cup V(J_2)$ . Como  $V(J_1) \cup V(J_2)$  está em  $X$ , temos que  $f$  está em  $C$ . Pelo ajuste de notação anterior,  $x_0$  não pertence a  $V(J_1) \cup V(J_2)$ . Portanto,  $f$  está em  $C - e$ . Como  $C - e$  é justo em  $G - e$ , o extremo de  $f$  em  $\overline{X}$  está em  $\overline{X}_+$ . Este argumento vale para toda aresta que liga  $\overline{X}$  a  $V(J_1) \cup V(J_2)$ . Suponha, por absurdo, que  $\overline{X}$  tenha pelo menos dois vértices adjacentes a vértices de  $V(J_1) \cup V(J_2)$ . Chegaremos a uma contradição à hipótese de que  $G$  é Pfaffiano. Seja  $\{q_1, q_2, q_3\} = Z - \overline{x}$ . Pelo Corolário 2.3.13,  $G - \{q_1, q_2, q_3\}$  é conexo. Portanto, existe

vértice  $v_i$  de  $\overline{X}$  adjacente a vértice de  $J_i$ , para  $i = 1, 2$  (possivelmente  $v_1 = v_2$ ). Se  $v_1 = v_2$ , então, pela hipótese de absurdo adotada, existe vértice  $v'$  distinto de  $v_1 = v_2$  adjacente a vértice de  $V(J_1) \cup V(J_2)$ . Nesse caso, ajuste a notação de forma que  $v'$  seja adjacente a vértice de  $J_2$ , e defina  $v'$  como o novo  $v_2$ . Em resumo, podemos ajustar a notação de forma que  $v_1 \neq v_2$ , e que  $v_i$  seja adjacente a vértice de  $J_i$ , para  $i = 1, 2$ .

Sejam  $G' := G + v_1q_1 + v_1q_3 + v_2q_1 + v_2q_3$ , e  $C' := \partial_{G'}(X)$ . Seja  $H' := (G' - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$  uma das  $(C' - e)$ -contrações de  $G' - e$ . Seja  $Q := (\overline{x}, q_1, q_2, q_3, \overline{x})$  quadrilátero formado pelos vértices de  $Z$  tal que  $H + E(Q) = H^*$  seja bipartido. Cada aresta de  $\{v_1q_1, v_1q_3, v_2q_1, v_2q_3\}$  tem em  $H'$  os extremos  $\overline{x}$  e  $q_i$ , para algum  $i \in \{1, 3\}$ . Ou seja, as arestas adicionadas são múltiplas de arestas de  $E(Q)$ . Por hipótese,  $H^* = H + E(Q)$  é Pfaffiano. Portanto,  $H' + E(Q)$  e  $H'$  são Pfaffianos. Seja  $(G' - e)\{X \rightarrow x\}$  a outra  $(C' - e)$ -contração de  $G' - e$ . Cada aresta de  $\{v_1q_1, v_1q_3, v_2q_1, v_2q_3\}$  tem em  $(G' - e)\{X \rightarrow x\}$  os extremos  $x$  e  $v_i$ , para algum  $i \in \{1, 2\}$ . O vértice  $v_i$  é adjacente a vértice de  $J_i$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $V(J_i) \subset X$ , temos que  $v_1x$  e  $v_2x$  estão em  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$ . Portanto,  $(G' - e)\{X \rightarrow x\}$  é igual a  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$ , a menos de arestas múltiplas. Como  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$  é Pfaffiano,  $(G' - e)\{X \rightarrow x\}$  é Pfaffiano. Sendo assim, ambas as  $(C' - e)$ -contrações de  $G' - e$  são Pfaffianas.

Sendo assim, pelo Lema 2.4.6,  $H'$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(H')$  na qual  $\overline{x}$  é um sorvedouro. Analogamente,  $(G' - e)\{X \rightarrow x\}$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $x$  é uma fonte. Então, pelo Teorema 2.4.7, a extensão  $D(G' - e)$  dessas orientações a  $G' - e$  é Pfaffiana. Pelo Lema 2.4.9,  $D(G' - e)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G')$  de  $G'$  cuja restrição a  $G$  é Pfaffiana. Pelo Teorema 2.4.3,  $D(H')$  pode ser estendida a uma orientação  $D(H^*)$  Pfaffiana de  $H^* = H' + E(Q)$ . Seja  $s$  o sinal de todo emparelhamento perfeito de  $G - e$  em  $D(G')$ . A seguir, mostraremos um emparelhamento perfeito de  $G$  que tem sinal  $-s$  em  $D(G)$ , em contradição à conclusão de que  $D(G)$  é Pfaffiana.

Seja  $M$  a extensão de  $\{v_1q_1, v_2q_3\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G'$ . Sejam  $Q' := (v_1, q_1, v_2, q_3, v_1)$ , e  $M' := M \oplus E(Q')$ . O circuito  $Q'$  tem quatro arestas e está inteiramente contido no corte  $C' - e$ . Como  $C' - e$  é orientado em  $D(G')$ , a orientação de  $Q'$  é par em  $D(G')$ . Portanto, um dentre  $M$  e  $M'$  tem sinal  $-s$  em  $D(G')$ . Ajuste a notação de  $q_1$  e  $q_3$  de forma que  $M$  tenha sinal  $-s$  em  $D(G')$ .

Mostraremos a seguir que  $M$  não tem aresta em  $\partial_{G'}(V(J_i))$ , para  $i = 1, 2$ . Pelo Corolário 2.3.17, as arestas  $e$ ,  $v_1q_1$  e  $v_2q_3$  são as únicas arestas de  $C'$  em  $M$ . Portanto,  $x_0$ ,  $q_1$  e  $q_3$  são os únicos vértices de  $X$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $\overline{X}$ . Seja  $T := (V(Q) - \overline{x}) \cup \overline{X}$ . Note que  $H - Z$  é igual a  $G - T$ . Se  $x_0 = q_2$ , então nenhuma aresta de  $M$  está em  $\partial_{G'}(J_i)$ , para  $i = 1, 2$ , pois os vértices de  $T$  somente estão emparelhados entre si em  $M$ . Sendo assim, podemos supor que  $x_0$  é distinto de  $q_2$ . Então, temos que  $x_0$  está em uma componente conexa  $K$  de  $G - T$ . Por hipótese, toda componente conexa de  $G - T = H - Z$  tem emparelhamento perfeito. Seja  $\{U', W'\}$  a bipartição de  $G$  tal

que  $x_0 \in U'$ . Então,  $K$  tem o mesmo número de vértices em  $U'$  e em  $W'$ . Sendo assim, como  $x_0 \in U'$ , um vértice  $w$  em  $W'$  de  $K$  está emparelhado por  $M$  com vértice de fora de  $K$ . Então,  $w$  está emparelhado por  $M$  com vértice de  $T$ . No entanto,  $w$  não é um dos três vértices ( $x_0, q_1$  e  $q_3$ ) emparelhados por  $M$  com vértice de  $\overline{X}$ . Além disso,  $q_1, q_3$  e  $w$  estão na mesma parte da bipartição de  $G$ . Portanto,  $q_2w_1$  está em  $M$ . Sendo assim, os vértices  $T$  estão emparelhados por  $M$  somente com vértices de  $T \cup V(K)$ . Pelo ajuste de notação anterior,  $J_1$  e  $J_2$  são distintos de  $K$ . Portanto, temos que nenhuma aresta de  $M$  está em  $\partial_{G'}(J_i)$ , para  $i = 1, 2$ .

Encontraremos agora um circuito  $M$ -alternado  $Q_1$  contendo  $v_1q_1$  inteiramente contido em  $G'[V(J_1) + v_1 + q_1]$ , cuja orientação em  $D(G')$  é ímpar. Seja  $w_1$  um vértice de  $J_1$  adjacente a  $v_1$ . Seja  $M_1$  uma extensão de  $\{v_1w_1, q_3v_2\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G'$ . Como  $M_1$  tem duas arestas em  $C' - e$ , a aresta  $e$  está em  $M_1$ . Pelo Corolário 2.3.17,  $x_0, w_1$  e  $q_3$  são os únicos vértices de  $X$  emparelhados por  $M_1$  com vértices de  $\overline{X}$ . Pelo ajuste de notação inicial, temos que  $x_0$  não está em  $J_1$ . No entanto, sabemos que  $J_1$  tem o mesmo número de vértices em  $U'$  e em  $W'$ . Portanto, existe um vértice  $u_1$  em  $U'$  de  $J_1$  emparelhado por  $M_1$  a um vértice de  $T - \overline{X}$  em  $W'$ , ou seja a um dentre  $q_1$  e  $q_3$ . Como  $q_3v_2$  está em  $M_1$ , temos que  $q_1u_1$  está em  $M_1$ . Então,  $q_1$  é o único vértice em  $W$  fora de  $J_1$  emparelhado por  $M_1$  com vértice de  $J_1$ . Sendo assim,  $\{v_1w_1, u_1q_1\}$  é o conjunto de arestas de  $M_1$  em  $\partial_{G'}(V(J_1))$ .

Por hipótese, cada componente conexa  $J_i$  de  $H - Z$  tem emparelhamento perfeito. Seja  $M(J_i)$  um emparelhamento perfeito de uma componente  $J_i$ . Defina  $N_1$  como sendo  $M_1 \cap E(G'[V(J_1) + v_1 + q_1]) + q_2q_3 + \bigcup_{i=2}^n M(J_i)$ , um emparelhamento perfeito do grafo  $H' + E(Q)$ . Defina  $N$  como sendo  $M \cap E(G'[V(J_1) + v_1 + q_1]) + q_2q_3 + \bigcup_{i=2}^n M(J_i)$ , um emparelhamento perfeito de  $H' + E(Q)$ . Seja  $Q_1$  o circuito  $N_1, N$ -alternado que contém  $v_1q_1$ . Sendo assim,  $Q_1$  é conforme em  $H' + E(Q)$ . Lembremos que  $D(H^*)$  foi definido como uma orientação Pfaffiana de  $H' + E(Q)$  que estende  $D(H')$ . Portanto, a orientação de  $Q_1$  em  $D(H^*)$  é ímpar. Além disso,  $Q_1$  não contém aresta do conjunto  $\{q_1q_2, q_2q_3\}$ , que é o conjunto de arestas que estão em  $E(Q)$ , mas não necessariamente estão em  $E(H')$ . Portanto, a orientação de  $Q_1$  é ímpar em  $D(H')$ , orientação Pfaffiana de  $H'$ . No entanto,  $D(H')$  é uma restrição de  $D(G')$ . Assim, a orientação de  $Q_1$  em  $D(G')$  é ímpar, e os únicos vértices de  $Q_1$  fora de  $J_1$  são  $v_1$  e  $q_1$ . Então, como  $Q_1$  é  $N$ -alternado, e  $N$  contém a restrição de  $M$  às arestas de  $G'[V(J_1) + v_1 + q_1]$ , temos que  $Q_1$  é  $M$ -alternado. Portanto,  $Q_1$  é conforme em  $G'$  e sua orientação é ímpar em  $D(G')$ . Dessa forma, o sinal de  $M' := M \oplus E(Q_1)$  em  $D(G')$  é igual ao sinal de  $M$ , que é igual a  $-s$ . Analogamente, existe um circuito  $M$ -alternado  $Q_2$  cujos vértices fora de  $J_2$  são  $v_2$  e  $q_3$ , e cuja orientação em  $D(G')$  é ímpar. Como  $V(Q_1) \subseteq V(J_1) + v_1 + q_1$ , e  $V(Q_2) \subseteq V(J_2) + v_2 + q_3$ , temos que  $V(Q_1) \cap V(Q_2) = \emptyset$ . Portanto,  $M'' := M' \oplus E(Q_2)$  é emparelhamento perfeito de  $G'$  cujo sinal é  $-s$  em  $D(G')$ . No entanto, nenhuma aresta de  $\{v_1q_1, v_1q_3, v_2q_3, v_2q_1\}$  está em

$M''$ . Portanto,  $M''$  é um emparelhamento perfeito de  $G$ , cujo sinal em  $D(G')$ , e portanto em  $D(G)$ , é  $-s$ . Mas,  $G - e$  tem emparelhamento perfeito com sinal  $s$  em  $D(G)$ . Isto é uma contradição à conclusão anterior de que  $D(G)$  é Pfaffiana. De fato,  $\overline{X}$  tem somente um vértice adjacente a vértices de  $J_1$  e  $J_2$ , e este vértice está em  $\overline{X}_+$ .  $\square$

 $\square$ 

### 6.1.3 $Z$ contém dois vértices de contração de $H$

A afirmação do Lema a seguir é válida mesmo quando é relaxada a restrição da aresta  $e$  ser magra. No entanto, este resultado foi omitido pois a prova do Teorema Principal é possível somente com esta versão restrita do Lema, e a prova para esta versão é mais simples.

LEMA 6.1.10

Seja  $G$  um spin,  $e$  uma aresta magra de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$  contendo dois vértices de contração de  $H$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que  $Z$  reduza  $H$ . Lembremos que, nesse caso,  $H$  é uma  $(Q, R)$ -soma de  $n \geq 3$  presilhas Pfaffianas  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , onde  $Q$  é o circuito  $(q_0, q_1, q_2, q_3, q_0)$  e  $V(Q) = Z$ . Além disso,  $J_k = H_k - V(Q)$  é conexo, para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Por hipótese, o conjunto  $Z$  tem dois vértices de contração, digamos  $x$  e  $y$ . De acordo com o Corolário 2.3.19,  $x$  e  $y$  estão em partes distintas da bipartição de  $H$ . Ajuste a notação de forma que  $x = q_1$  e  $y = q_2$ . Assim,  $Q = (q_0, x, y, q_3, q_0)$ . Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , seja

$$Q_i := \begin{cases} \{q_i\}, & \text{se } q_i \text{ não é vértice de contração de } H \ (i = 0, 3) \\ \text{o conjunto de vértices de } G \text{ contraídos no vértice } q_i \text{ em } H, \text{ c. c.} & (i = 1, 2). \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 6.1.11

Sejam  $v_i \in Q_i$ , e  $v_{i+1} \in Q_{i+1}$ , onde os índices são tomados módulo quatro, e  $k$  um inteiro,  $1 \leq k \leq n$  tais que:

- $v_i$  é ligado por uma aresta  $e_i$  de  $G$  a um vértice  $w_i$  de  $J_k$ ;
- $v_{i+1}$  é ligado por uma aresta  $e_{i+1}$  de  $G$  a um vértice  $w_{i+1}$  de  $J_k$ .

Vide Figura 6.6. Se  $H_k$  tem um emparelhamento perfeito que contém  $e_i$ ,  $e_{i+1}$ , e a aresta  $q_{i+2}q_{i+3}$  de  $Q$ , então diz-se que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos. Representa-se por  $v_i \xrightarrow{k} v_{i+1}$ . Estendemos esta definição para o caso em que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são adjacentes em  $G$ . Nesse caso, dizemos que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos para todo  $k$ .

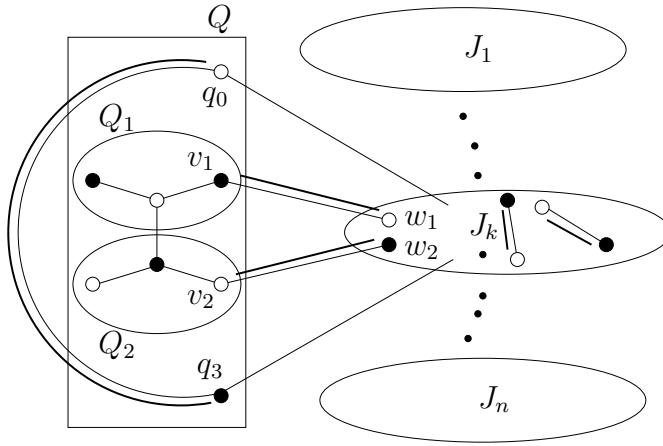


Figura 6.6: O grafo  $G$  e em negrito as arestas de um emparelhamento perfeito de  $H_k$  que define que  $v_1$  e  $v_2$  são  $H_k$ -conexos.

Como a aresta  $e$  é magra em  $G$ , temos que  $Q_1$  consiste de três vértices, digamos  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$ , e  $Q_2$  consiste de três vértices, digamos  $y_0$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , onde  $x_0$  e  $y_0$  são os extremos de  $e$ . Além disso,  $Q_0$  e  $Q_3$  são unitários.

#### NOTAÇÃO 6.1.12

Chamaremos de  $T$  o conjunto  $\bigcup Q_i$ .

#### DEFINIÇÃO 6.1.13

Seja  $G^*$  a presilha obtida de  $G$  pela adição das arestas em

$$\Delta := \{uw : \exists j, u \xrightarrow{j} w; u, w \in \bigcup Q_i\} - E(G).$$

#### DEFINIÇÃO 6.1.14

Dizemos que uma aresta  $f = v_i v_{i+1}$  de  $E(G^*)$  tem cor  $k$  se  $v_i \xrightarrow{k} v_{i+1}$ .

Definiremos a seguir uma orientação para  $G^*$  que restrita tanto a  $G$  como a  $G^* - e$  é Pfaffiana. Para tanto, mostraremos que  $(G^* - e)\{Q_1 \rightarrow x\}\{Q_2 \rightarrow y\}$ ,  $(G^* - e)\{\overline{Q_1} \rightarrow \bar{x}\}$  e  $(G^* - e)\{\overline{Q_2} \rightarrow \bar{y}\}$  são Pfaffianos. O conjunto  $\{x_0\}$  é a parte minoritária de  $Q_1$ , e  $\{y_0\}$  é a parte minoritária de  $Q_2$ . Os vértices  $x_0$  e  $y_0$  não têm vizinhos em  $J_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Portanto, nenhuma aresta de  $\Delta$  incide nem em  $x_0$  nem em  $y_0$ . Então, como tanto  $Q_1$  como  $Q_2$  são praias de cortes justos de  $G - e$ , tanto  $Q_1$  como  $Q_2$  são praias de cortes justos de  $G^* - e$ . Sendo assim, a aresta  $e$  também é magra em  $G^* - e$ , e de índice 2. Além disso, a presilha interna de  $G^* - e$  é isomorfa, a menos de arestas múltiplas, a  $H + R$ . Seja  $H^*$  a  $(Q, \emptyset)$ -soma de  $H_1, H_2, \dots, H_n$ . De acordo com o Teorema 3.2.1,  $H^*$

é presilha Pfaffiana. Note que  $H^* = H + R$ , e que  $H^* = (G^* - e)\{Q_1 \rightarrow x\}\{Q_2 \rightarrow y\}$ . Além disso,  $(G^* - e)\{\overline{Q_1} \rightarrow \bar{x}\}$  e  $(G^* - e)\{\overline{Q_2} \rightarrow \bar{y}\}$  também são Pfaffianos. Então, pelo Lema 2.4.6,  $H^*$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(H^*)$  na qual  $x$  é fonte e  $y$  é sorvedouro. Por este mesmo lema,  $(G^* - e)\{\overline{Q_1} \rightarrow \bar{x}\}$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $\bar{x}$  é sorvedouro. Analogamente,  $(G^* - e)\{\overline{Q_2} \rightarrow \bar{y}\}$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $\bar{y}$  é fonte. Portanto, pelo Teorema 2.4.7,  $G^* - e$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(G^* - e)$  tal que  $Q_1$  é uma fonte de  $\partial(Q_1)$  e  $Q_2$  um sorvedouro de  $\partial(Q_2)$ . Pelo Lema 2.4.9,  $D(G^* - e)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G^*)$  de  $G^*$  cuja restrição  $D(G)$  a  $G$  é Pfaffiana. Além disso,  $x$  é fonte e  $y$  é sorvedouro na restrição de  $D(G^*)$  a  $H^*$ .

A restrição de  $D(G^*)$  a  $G^* - e$  é Pfaffiana. Seja  $s^*$  o sinal em  $D(G^*)$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G^* - e$ . A restrição de  $D(G^*)$  a  $G$  também é Pfaffiana. Seja  $s$  o sinal em  $D(G^*)$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G$ . Todo emparelhamento perfeito de  $G - e$  é um emparelhamento perfeito tanto de  $G^* - e$  quanto de  $G$ . Portanto,  $s^* = s$ .

#### LEMA 6.1.15

Seja  $v_i \in Q_i$  um vértice adjacente a vértice de  $J_k$ . Então, existe um vértice  $v_{i+1} \in Q_{i+1}$ , adjacente a vértice de  $J_k$ , tal que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos.

Demonstração: Como, por hipótese,  $v_i$  é adjacente a vértice de  $J_k$ , existe uma aresta  $e_i$  com um extremo  $v_i$  e outro extremo em  $J_k$ . Em  $H_k$ , a aresta  $e_i$  incide em  $q_i$ . Como  $H_k$  é uma presilha, todo par de arestas não adjacentes de  $H_k$  pertence a um emparelhamento perfeito. Seja  $M_k$  um emparelhamento perfeito de  $H_k$  contendo as arestas  $e_i$  e  $q_{i+2}q_{i+3}$ . Seja  $e_{i+1}$  a aresta de  $M_k$  incidente em  $q_{i+1}$ . Uma simples contagem nos mostra que  $e_{i+1}$  liga  $v_{i+1}$  a um vértice de  $J_k$ . Então,  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos.  $\square$

#### LEMA 6.1.16

Para  $i = 0, 1, 2, 3$  e para  $k = 1, 2, \dots, n$ , o conjunto  $Q_i$  contém um vértice adjacente a vértice de  $J_k$ .

Demonstração: O grafo  $H_k$  é uma presilha, em que  $Q$  é um quadrilátero. Então, pelo Corolário 2.3.15,  $H_k - (V(Q) - q_i)$  é conexo, para  $i = 0, 1, 2, 3$ . Logo,  $q_i$  é adjacente em  $H_k$  a vértice em  $J_k$ . Então, algum vértice de  $Q_i$  é adjacente em  $G$  a vértice em  $J_k$ .  $\square$

#### LEMA 6.1.17

Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , todo vértice de  $Q_i^+$  é adjacente em  $G^*$  a algum vértice de  $Q_{i-1}$  e a algum vértice de  $Q_{i+1}$ .

Demonstração: Seja  $v$  um vértice de  $Q_i^+$ . Suponhamos, inicialmente, que  $v$  seja adjacente em  $G$  a vértices em  $V(G) - T$ . Seja  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  tal que  $v$  é adjacente a vértice de  $J_k$ . Então, pelo Lema 6.1.15,  $v$  é  $H_k$ -conexo a algum vértice  $w$  de  $Q_{i+1}$ . Logo, em  $G^*$ ,  $v$  e  $w$

são adjacentes. Analogamente, pode-se mostrar que se  $v$  é adjacente em  $G$  a vértices de  $V(G) - T$ , então  $v$  é adjacente em  $G^*$  a vértice de  $Q_{i-1}$ .

Vamos considerar agora o caso em que  $v$  não é adjacente em  $G$  a nenhum vértice em  $V(G) - T$ . Como  $Q_0$  e  $Q_3$  são unitários, então  $i = 1$  ou  $i = 2$ , pelo Lema 6.1.16. O grafo  $G^*$  é presilha. Portanto, o vértice  $v$  tem três ou mais vizinhos em  $G^*$ . Por outro lado, dado que  $N(v) \subseteq T$ , temos que  $N(v) \subseteq \{x_0, q_0, y_1, y_2\}$ . Sendo assim,  $v$  é necessariamente adjacente a um vértice de  $Q_2$ . Por outro lado,  $G^* - y_1 - y_2 - x_2$  é conexo, pelo Corolário 2.3.15. Portanto,  $x_1$  é adjacente a  $q_0$ , caso contrário  $G^*[\{x_1, x_0, y_0\}]$  seria uma das duas ou mais componentes conexas de  $G^* - y_1 - y_2 - x_2$ , contradição.  $\square$

#### LEMA 6.1.18

Para  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $v$  um vértice de  $Q_i^+$ ,  $w$  um vértice de  $Q_{i+1}^+$  e para  $k = 1, 2, \dots, n$ , pelo menos um dentre  $v$  e  $w$  é adjacente a vértice de  $V(G) - T - V(J_k)$ .

Demonstração: Por absurdo. Suponha que nem  $v$  nem  $w$  é adjacente a vértices de  $V(G) - T - V(J_k)$ . Ajuste a notação de forma que  $k = 3$ . Então, nenhum vértice de  $J_1$ , nem de  $J_2$ , é adjacente a  $v$  nem a  $w$ . Assim, o conjunto  $Z' := (\bigcup Q_i^+) - v - w$  consiste de quatro vértices, e  $G - Z'$  tem três ou mais componentes conexas:  $J_1$ ,  $J_2$  e a componente conexa que contém  $v$ . Ademais, seja  $\{U, W\}$  a bipartição de  $G$ . Metade dos vértices de  $\bigcup Q_i^+$  estão em  $U$ , a outra metade em  $W$ . Os vértices  $v$  e  $w$  pertencem a partes distintas de  $\{U, W\}$ . Assim,  $Z'$  contém dois vértices em  $U$  e dois vértices em  $W$ . Logo,  $Z'$  reduz  $G$ , contradição.  $\square$

#### LEMA 6.1.19 (LEMA DA DESCARGA)

Seja  $f$  uma aresta de  $\Delta$  de cor  $k$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$  contendo  $f$ , tal que  $M \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ . Então,  $G^*$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$  tal que:

- $M' \cap \Delta = (M \cap \Delta) - f$ ;
- $M' \cap \partial(V(J_\ell)) = M \cap \partial(V(J_\ell))$ , para todo  $\ell$  distinto de  $k$ ;
- o sinal de  $M'$  é igual ao sinal de  $M$  em  $D(G^*)$ .

Demonstração: Sejam  $v_i$  e  $v_{i+1}$  os extremos de  $f$ . Ajuste a notação de forma que  $v_i \in Q_i$  e  $v_{i+1} \in Q_{i+1}$ . Por hipótese,  $M \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ , e portanto  $M \cap E(J_k)$  é emparelhamento perfeito de  $J_k$ . Assim,  $N := M \cap E(J_k) + q_i q_{i+1} + q_{i+2} q_{i+3}$  é emparelhamento perfeito de  $H_k$ . Como  $f$  tem cor  $k$  e pertence a  $\Delta$ , então existem arestas  $e_i$  e  $e_{i+1}$ , que em  $G$  ligam, respectivamente,  $v_i$  e  $v_{i+1}$  a vértice em  $J_k$ , e que pertencem, juntamente com  $q_{i+2} q_{i+3}$ , a um emparelhamento perfeito  $N'$  de  $H_k$ . Então,  $(e_i, q_i q_{i+1}, e_{i+1})$  é parte de um circuito  $N, N'$ -alternado  $Q'$ . Como  $q_{i+2} q_{i+3}$  pertence a  $N \cap N'$ , temos que  $Q'$  tem seus vértices

em  $V(J_k) + q_i + q_{i+1}$ . Além disso,  $e_i$  e  $e_{i+1}$  incidem em  $G^*$  em  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , respectivamente. Portanto,  $Q^* := Q' - q_i q_{i+1} + f$  é circuito  $M$ -alternado de  $G^*$ , inteiramente contido em  $G^*[V(J_k) + v_i + v_{i+1}]$ .

Seja  $M' := M \oplus E(Q^*)$ . A validade das duas primeiras propriedades no enunciado do lema seguem imediatamente. Para completar a demonstração, resta mostrar que a orientação de  $Q^*$  em  $D(G^*)$  é ímpar. O grafo  $H_k$  é conforme em  $H^*$ . Dado que  $D(H^*)$  é Pfaffiana, segue que sua restrição  $D(H_k)$  a  $H_k$  é Pfaffiana. Assim, a orientação do circuito  $Q'$  em  $D(H_k)$  é ímpar. Logo, sua orientação em  $D(H^*)$  também é ímpar. Por outro lado,  $D(H^*)$  é restrição de  $D(G^*)$  a  $H^*$ . Além disso, a aresta  $f$  em  $D(G^*)$  sai de  $v_i$  e entra em  $v_{i+1}$  se e somente se a aresta  $q_i q_{i+1}$  em  $D(H^*)$  sai de  $q_i$  e entra em  $q_{i+1}$ . Assim, a orientação de  $Q^*$  em  $D(G^*)$  é igual à orientação de  $Q'$  em  $D(H^*)$ . De fato, a orientação de  $Q^*$  é ímpar em  $D(G^*)$ .  $\square$

#### LEMA 6.1.20 (LEMA DA CARGA)

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$  tal que  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 2$ . Então,  $G^*$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$  tal que:

- $M' \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ ;
- $M' \cap \partial(V(J_j)) = M \cap \partial(V(J_j))$ , para todo  $j \neq k$ ;
- o sinal de  $M'$  é igual ao sinal de  $M$  em  $D(G^*)$ .

Demonstração: Sejam  $e_i$  e  $e_j$  as arestas de  $M$  em  $\partial(V(J_k))$ ,  $v_i \in Q_i$  e  $v_j \in Q_j$ , respectivamente, seus extremos fora de  $V(J_k)$ . Então,  $j = i + 1$  ou  $j = i - 1$ . Ajuste a notação de forma que  $j = i + 1$ . No grafo  $H_k$ , o conjunto  $N := (M \cap E(J_k)) \cup \{e_i, e_{i+1}, q_{i+2}q_{i+3}\}$  é um emparelhamento perfeito. Logo,  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos. Seja  $f$  a aresta de  $G^*$  cujos extremos são  $v_i$  e  $v_{i+1}$ . Em  $H_k$ , a aresta  $f$  tem os extremos  $q_i$  e  $q_{i+1}$ . Seja  $N'$  a extensão de  $\{f, q_{i+2}q_{i+3}\}$  a um emparelhamento perfeito de  $H_k$ . Então,  $f$  pertence a um circuito  $N, N'$ -alternado  $Q'$ . Como  $q_{i+2}q_{i+3}$  pertence a  $N \cap N'$ , temos que  $Q'$  tem seus vértices em  $V(J_k) + q_i + q_{i+1}$ . Sendo assim, as arestas de  $Q'$  induzem um circuito  $M$ -alternado  $Q^*$  em  $G^*$ , cujos vértices estão em  $V(J_k) + v_i + v_{i+1}$ .

Seja  $M' := M \oplus E(Q^*)$ . A validade das duas primeiras propriedades no enunciado do lema seguem imediatamente. Para completar a demonstração, resta mostrar que a orientação de  $Q^*$  em  $D(G^*)$  é ímpar. O grafo  $H_k$  é conforme em  $H^*$ . Dado que  $D(H^*)$  é Pfaffiana, segue que sua restrição  $D(H_k)$  a  $H_k$  é Pfaffiana. Assim, a orientação do circuito  $Q'$  em  $D(H_k)$  é ímpar. Logo, sua orientação em  $D(H^*)$  também é ímpar. Por outro lado,  $D(H^*)$  é restrição de  $D(G^*)$  a  $H^*$ . Além disso, a aresta  $f$  em  $D(G^*)$  sai de  $v_i$  e entra em  $v_{i+1}$  se e somente se  $f$  em  $D(H^*)$  sai de  $q_i$  e entra em  $q_{i+1}$ . Assim, a orientação de  $Q^*$

em  $D(G^\star)$  é igual à orientação de  $Q'$  em  $D(H^\star)$ . De fato, a orientação de  $Q^\star$  em  $D(G^\star)$  é ímpar.  $\square$

A seguir, provaremos um resultado que tem importância fundamental para a prova deste caso do Lema da Herança da Redutibilidade.

LEMA 6.1.21

Em  $G^*$  não existem duas arestas adjacentes que ligam vértice de  $Q_1$  a vértice de  $Q_2$ .

Demonstração: Por absurdo. Suponhamos que existam tais arestas. Ajuste a notação de forma que  $x_1$  seja adjacente em  $G^*$  tanto a  $y_1$  quanto a  $y_2$ . Vide Figura 6.7. Pelo Lema 6.1.17,  $y_1$  e  $y_2$  são ambos adjacentes a  $q_3$ . Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , seja  $M_k$  um emparelhamento perfeito de  $J_k$ . O conjunto  $(\bigcup_k M_k) \cup \{e, q_0x_2\}$  pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de  $G^*$  de duas maneiras: ou acrescentamos as arestas  $x_1y_1$  e  $y_2q_3$  ou acrescentamos as arestas  $x_1y_2$  e  $y_1q_3$ , obtendo, respectivamente,  $M$  e  $M'$ . Por definição de  $D(G^*)$ , o corte  $\partial(Q_2)$  é orientado. Portanto, o quadrilátero gerado por  $x_1, y_1, y_2$  e  $q_3$  tem orientação par. Os emparelhamentos  $M$  e  $M'$  têm sinais distintos. Ajuste a notação de forma que  $M$  tenha sinal  $-s$ , onde  $s$  é o sinal comum em  $D(G^*)$  dos emparelhamentos perfeitos tanto de  $G$  quanto de  $G^* - e$ .

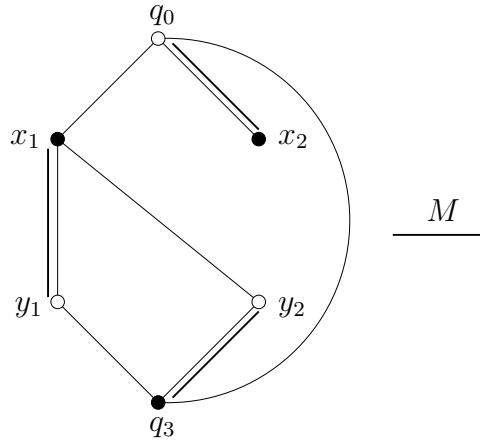


Figura 6.7: Ilustração da demonstração do Lema 6.1.21. As arestas duplas são de  $M$ .

Vamos obter uma contradição mostrando que o sinal de  $M$  é  $s$ . Para tanto, vamos mostrar que é possível atribuir três cores distintas, dentre suas cores, para as três arestas  $q_0x_2$ ,  $x_1y_1$  e  $y_2q_3$ . De fato, suponhamos que seja possível atribuir as três cores. Pelo Lema da Descarga 6.1.19 aplicado às arestas dentre  $q_0x_2$ ,  $x_1y_1$  e  $y_2q_3$  que pertencerem a  $\Delta$ , o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual ao sinal de um emparelhamento  $M'$  de  $G^*$  que não tem aresta em  $\Delta$ . Nesse caso,  $M'$  é emparelhamento de  $G$ . Então, o sinal de  $M'$  em

$D(G^*)$  é igual a  $s$ , o sinal de todo emparelhamento perfeito de  $G$  em  $D(G^*)$ . Logo,  $M$  também tem sinal  $s$  em  $D(G^*)$ , uma contradição. A demonstração do lema se reduz assim à demonstração da possibilidade de atribuição de três cores distintas, dentre suas cores, às arestas  $q_0x_2$ ,  $x_1y_1$  e  $y_2q_3$ .

Vamos inicialmente mostrar que a aresta  $q_0x_2$  tem uma cor  $c_0$  e a aresta  $x_1y_1$  tem uma cor  $c_1$  tais que  $c_0 \neq c_1$ . Esta afirmação é certamente verdadeira se uma das arestas tem mais de uma cor. Em particular, isto ocorre se uma das arestas pertence a  $G$ . Suponhamos portanto que  $q_0x_2$  tenha apenas uma cor  $c_0$ . Pelo Lema 6.1.15,  $y_2$  não é adjacente a nenhum vértice em  $J_k$ , para todo  $k \neq c_0$ . Pelo Lema 6.1.18 aplicado a  $x_2$  e a  $y_1$ , existe um  $k$  distinto de  $c_0$  tal que  $y_1$  é adjacente a vértice em  $J_k$ . Pelo Lema 6.1.15,  $y_1$  é  $H_k$ -conexo a  $x_1$  ou a  $x_2$  e este vértice deve ser adjacente a vértice em  $J_k$ . Mas  $x_2$  não é adjacente a vértice de  $J_k$ . Logo,  $x_1 \stackrel{k}{\sim} y_1$ , com  $k$  distinto de  $c_0$ . De fato, a afirmação vale com  $c_1 = k$ . Analogamente, a aresta  $x_1y_1$  tem uma cor  $c'_1$  e a aresta  $y_2q_3$  tem uma cor  $c'_2$  tais que  $c'_1 \neq c'_2$ .

Ajuste a notação de forma que  $c'_1 = 1$  e  $c'_2 = 2$ . Se  $q_0x_2$  tiver cor fora de  $\{1, 2\}$ , então a atribuição das três cores pode ser feita. Podemos então supor que  $q_0x_2$  não tem cor fora de  $\{1, 2\}$ . A seguir, analisaremos dois casos. Em ambos mostraremos que é possível atribuir as três cores distintas para  $q_0x_2$ ,  $x_1y_1$  e  $y_2q_3$ , provando assim o lema.

**CASO 1** A aresta  $q_0x_2$  tem cor 2, a mesma cor de  $y_2q_3$ .

Se um dentre  $q_0x_2$  e  $y_2q_3$  tiver cor fora de  $\{1, 2\}$ , então a atribuição das três cores pode ser feita. Podemos então supor que nem  $q_0x_2$  nem  $y_2q_3$  tem cor fora de  $\{1, 2\}$ . Pelo Lema 6.1.15, nem  $x_2$  nem  $y_2$  é adjacente a vértice de  $J_k$ , para  $k$  fora de  $\{1, 2\}$ . Portanto, pelo Lema 6.1.16,  $x_1$  é adjacente a vértice de  $J_3$ . Então, pelo Lema 6.1.15,  $x_1 \stackrel{3}{\sim} y_1$  e  $y_1$  é adjacente a vértice de  $J_3$ . Mas, pelo Lema 6.1.18, pelo menos um dentre  $x_2$  e  $y_2$  é adjacente a vértice de  $J_k$ , para algum  $k \neq 2$ . Concluímos que um desses vértices é adjacente a  $J_1$ . Portanto, pelo Lema 6.1.15, uma das arestas  $q_0x_2$  e  $y_2q_3$  tem também a cor 1. Novamente, as três cores distintas podem ser atribuídas, pois  $x_1y_1$  tem cor 3, um dentre  $q_0x_2$  e  $y_2q_3$  tem cor 1, e o outro cor 2.

**CASO 2** A aresta  $q_0x_2$  tem cor 1.

Sabemos que  $q_0x_2$  não tem cor fora de  $\{1, 2\}$ . Além disso, o caso anterior não se aplica. Portanto, podemos supor que  $q_0x_2$  tem apenas a cor 1. Pelo Lema 6.1.15, o vértice  $x_2$  não é adjacente a nenhum vértice de  $J_k$ , para  $k \neq 1$ . Pelo Lema 6.1.18 aplicado a  $x_2$  e  $y_1$ , existe  $c$  distinto de 1 tal que  $y_1$  é adjacente a vértice em  $J_c$ . Pelo Lema 6.1.15, a aresta  $x_1y_1$  tem cor  $c$ , e  $x_1$  é adjacente a vértice de  $J_c$ . Se  $c$  for distinto de 2, então pode-se atribuir as três cores distintas. Portanto, podemos assumir que  $c = 2$ . Assim,  $y_1$  é adjacente apenas a vértices de  $J_1$  e de  $J_2$ . Pelo Lema 6.1.16,  $y_2$  é adjacente a vértice

de  $J_3$ . Pelo Lema 6.1.15,  $y_2q_3$  tem a cor 3. Assim, a aresta  $q_0x_2$  tem a cor 1, a aresta  $x_1y_1$  tem a cor 2 e a aresta  $y_2q_3$  tem a cor 3, e novamente é possível atribuir as três cores distintas. De fato, o lema é válido.  $\square$

#### LEMMA 6.1.22

O grafo  $G^*[T]$  é o cubo.

Demonstração: As arestas  $x_0x_1$ ,  $x_0x_2$ ,  $x_0y_0$ ,  $y_0y_1$  e  $y_0y_2$  estão presentes em  $G$  e em  $G^*$ , pois  $e$  é uma aresta magra de índice 2. As arestas  $q_0x_1$ ,  $q_0x_2$ ,  $y_1q_3$  e  $y_2q_3$  pertencem a  $G^*$  pelo Lema 6.1.17. Também pelo Lema 6.1.17,  $q_0q_3$  está em  $G^*$ . Vide Figura 6.8. Para completar a demonstração, resta mostrar que  $G^*$  tem, além da aresta  $e$ , precisamente duas arestas que ligam  $Q_1$  a  $Q_2$ , e que essas arestas não são adjacentes. De acordo com o Lema 6.1.17,  $x_1$  tem em  $G^*$  um vizinho em  $Q_2$ . Ajuste a notação de forma que  $x_1y_1$  seja aresta de  $G^*$ . Novamente pelo Lema 6.1.17,  $x_2$  tem em  $G^*$  um vizinho em  $Q_2$ . Pelo Lema 6.1.21,  $x_2$  e  $y_1$  não são adjacentes. Logo,  $x_2$  é adjacente a  $y_2$ . Finalmente, pelo Lema 6.1.21, estas são as únicas duas arestas de  $G^*$  que ligam vértice de  $Q_1^+$  a vértice de  $Q_2^+$ .  $\square$

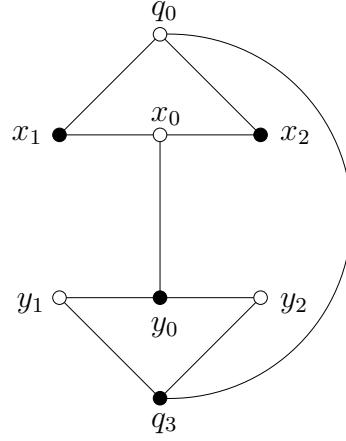


Figura 6.8: Algumas arestas de  $G^*[T]$ .

#### NOTAÇÃO 6.1.23

Ajustamos a notação de forma que  $x_1y_1$  e  $x_2y_2$  sejam arestas de  $G^*$ .

#### NOTAÇÃO 6.1.24

Denotamos por  $\Theta$  o grafo  $G^*[T - x_0 - y_0]$ , um hexágono com uma corda. Vide Figura 6.9.

## LEMA 6.1.25

A aresta  $x_1y_1$  tem uma cor  $c_1$  e a aresta  $x_2y_2$  tem uma cor  $c_2$  tal que  $c_1 \neq c_2$ .

Demonstração: Pelo Lema 6.1.18 aplicado a  $x_1$  e  $y_1$ , deduzimos que um dentre  $x_1$  e  $y_1$  é adjacente a vértice de  $J_{c_1}$ , para algum  $c_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Sabemos que nem  $x_1y_2$  nem  $x_2y_1$  são arestas de  $G^*$ . Portanto,  $x_1y_1$  tem cor  $c_1$ . De acordo com o Lema 6.1.18 aplicado a  $x_2$  e  $y_2$ , temos que um dentre  $x_2$  e  $y_2$  tem um vizinho em um  $J_{c_2}$ , para  $c_2 \neq c_1$ . Então, analogamente a  $x_1y_1$ , temos que  $x_2y_2$  tem a cor  $c_2$ .  $\square$

## NOTAÇÃO 6.1.26

Ajustamos a notação de forma que  $x_1y_1$  tenha cor 1 e  $x_2y_2$  tenha cor 2.

## LEMA 6.1.27

O grafo  $G^*$  é Pfaffiano.

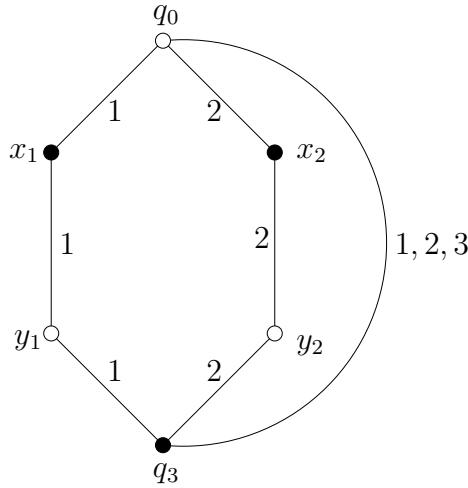
Demonstração: Lembremos que  $s$  foi definido como o sinal comum em  $D(G^*)$  dos emparelhamentos perfeitos de  $G$  e de  $G^* - e$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$ . Mostraremos que o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ . Se  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G$  ou se  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G^* - e$ , então o sinal de  $M$  é igual a  $s$ . Sendo assim, podemos supor que  $M$  contém  $e$ , e contém aresta em  $\Delta$ .

Para  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $J_k$  tem o mesmo número de vértices em cada parte da bipartição de  $G^*$ . Assim,  $M \cap \partial(V(J_k))$  tem um número par de elementos. As arestas de  $\partial(T)$  são todas incidentes a vértice de  $\Theta$ . Assim,  $|M \cap \partial(T)| \leq 6$ . Ademais, as arestas de  $\Delta$  pertencem a  $\Theta$ . Assim, dado que  $M$  contém aresta em  $\Delta$ , deduzimos que  $|M \cap \partial(T)| \leq 4$ . A seguir, analisaremos vários casos que dependem do número de arestas em  $M \cap \partial(V(J_k))$ , chegando em todos eles à conclusão de que o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ , provando desta forma o lema.

CASO 1  $M \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Nesse caso, todos os vértices de  $T$  estão emparelhados por  $M$  entre si. Além disso, sabemos que  $e$  é aresta de  $M$ . Portanto,  $M$  restrito a  $\Theta$  é emparelhamento perfeito de  $\Theta$ . De acordo com o Lema 6.1.22,  $\Theta$  é um hexágono com uma corda, como mostrado na Figura 6.9. Note que  $\Delta$  é um subconjunto de  $E(\Theta)$ .

Suponha inicialmente que  $q_0q_3$  esteja em  $M$ . Nesse caso,  $M \cap E(\Theta)$  é igual ao conjunto  $\{q_0q_3, x_1y_1, x_2y_2\}$ . No entanto, pelo Lema 6.1.25,  $x_1y_1$  tem cor 1, e  $x_2y_2$  tem cor 2. Pelos Lemmas 6.1.16 e 6.1.15, temos que  $q_0q_3$  tem cor 3. Além disso,  $M$  não tem aresta em  $\partial(V(J_k))$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Sendo assim, aplicando-se o Lema da Descarga 6.1.19 sobre as arestas  $q_0q_3$ ,  $x_1y_1$  e  $x_2y_2$  que pertencerem a  $\Delta$ , temos que o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ .

Figura 6.9: O grafo  $\Theta$  e algumas das cores de suas arestas.

Sendo assim, podemos supor que  $q_0q_3$  não está em  $M$ . Nesse caso, ou  $q_0x_1$  ou  $q_0x_2$  está em  $M$ . Ajuste a notação, trocando  $x_1$  com  $x_2$  e  $y_1$  com  $y_2$  se necessário, de forma que  $q_0x_1$  esteja em  $M$ . Nesse caso,  $M \cap E(\Theta)$  é igual a  $\{q_0x_1, x_2y_2, y_1q_3\}$ . Seja  $C := (q_0, x_1, y_1, q_3, q_0)$  quadrilátero de  $G^*$ . Mostraremos agora que a orientação de  $C$  em  $D(G^*)$  é ímpar. A restrição de  $C$  a  $H^*$  é igual a  $Q$ . Além disso, sabemos que  $D(H^*)$  é uma restrição de  $D(G^*)$ . Portanto, a orientação de  $C$  em  $D(G^*)$  é igual à orientação de  $Q$  em  $D(H^*)$ . Por outro lado,  $H^*$  é uma presilha. Além disso, todo quadrilátero de uma presilha é conforme. Portanto,  $Q$  é conforme em  $D(H^*)$ . Também sabemos que  $D(H^*)$  é orientação Pfaffiana de  $H^*$ . Sendo assim, a orientação de  $Q$  em  $D(H^*)$  é ímpar. Dessa forma, a orientação de  $C$  em  $D(G^*)$  é ímpar. Então,  $M' := M \oplus E(C)$  tem sinal em  $D(G^*)$  igual ao sinal de  $M$ . No entanto,  $M'$  contém  $q_0q_3$  e não tem aresta em  $\partial(T)$ . Portanto, conforme visto no parágrafo anterior, o sinal de  $M'$  é igual a  $s$  em  $D(G^*)$ . Assim, o sinal de  $M$  também é igual a  $s$ .

**CASO 2**  $|M \cap \partial(V(J_k))| \leq 2$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Suponha que o caso anterior não acontece. Assim, existe  $k$  tal que  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 2$ . Dessa forma, pelo Lema 6.1.20 aplicado a cada índice  $k$  tal que  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 2$ ,  $G^*$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$  que não contém aresta em  $\partial(V(J_k))$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , e cujo sinal em  $D(G^*)$  é igual ao sinal de  $M$ . Então, pelo caso anterior, o sinal de  $M'$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ . Assim, o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é igual a  $s$ .

**CASO 3** Nenhum dos anteriores.

Suponha que os casos anteriores não acontecem. Portanto, existe um índice  $k$  tal que  $|M \cap \partial(V(J_k))| \geq 4$ . Por outro lado, vimos anteriormente que  $|M \cap \partial(T)| \leq 4$ . Sendo assim,  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 4$  e  $M \cap \partial(V(J_\ell)) = \emptyset$  para todo índice  $\ell$  distinto de  $k$ .

Mostraremos, inicialmente, que toda aresta de  $\Theta$  tem pelo menos duas cores. Pelo Lema 6.1.18 aplicado a  $x_1$  e  $y_1$ , temos que um dentre  $x_1$  e  $y_1$  tem um vizinho em  $J_\ell$ , para  $\ell \neq 1$ . Ajuste a notação de forma que  $x_1$  seja um tal vértice. Então, pelo Lema 6.1.15,  $x_1$  é  $H_\ell$ -conexo a  $y_1$  ou  $y_2$ . No entanto, pelo Lema 6.1.22,  $x_1y_2$  não é aresta de  $G^*$ . Sendo assim,  $x_1y_1$  tem cor  $\ell$ . Dessa forma, tanto  $x_1$  como  $y_1$  tem vizinho em  $J_\ell$  e em  $J_1$ . Então, tanto  $q_0x_1$  como  $y_1q_3$  tem as cores 1 e  $\ell$ . Em resumo,  $q_0x_1$ ,  $x_1y_1$  e  $y_1q_3$  tem duas cores distintas. Analogamente,  $q_0x_2$ ,  $x_2y_2$  e  $y_2q_3$  tem duas cores distintas. Pelos Lemas 6.1.16 e 6.1.15,  $q_0q_3$  tem cor  $j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ . De fato, toda aresta de  $\Theta$  tem pelo menos duas cores.

Como  $|M \cap \partial(T)| = 4$ , temos que  $M$  tem precisamente uma aresta em  $\Theta$ . Seja  $vw$  esta aresta. Como  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 4$ , temos que  $vw$  tem uma cor  $i$  distinta de  $k$ . Sendo assim,  $M$  não tem aresta em  $\partial(V(J_i))$ . Portanto, pelo Lema da Descarga 6.1.19,  $M$  tem sinal  $s$  em  $D(G^*)$ . De fato, o lema é válido.  $\square$

Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , seja

$$N_k := N(V(J_k)) \cap V(\Theta).$$

#### LEMA 6.1.28

Se  $N_k \neq V(\Theta)$  então  $N_k = \{q_0, x_1, y_1, q_3\}$  ou  $N_k = \{q_0, x_2, y_2, q_3\}$ .

Demonstração: Suponhamos que  $N_k \neq V(\Theta)$ . Então,  $V(\Theta) - N_k$  contém um dos vértices  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ . Ajuste a notação de forma que  $x_1 \notin N_k$ . Mostraremos agora que  $y_1 \notin N_k$ . Suponha o contrário. Pelo Lema 6.1.15, existe  $x_i$ , com  $i = 1$  ou  $i = 2$ , tal que  $y_1 \stackrel{k}{\sim} x_i$  e  $x_i \in N_k$ . Como  $x_1 \notin N_k$ , deduzimos que  $i = 2$  e  $y_1 \stackrel{k}{\sim} x_2$ . Assim  $x_2$  e  $y_1$  são adjacentes em  $G^*$ , em contradição ao Lema 6.1.22. De fato, nem  $x_1$  nem  $y_1$  pertencem a  $N_k$ . Logo,  $N_k \subseteq \{q_0, x_1, y_1, q_3\}$ . Pelo Lema 6.1.16, vale a igualdade. A demonstração do lema está completa.  $\square$

#### COROLÁRIO 6.1.29

Existe uma componente conexa  $J_k$  de  $H - V(Q)$  tal que todo vértice de  $\Theta$  é adjacente a vértice de  $J_k$ .

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que  $|N_k| < 6$ , para  $k = 1, 2, 3$ . Então, pelo Lema 6.1.28, podemos ajustar a notação, tal que

$$N_1 = \{q_0, x_1, y_1, q_3\} = N_2.$$

Nesse caso, o grafo  $G - N_1$  tem pelo menos três componentes conexas:  $J_1$ ,  $J_2$  e a componente conexa contendo  $e$ . Então  $N_1$  reduz  $G$ , uma contradição. De fato, existe índice  $k$  tal que  $N_k = V(\Theta)$ .  $\square$

Seja  $\ell$  um índice tal que  $N_\ell = V(\Theta)$ . Seja  $L := G^* - \bigcup_{k \neq \ell} V(J_k)$ . Sendo assim,  $L = G^*[T \cup V(J_\ell)]$ . Vide Figura 6.10.

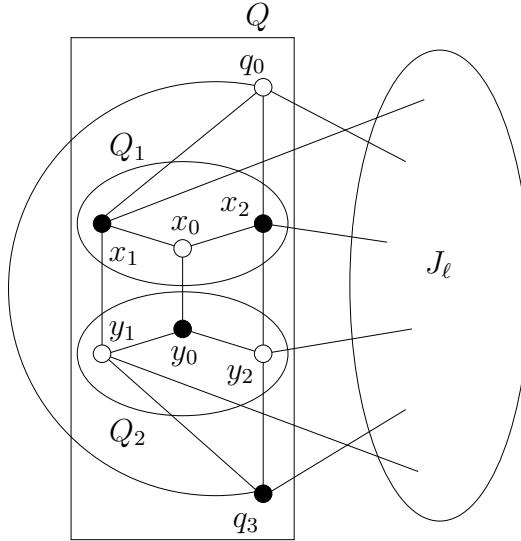


Figura 6.10: O grafo  $L$ .

#### LEMA 6.1.30

O grafo  $L$  é uma presilha redutível Pfaffiana e não planar.

Demonstração: Mostraremos que  $L$  é presilha, mostrando que  $L$  pode ser obtido de  $H_\ell$  por uma operação de geração de presilhas, de acordo com o Lema 2.3.29, mediante a expansão de  $q_1$  e de  $q_2$ . Para tanto, basta mostrar que, em  $L$ , cada um dos quatro vértices  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  tem grau três ou mais, com pelo menos um adjacente fora de  $\{x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2\}$ . Para  $i = 1, 2$ , o vértice  $x_i$  é adjacente a  $q_0$ , a  $x_0$  e a algum vértice de  $J_\ell$ . Portanto, em  $L$ ,  $x_i$  tem grau três ou mais, e é adjacente a um vértice de fora de  $T$ . Afirmação análoga vale para  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sendo assim, pelo Lema 2.3.29,  $L$  é uma presilha.

Mostraremos, a seguir, que  $L$  é redutível e Pfaffiana. Para  $k = 1, 2, \dots, n$ , seja  $M(J_k)$  emparelhamento perfeito de  $J_k$ . Sabemos que  $D(G^*)$  é Pfaffiana. Além disso,  $\bigcup_{k \neq \ell} M(J_k)$  deixa  $L$  conforme em  $G^*$ . Portanto,  $D(G^*)$  restrita a  $L$  é Pfaffiana. Seja  $C := (q_0, x_1, y_1, q_3, y_2, x_2, q_0)$  o hexágono de  $\Theta$ . Vide Figura 6.10. Uma das pontes de  $C$  é a aresta  $q_0q_3$ . Outra ponte contém o caminho  $(x_1, x_0, y_0, y_2)$ . Por definição,  $J_\ell$  é conexo. Os vértices  $x_2$  e  $y_1$  são ambos adjacentes a vértices em  $J_\ell$ . Portanto,  $J_\ell$  faz parte de uma

ponte de  $C$  contendo  $x_2$  e  $y_1$ . Sendo assim,  $C$  tem três pontes que se cruzam duas a duas. Dessa forma,  $L$  não é planar. Além disso,  $L$  tem o quadrilátero  $(q_0, x_1, y_1, q_3, q_0)$ . Portanto,  $L$  não é isomorfo ao grafo de Heawood. Em resumo,  $L$  é presilha Pfaffiana, não planar e distinta do grafo de Heawood. Além disso,  $L$  tem menos vértices do que  $G$ . Pela hipótese do Lema da Herança da Redutibilidade (que estamos a provar), o Teorema Principal vale para  $L$ . Portanto,  $L$  é redutível.  $\square$

#### LEMA 6.1.31

*Todo conjunto que reduz  $L$  reduz também  $G$ .*

Demonstração: Suponhamos que existe um conjunto  $S$  de quatro vértices de  $L$ , dois em cada parte da bipartição de  $L$ , tal que  $L - S$  tem três ou mais componentes conexas. Mostraremos que  $G - S$  também tem três ou mais componentes conexas.

Vamos inicialmente mostrar que  $S - T$  não é vazio. Para tanto, suponha o contrário. O grafo  $L[T]$ , igual a  $G^*[T]$ , é o cubo, uma presilha. Assim,  $L[T] - S$  tem um emparelhamento perfeito. Logo,  $L[T] - S$ , um grafo com quatro vértices, tem uma ou duas componentes conexas. Uma de suas componentes conexas tem vértices em  $\Theta$ . Todo vértice de  $\Theta$  é adjacente a vértices de  $J_\ell$ . Por definição,  $J_\ell$  é conexa. Assim,  $L - S$  tem uma ou duas componentes conexas, contradição. De fato,  $S - T$  não é vazio.

Assim,  $|S - T| \leq 3$ . Pelo Corolário 2.3.15,  $G^*[T] - S$  é conexo. Logo, todos os vértices de  $T - S$  pertencem a uma mesma componente conexa de  $L - S$ . Portanto,  $L - S$  tem duas componentes conexas,  $L_1$  e  $L_2$ , que não contêm vértices de  $T$ . Assim,  $G^* - S$  tem pelo menos três componentes conexas;  $L_1$ ,  $L_2$  e a componente conexa que contém os vértices de  $T - S$ . Então,  $S$  reduz  $G^*$  e portanto reduz  $G$ .  $\square$

Pelo Lema 6.1.30, o grafo  $L$  é redutível. Seja  $S$  uma quádrupla que reduz  $L$ . Pelo Lema 6.1.31,  $S$  reduz  $G$ , uma contradição. Em resumo, se  $G$  é um spin, e uma aresta magra de  $G$ ,  $H$  é uma presilha de  $G - e$  com dois vértices de contração em uma quádrupla  $Z$ , e o Teorema Principal vale para grafos menores do que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .  $\square$

Dividimos o Lema da Herança da Redutibilidade em três outros lemas. Estes três lemas acabam de ser provados. Temos assim que o Lema da Herança da Redutibilidade é verdadeiro.  $\square$

# Capítulo 7

## Lema da Não Planaridade das Contrações

Provaremos neste Capítulo o Lema da Não Planaridade das Contrações, como prometido no Capítulo 4.

### 7.1 Lema da Não Planaridade das Contrações

LEMA 7.1.1 (LEMA DA NÃO PLANARIDADE DAS CONTRAÇÕES)

Seja  $G$  uma presilha Pfaffiana, irredutível. Seja  $C := \partial_G(X)$  um corte (possivelmente trivial) de  $G$  tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Se  $G - e$  não é planar, e  $|\overline{X}| \leq 5$ , então a contração  $(G - e)\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\}$  não é planar.

Demonstração do Lema da Não Planaridade das Contrações: Por hipótese,  $G - e$  não é planar. Então, se  $|\overline{X}| = 1$  a afirmação é válida. Portanto, podemos supor que  $|\overline{X}| > 1$ . Ajuste a notação de forma que  $e = x_0y_0$ , e que  $x_0 \in X$ . Sejam

$$H := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \bar{x}\} \quad \text{e} \quad H' := (G - e)\{X \rightarrow x\}$$

as duas  $(C - e)$ -contrações de  $G - e$ . A única presilha simples com quatro vértices é o  $C_4$ , que é planar. A única presilha simples com seis vértices é o  $K_{3,3}$ , que não é Pfaffiana. Como  $G$  é Pfaffiana e não planar,  $G$  tem pelo menos oito vértices. No entanto, de acordo com o Lema 2.6.7, a única presilha simples Pfaffiana com precisamente oito vértices é o cubo, que é planar. Portanto,  $G$  tem pelo menos dez vértices. Por hipótese,  $|\overline{X}| \leq 5$ . Como  $|V(G)| = |X| + |\overline{X}|$ , temos que  $|X| \geq 5$ . Sendo assim,  $H$  tem pelo menos seis vértices.

Como  $G$  é presilha Pfaffiana, temos que tanto  $H$  como  $H'$  são Pfaffianos. Pelo Lema 2.4.6,  $H$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(H)$  na qual  $\bar{x}$  é um sorvedouro. Analogamente,  $H'$  tem uma orientação Pfaffiana  $D(H')$  na qual  $x$  é uma fonte. Então, pelo

Teorema 2.4.7,  $D(H)$  e  $D(H')$  podem ser estendidos a uma orientação Pfaffiana  $D(G)$  de  $G$ .

Na Seção 7.1.1, vamos demonstrar lemas auxiliares e, posteriormente, na Seção 7.1.2, obter contradições numa análise de casos, deduzindo que  $H$  não é planar. Esta dedução será feita por absurdo, supondo que  $H$  é planar. É importante ressaltar que alguns dos lemas da Seção 7.1.1 adotam a hipótese de absurdo.

### 7.1.1 Os Lemas Auxiliares

**LEMA 7.1.2**

O grafo  $H - x_0$  é 2-conexo.

Demonstração: O grafo  $H$  é coberto por emparelhamentos, portanto, pelo Lema 2.2.1,  $H$  é 2-conexo. Suponha, por absurdo, que  $H - x_0$  tenha um vértice  $v$  tal que  $H - x_0 - v$  seja desconexo. Então,  $Z := \{x_0, v\}$  é uma 2-separação de  $H$ . Se  $v$  e  $\bar{x}$  são distintos, então  $Z$  é uma 2-separação de  $G$ , uma contradição ao Corolário 2.3.14. Podemos portanto supor que  $v = \bar{x}$ . Seja  $\{U, W\}$  a bipartição de  $H$ , tal que  $x_0 \in U$ . Então, pelo Corolário 2.3.19,  $Z \subset U$ .

Sejam  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , com  $n \geq 2$ , as componentes conexas de  $H - Z$ . Seja  $F_i$  um emparelhamento máximo do subgrafo de  $H$  gerado por  $\partial_H(V(K_i))$ . Como  $|Z| = 2$ , temos que  $|F_i| \leq 2$ . Vamos agora definir emparelhamento perfeito  $N_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , de  $H$  tais que  $F_i \subseteq N_i$ . Se  $|F_i| = 1$ , então basta tomar para  $N_i$  qualquer emparelhamento perfeito de  $H$  que contém a aresta de  $F_i$ . Podemos então supor que  $|F_i| = 2$ . Seja  $M_i$  um emparelhamento perfeito de  $G$  que contém ambas as arestas de  $F_i$ . Uma das arestas de  $F_i$  incide em  $x_0$ , logo  $e \notin M_i$ . Assim,  $M_i$  é emparelhamento perfeito de  $G - e$ . Então,  $N_i := M_i \cap E(H)$  é emparelhamento perfeito de  $H$ , tal que  $F_i \subseteq N_i$ .

Sabemos que  $Z \subset U$ . Portanto, para  $i = 1, 2, \dots, n$ , uma simples contagem mostra que  $|V(K_i) \cap W| = |V(K_i) \cap U| + |N_i \cap \partial_H(V(K_i))|$ . Pela otimalidade de  $F_i$  temos que  $|N_i \cap \partial_H(V(K_i))| = |F_i|$ . Assim,

$$|V(K_i) \cap W| = |V(K_i) \cap U| + |F_i|, \quad (7.1)$$

$$|W| = \sum_{i=1}^n |V(K_i) \cap W|, \quad (7.2)$$

$$|U| = |Z| + \sum_{i=1}^n |V(K_i) \cap U|. \quad (7.3)$$

Do fato que  $|W| = |U|$ , deduzimos que  $\sum_{i=1}^n |F_i| = |Z|$ . Como  $n \geq 2$ , e  $|F_i| \geq 1$ , temos que  $n = 2$  e  $|F_i| = 1$ , para  $i = 1, 2$ . No entanto, o emparelhamento máximo de um corte é igual à cobertura mínima de arestas por vértices. Portanto, um vértice  $v_i$  de  $H$  incide em

todas as arestas de  $\partial_H(V(K_i))$ . Sendo assim, ou  $H - v_i$  é desconexo, ou  $K_i - v_i$  é vazio. Como  $H$  é 2-conexo, temos que  $K_i - v_i$  é vazio, e portanto  $|V(K_i)| = 1$ . Este argumento vale para  $i = 1, 2$ . Sendo assim,  $H - Z$  tem duas componentes com um vértice cada uma. Sendo assim,  $H$  tem apenas quatro vértices. Vimos anteriormente que  $|V(H)| \geq 6$ . Então, temos uma contradição. De fato,  $H - x_0$  é 2-conexo.  $\square$

Suponha, por absurdo, que  $H$  seja planar. Seja  $\tilde{H}$  uma imersão planar de  $H$ . Seja  $\tilde{F}$  a face de  $\tilde{H} - x_0$  que contém  $x_0$  em  $\tilde{H}$ . Vimos anteriormente que  $H$  tem pelo menos seis vértices. Sendo assim, pelo Lema 7.1.2,  $H - x_0$  é 2-conexo. Portanto, pelo Lema 2.6.2,  $\tilde{F}$  é delimitado por um circuito  $F$ . Esta situação está ilustrada na Figura 7.1.

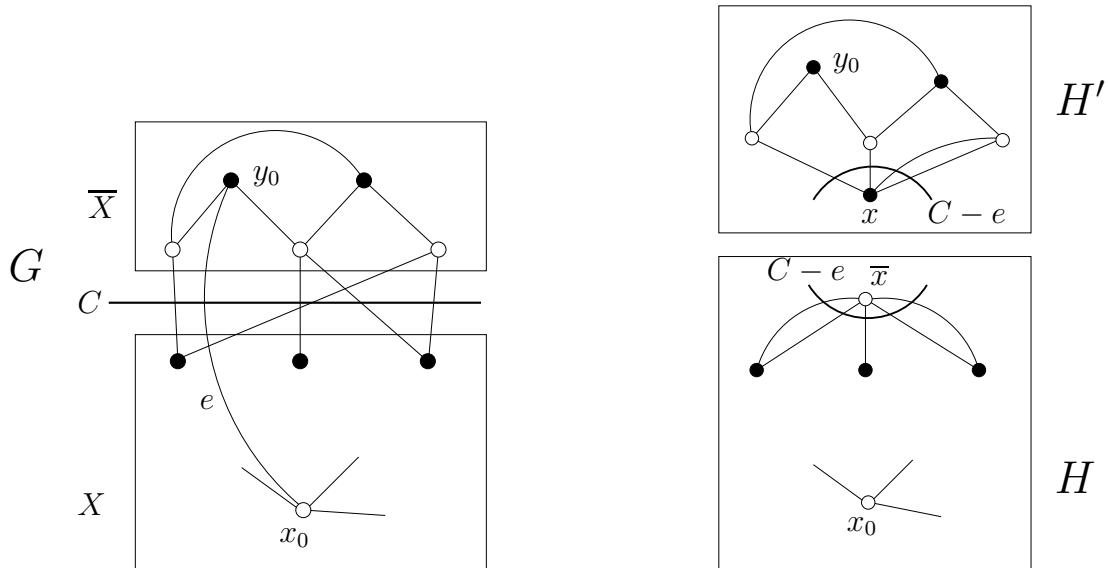


Figura 7.1: Grafos  $G$ ,  $H$  e  $H'$ , e algumas definições feitas:  $\overline{X}$ ,  $C - e$  e  $F$ .

Seja  $F_G$  o subgrafo de  $G$  induzido pelas arestas de  $F$ . É possível que  $F$  contenha arestas que são paralelas (em  $C$ ). Diferentes escolhas de imersões planares  $\tilde{H}$  de  $H$  podem gerar  $\tilde{F}$ 's diferentes, e portanto  $F$ 's diferentes (mas iguais a menos de arestas múltiplas). A escolha de  $\tilde{H}$  deverá ser feita de acordo com o seguinte critério:

- se possível, fazer  $F_G$  ser um circuito;
- se não for possível que  $F_G$  seja um circuito, fazer, se possível, com que os extremos de  $F_G$  sejam adjacentes a  $y_0$ .

Em todos os casos,  $F_G$  é uma trilha de comprimento par. Portanto, a paridade de sua orientação em  $D(G)$  está bem definida.

## LEMA 7.1.3

*Se  $H$  é planar, então a orientação de  $F_G$  é par em  $D(G)$ .*

Demonstração: Suponha que  $H$  seja planar. Seja  $\tilde{H}$  uma imersão planar de  $H$ . A orientação  $D(H)$  é orientação Pfaffiana de  $H$ , e  $F$  isola precisamente um vértice (o vértice  $x_0$ ) em  $\tilde{H}$ . Portanto, a orientação de  $F$  é par em  $D(H)$ , de acordo com o Corolário 2.6.5. Como  $D(H)$  é a restrição de  $D(G)$  a  $E(H)$ , o número de arestas de  $F_G$  que concorda em  $D(G)$  com um dado sentido de percurso de  $F_G$  é par.  $\square$

Seja  $v$  um vértice em  $X - V(F) - x_0$  adjacente a vértice em  $\bar{X}$ , e seja  $H(v) := H - x_0 - v$ . Dizemos que um emparelhamento perfeito  $M(v)$  de  $H(v)$  é *bom* se sua restrição a  $F$  é emparelhamento perfeito de  $F$ . Denotamos por  $\mathcal{M}(v)$  o conjunto dos emparelhamentos perfeitos bons de  $H(v)$ .

## LEMA 7.1.4

*Suponha que  $H$  seja planar. Então,  $H(v)$  tem um emparelhamento bom  $M$ . Além disso, se  $F_G$  for um circuito, e se  $f$  denotar a aresta de  $M \cap C$ , então o extremo em  $G$  de  $f$  em  $\bar{X}$  é o único vértice de  $\bar{X}$  adjacente a  $v$  em  $G$ .*

Demonstração: Lembremos que, pela Notação 2.3.4,  $\bar{X}_+$  é definido como a parte majoritária de  $\bar{X}$ , e  $\bar{X}_-$  é definido como a parte minoritária de  $\bar{X}$ . O corte  $C$  não é justo em  $G$ , mas  $C - e$  é um corte justo de  $G - e$ . Portanto, pelo Lema 2.3.5,  $e$  incide em vértice da parte minoritária de  $X$ . Então,  $x_0 \in X_-$ . Por definição,  $v$  é adjacente a  $\bar{x}$ . Portanto,  $v$  incide em aresta de  $C - e$ , e assim pertence a  $X_+$ . Assim,  $x_0$  e  $v$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ . Logo, o grafo  $G' := G - x_0 - v$  é coberto por emparelhamentos, de acordo com o Corolário 2.3.9. Seja  $C' := \partial_{G'}(\bar{X})$ . Como  $C - e$  é justo em  $G - e$ , temos que toda aresta de  $C - e$  incide em vértice de  $\bar{X}_+$ . Além disso,  $C'$  é subconjunto de  $C - e$ , pois  $G'$  não contém o extremo  $x_0$  de  $e$ . Portanto, toda aresta de  $C'$  tem um extremo em  $\bar{X}_+$ . O conjunto  $\bar{X}$  é um subconjunto de  $V(G')$ , pois nem  $x_0$  nem  $v$  estão em  $\bar{X}$ . Então, de acordo com o Lema 2.3.5,  $\bar{X}$  é praia de corte justo de  $G'$ , e portanto  $C'$  é justo em  $G'$ . Sendo assim, pelo Lema 2.2.2,  $H(v)$ , uma das  $C'$ -contrações de  $G'$ , é coberto por emparelhamentos. Portanto, pelo Lema 2.6.3,  $F$ , um circuito que delimita uma face de  $\tilde{H} - x_0 - v$ , é conforme em  $H - x_0 - v = H(v)$ . Portanto, existe emparelhamento perfeito  $M$  de  $H(v)$ , cuja restrição a  $F$  é emparelhamento perfeito de  $F$ . Ou seja, o emparelhamento perfeito  $M$  é bom em  $H(v)$ .

Para completar a prova do lema, mostraremos que o extremo em  $G$  de  $f$  em  $\bar{X}$  é o único vértice de  $\bar{X}$  adjacente a  $v$  em  $G$ . Para tanto, suponha o contrário. Então,  $v$  é adjacente a algum vértice  $w$  de  $\bar{X}$  que não é incidente em  $f$ . Mostraremos agora que  $M + vw + e$  pode ser estendido a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Seja  $M'$  a extensão de  $\{f, vw\}$  a um emparelhamento perfeito de  $G$ . Seja  $N$  o emparelhamento perfeito de  $G$

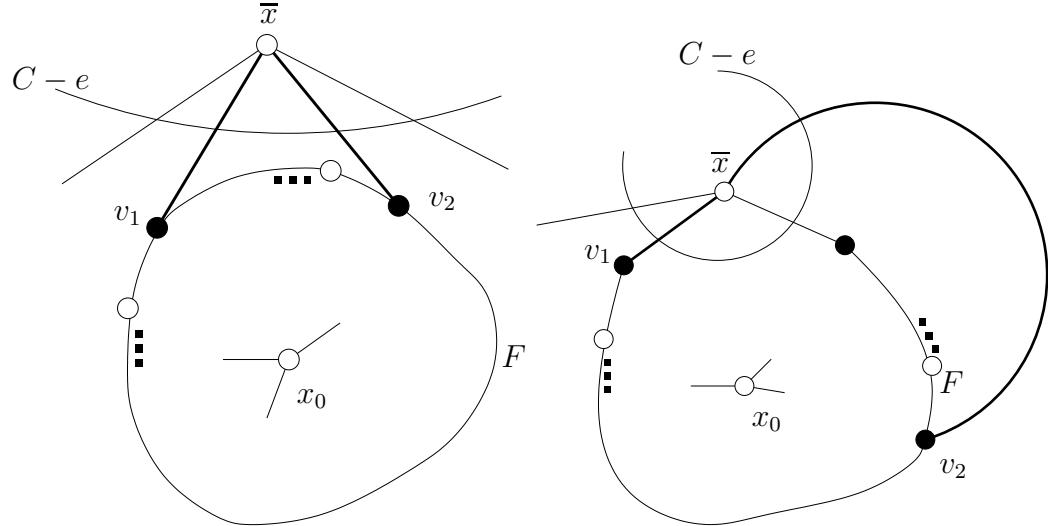
obtido pela união de  $M$ ,  $M' \cap E(G[\bar{X}])$  e  $\{vw, e\}$ . Sendo assim,  $N$  é um emparelhamento perfeito de  $G$  que é uma extensão de  $M + vw + e$ . Como  $M$  é bom em  $H(v)$ , temos que a restrição de  $N$  a  $F$  é emparelhamento perfeito de  $F$ . Por hipótese,  $F_G$  é um circuito. Logo  $N$  restrito a  $F_G$  é emparelhamento perfeito de  $F_G$ . Portanto, o circuito  $F_G$  é conforme em  $G$ . Por outro lado, a orientação de  $F_G$  é par em  $D(G)$ , de acordo com o Lema 7.1.3. Logo,  $D(G)$  não é Pfaffiana, uma contradição. De fato, o lema é válido.  $\square$

#### LEMA 7.1.5

*Se  $H$  for planar, então  $|V(F) \cap N_H(\bar{x})| \leq 2$ , com igualdade se e somente se  $\bar{x}$  está em  $V(F)$ .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que o enunciado do Lema é falso. Vamos definir dois vértices,  $v_1$  e  $v_2$  de  $V(F)$ , ambos adjacentes a  $\bar{x}$ , e que definem em  $F$  dois segmentos,  $F_1$  e  $F_2$ , ambos contendo vértices internos distintos de  $\bar{x}$ . Se  $\bar{x}$  não está em  $V(F)$ , como o enunciado é falso,  $\bar{x}$  tem dois ou mais vizinhos em  $V(F)$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  dois vizinhos de  $\bar{x}$  em  $V(F)$ . Se  $\bar{x}$  está em  $V(F)$ ,  $\bar{x}$  tem pelo menos dois vizinhos em  $V(F)$ . Como o enunciado é falso,  $\bar{x}$  tem três ou mais vizinhos em  $V(F)$ . Dois destes vizinhos são vizinhos de  $\bar{x}$  em  $F$ . Seja  $v_2$  um vizinho de  $\bar{x}$  em  $G$  que não é vizinho de  $\bar{x}$  em  $F$ . Seja  $v_1$  outro vizinho qualquer de  $\bar{x}$  em  $F$ . Em ambos os casos, tanto  $F_1$  quanto  $F_2$ , os segmentos de  $F$  definidos por  $v_1$  e  $v_2$ , contém vértice interno distinto de  $\bar{x}$ , como mostrado na Figura 7.2. Seja  $Z := \{\bar{x}, v_1, v_2, x_0\}$ . No grafo  $H - Z$ , os conjuntos  $V(F_1) - Z$  e  $V(F_2) - Z$  são ambos não vazios, pois tanto  $F_1$  quanto  $F_2$  contém vértice interno distinto de  $\bar{x}$ . Além disso,  $v_1$  e  $v_2$  incidem em  $F$ , um circuito que delimita uma face de  $H - x_0$ . Portanto,  $V(F_1) - Z$  e  $V(F_2) - Z$  não são conexos em  $H - Z$ . Logo,  $H - Z$  é desconexo.

Como  $v_1$  e  $v_2$  compartilham circuito facial com  $x_0$ , temos que  $H^* := H + x_0v_1 + x_0v_2$  é planar, e portanto Pfaffiano. Além disso,  $H^*$  contém o quadrilátero  $Q := (\bar{x}, v_1, x_0, v_2, \bar{x})$ . Portanto,  $H + E(Q)$  é Pfaffiano. Note que  $Z = V(Q)$ . Mostraremos agora que  $H - V(Q)$  tem emparelhamento perfeito. Sejam  $w_1$  e  $w_2$  dois vértices de  $\bar{X}_+$ . Pelo Corolário 2.3.11,  $G' := G + w_1v_1 + w_2v_2$  é presilha. Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G'$  contendo  $w_1v_1$  e  $w_2v_2$ . Como  $M$  tem duas arestas em  $C$  (as arestas  $w_1v_1$  e  $w_2v_2$ ), temos que  $w_1v_1$ ,  $w_2v_2$  e  $e$  são todas as arestas de  $M$  em  $C$ , de acordo com o Corolário 2.3.17. Então,  $x_0$ ,  $v_1$  e  $v_2$  são os únicos vértices de  $X$  emparelhados por  $M$  com vértices de  $\bar{X}$ . Então, a restrição de  $M$  a  $E(G - \bar{X} - x_0 - v_1 - v_2)$  é emparelhamento perfeito de  $G - \bar{X} - x_0 - v_1 - v_2$ . No entanto,  $H - V(Q)$  é igual a  $G - \bar{X} - x_0 - v_1 - v_2$ , e portanto  $H - V(Q)$  tem emparelhamento perfeito. Em resumo,  $H - V(Q)$  é desconexo, e tem emparelhamento perfeito. Além disso,  $H + E(Q)$  é Pfaffiano, e incide em vértice de  $Q$ , e  $\bar{x}$  está em  $Q$ . Isto é uma contradição ao Lema 6.1.7. De fato, o vértice  $\bar{x}$  tem em  $H$  um número de vizinhos em  $V(F)$  menor do que ou igual a dois, com igualdade se e somente se  $\bar{x}$  está em  $V(F)$ .  $\square$

Figura 7.2: Em destaque os vértices  $x_0$ ,  $\bar{x}$ ,  $v_1$  e  $v_2$ .

Analisaremos, agora, as adjacências dos vértices de  $\bar{X}$ .

#### LEMA 7.1.6

*É possível ajustar a notação de forma que:*

- Se  $|\bar{X}| = 3$ , então  $\bar{X} = \{y_0, y_1, y_2\}$  e  $\{y_0y_1, y_0y_2\}$  é o conjunto de arestas de  $G[\bar{X}]$ ; além disso, tanto  $y_1$  quanto  $y_2$  tem pelo menos dois vizinhos em  $X$ .
- Se  $|\bar{X}| = 5$ , então  $\bar{X} = \{y_0, y_1, y_2, s_0, s_1\}$  e  $\{y_0y_1, y_0y_2, s_0y_1, s_0y_2, s_0s_1\}$  é o conjunto de arestas de  $G[\bar{X}]$ ; além disso, tanto  $y_1$  como  $y_2$  tem pelo menos um vizinho em  $X$ , e  $s_1$  tem pelo menos dois vizinhos em  $X$ .

Demonstração: No caso em que  $|\bar{X}| = 3$ , a validade da afirmação é imediata. Suponha, agora, que  $|\bar{X}| = 5$ . Sendo assim,  $\bar{X}_-$  tem dois vértices, e  $\bar{X}_+$  tem três vértices. O vértice  $y_0$  está em  $\bar{X}_-$ . Seja  $s_0$  o outro vértice de  $\bar{X}_-$ . Sejam  $y_1$ ,  $y_2$  e  $s_1$  os vértices de  $\bar{X}_+$ . O vértice  $s_0$  somente é adjacente em  $G - e$  a vértices de  $\bar{X}_+$ . Mas  $s_0$  tem grau três ou mais em  $G$ , e não incide em  $e$ . Logo,  $s_0$  é adjacente aos três vértices de  $\bar{X}_+$ . Analogamente, o vértice  $y_0$  é adjacente a pelo menos dois vértices de  $\bar{X}_+$ . Ajuste a notação de forma que  $y_0$  seja adjacente a  $y_1$  e  $y_2$ . Os vértices de  $\bar{X}_+$  tem pelo menos três vizinhos em  $G$ . Como  $\bar{X}_-$  tem somente dois vértices, temos que cada vértice de  $\bar{X}_+$  tem pelo menos um vizinho em  $X$ . Então, os vértices  $s_0$  e  $x$  são adjacentes a todos os vértices de  $\bar{X}_+$  em  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$ . O grafo  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$  é Pfaffiano e portanto não pode ser o  $K_{3,3}$ . Sendo assim,  $y_0$  e  $s_1$  não são adjacentes. De fato, o Lema é válido.  $\square$

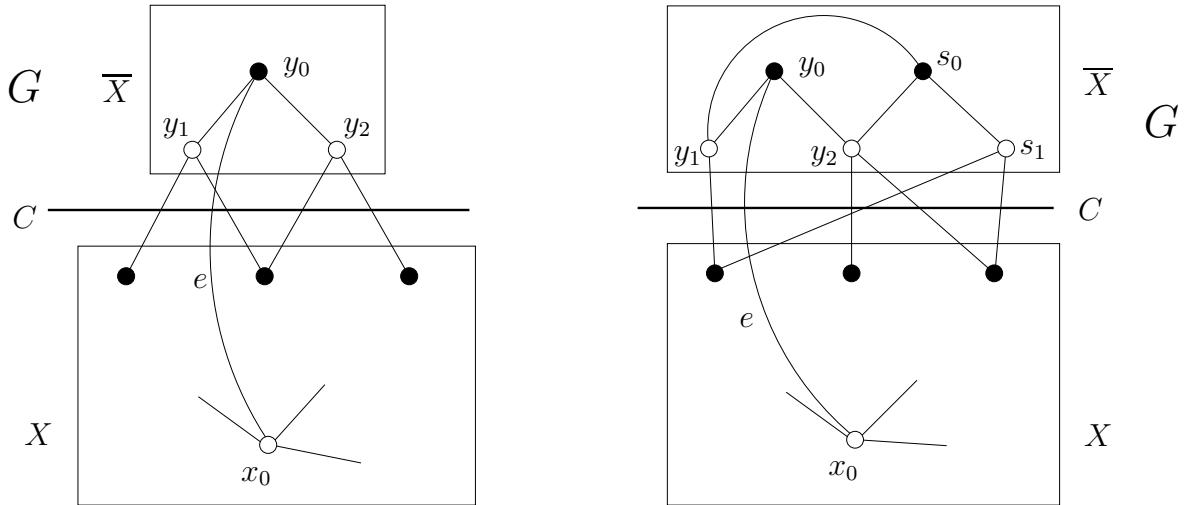


Figura 7.3: Grafo  $G$  nas duas possibilidades de tamanho de  $\overline{X}$ , com as nomenclaturas definidas dos vértices de  $\overline{X}$ .

### 7.1.2 Análise de Casos do Lema da Não Planaridade das Contrações

Demonstrados os lemas na seção anterior, vamos agora completar a demonstração do Lema da Não Planaridade das Contrações, adotando como hipótese de absurdo que  $H$  é planar. Analisaremos três casos. Em todos os casos chegaremos a uma contradição, demonstrando assim o Lema.

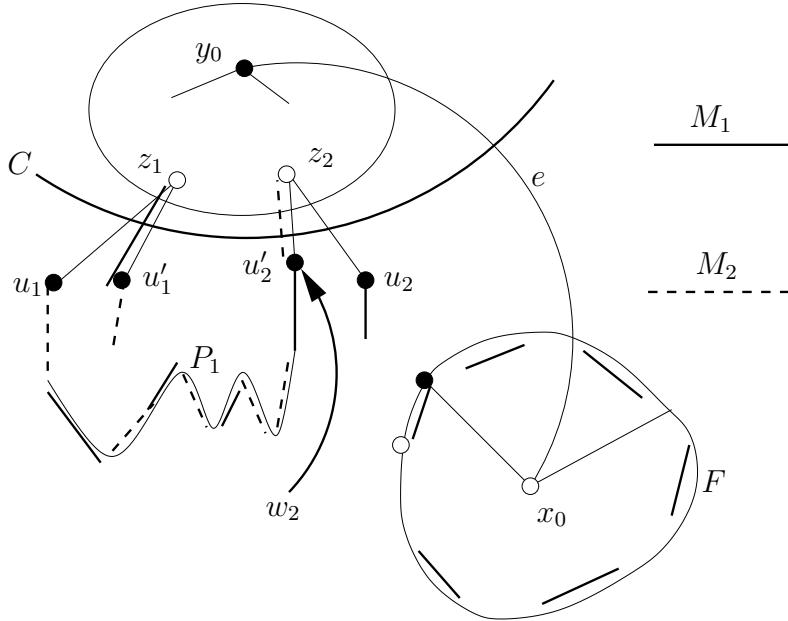
**CASO 1** *O grafo  $F_G$  é um circuito.*

Nesse caso, temos três alternativas. Uma delas é que  $F$  seja um circuito de  $G[X]$ . Caso isto não ocorra, temos que  $\overline{x}$  está em  $F$ , e portanto um vértice de  $\overline{X}_+$ , digamos  $z$ , está em  $F_G$ . Nesse caso, temos duas possibilidades. Ou  $z \in \{y_1, y_2\}$ , ou  $|\overline{X}| = 5$ , e  $z = s_1$ .

**CASO 1.1** *O vértice  $\overline{x}$  não está em  $F$ .*

Nesse caso,  $F$  é circuito de  $G[X]$ . Seja  $Z$  o conjunto de vértices de  $\overline{X}$  adjacentes em  $G - e$  a vértices de  $X - V(F)$ . Mostraremos que  $|Z| \geq 2$ . Suponha, por absurdo, que  $|Z| < 2$ . Pelo Lema 7.1.5, no máximo um vértice de  $F$  é adjacente a  $\overline{x}$  em  $H$ . Vamos remover de  $G$  no máximo três vértices: (i) o vértice  $y_0$ , (ii) o vértice de  $Z$ , se existir, e (iii) o vértice de  $F$  adjacente a  $\overline{x}$  em  $H$ , se existir. É fácil ver que a remoção desses vértices desconecta  $G$ , em contradição ao Corolário 2.3.15. De fato,  $|Z| \geq 2$ .

Seja  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ , com  $m \geq 2$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $u_i$  um vizinho em  $G - e$  de  $z_i$  em  $X - V(F)$ . Esta situação está ilustrada na Figura 7.4. Pelo Lema 7.1.4, existe um

Figura 7.4:  $G$  com os emparelhamentos  $M_1$  e  $M_2$ , e os vértices definidos na prova.

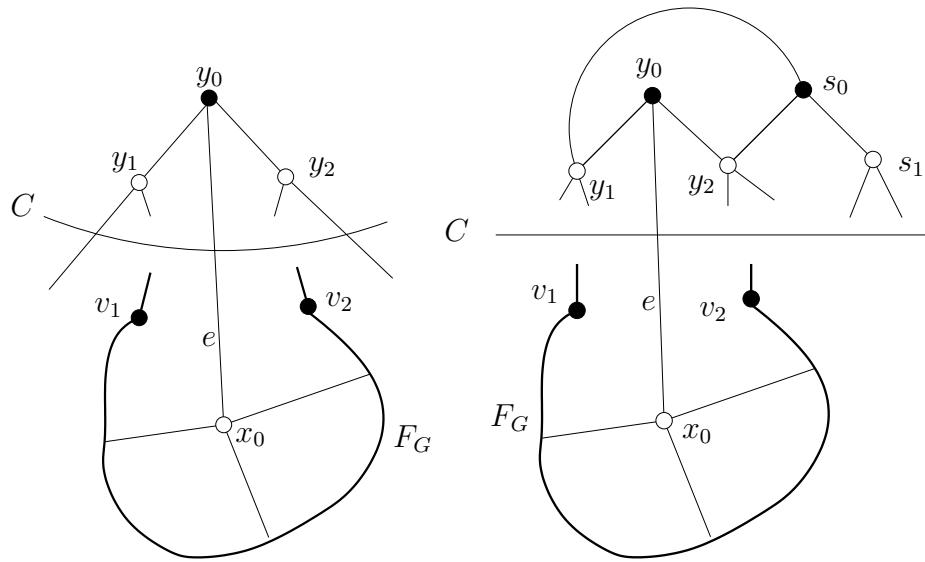
emparelhamento perfeito bom  $M_i$  de  $H(u_i)$ . A restrição de  $M_i$  a  $F$  é um emparelhamento perfeito de  $F$ . Seja  $f_i$  a aresta de  $M_i$  em  $C$ . De acordo com o Lema 7.1.4,  $z_i$  incide em  $f_i$ . Seja  $u'_i$  o extremo de  $f_i$  em  $X$ . Ainda de acordo com o Lema 7.1.4,  $N_G(z_1) \cap X - V(F)$  e  $N_G(z_2) \cap X - V(F)$  são disjuntos. Portanto,  $u_1, u'_1, u_2$  e  $u'_2$  são quatro vértices distintos. Para  $i = 1, 2$ ,  $u_i$  é o único vértice de  $H - x_0$  não coberto por  $M_i$ . Portanto, existe um caminho  $M_1, M_2$ -alternado  $P$  em  $H$  que vai de  $u_1$  a  $u_2$ . Seja  $P_1$  o segmento maximal de  $P$  em  $H - \bar{x}$  que contém  $u_1$ . Seja  $w_2$  o extremo de  $P_1$  diferente de  $u_1$ . Por paridade,  $w_2 \neq u'_1$ . Portanto, ou  $w_2 = u_2$  ou  $w_2$  é incidente na aresta  $f_2$ , sendo nesse caso igual a  $u'_2$ . Sendo assim,  $w_2$  é igual a  $u_2$  ou a  $u'_2$ . Seja  $M := M_1 \oplus E(P_1)$ . O emparelhamento  $M$  está em  $\mathcal{M}(w_2)$ , e a aresta  $f_1$  de  $M \cap C$  não é incidente no vizinho  $z_2$  de  $w_2$  em  $\bar{X}$  no grafo  $G$ , em contradição ao Lema 7.1.4. De fato, o Caso 1.1, em que  $\bar{x}$  não está em  $V(F)$ , não acontece.

#### CASO 1.2 O vértice $\bar{x}$ está em $F$ .

Nesse caso,  $F_G$  tem precisamente um vértice. Adotemos a notação do Lema 7.1.6. Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os dois vizinhos de  $\bar{x}$  em  $F$ . Vide Figura 7.5.

#### LEMA 7.1.7

O vértice de  $F_G$  em  $\bar{X}$  é o único vértice de  $\bar{X}$  adjacente a mais de um vértice de  $X$ . Além disso, os demais vértices de  $\bar{X}_+$  não são adjacentes a vértices de  $X - v_1 - v_2$ .

Figura 7.5: As duas possibilidades para o grafo  $G$  no Caso 1.2.

Demonstração: O vértice  $w_1$  de  $\overline{X}$  em  $F_G$  é adjacente a  $v_1$  e a  $v_2$ , pois  $F_G$  é um circuito, pela hipótese do caso. Mostraremos, inicialmente, que nenhum outro vértice de  $\overline{X}$  é adjacente a ambos  $v_1$  e  $v_2$ . Suponha, por absurdo, que um vértice  $w_2$  de  $\overline{X}$ , com  $w_2 \neq w_1$ , é adjacente tanto a  $v_1$  como a  $v_2$ . Nesse caso,  $Q := (v_1, w_1, v_2, w_2, v_1)$  é um quadrilátero de  $G$  inteiramente contido em  $C - e$ . Por definição de  $D(G)$ , o corte  $C - e$  é orientado em  $D(G)$ . Como  $Q$  está inteiramente contido em  $C - e$ , sua orientação é par em  $D(G)$ . Por outro lado, todo quadrilátero de uma presilha é conforme. Em particular,  $Q$  é conforme em  $G$ . Portanto,  $D(G)$  não é orientação Pfaffiana de  $G$ , uma contradição. De fato, precisamente um vértice de  $\overline{X}$  é adjacente a ambos  $v_1$  e  $v_2$ .

Sendo assim, se um vértice  $w_2$  de  $\overline{X} - w_1$  não tem vizinho fora de  $X - v_1 - v_2$ , então  $w_2$  tem no máximo um vizinho em  $X$ . O vértice  $y_0$  é o único vértice de  $\overline{X}_-$  adjacente a vértice de  $X$ , e  $y_0$  tem somente um vizinho em  $X$ . Portanto, a prova deste lema pode ser reduzida a se mostrar que nenhum vértice de  $\overline{X}_+ - w_1$  tem vizinho em  $X - v_1 - v_2$ . Suponha, por absurdo, que  $w_2$  seja um vértice de  $\overline{X}_+ - w_1$  adjacente a um vértice  $v$  em  $X - v_1 - v_2$ . De acordo com o Lema 7.1.5,  $v$  não está em  $F$ . Como  $w_2$  está em  $\overline{X}_+$ , temos que  $v \in X_+$ . Portanto,  $v$  é distinto de  $x_0$ . Sendo assim,  $v$  está em  $X - V(F) - x_0$ . De acordo com o Lema 7.1.4,  $H(v)$  tem um emparelhamento bom  $M$ . Como  $M$  restrito a  $F$  é emparelhamento perfeito de  $F$ , temos que a aresta  $f$  de  $M$  em  $C$  incide em  $w_1$ , o vértice de  $F_G$  em  $\overline{X}$ . Então, novamente de acordo com o Lema 7.1.4, o único vizinho de  $v$  em  $\overline{X}$  é  $w_1$ , uma contradição. De fato, o vértice de  $F_G$  em  $\overline{X}$  é o único vértice de  $\overline{X}$  com mais de um vizinho em  $X$ , e é o único vértice de  $\overline{X}_+$  adjacente a vértice de  $X - v_1 - v_2$ .  $\square$

CASO 1.2.1 Um vizinho de  $y_0$  em  $\bar{X}$  está em  $F_G$ .

Como a notação do Lema 7.1.6 foi adotada, um dentre  $y_1$  e  $y_2$  está em  $F_G$ . Ajuste a notação de forma que  $y_1$  esteja em  $F_G$ . Então, pelo Lema 7.1.7,  $y_1$  é o único vértice de  $\bar{X}$  adjacente a mais de um vértice de  $X$ . Se  $|\bar{X}| = 3$ , pelo Lema 7.1.6,  $y_2$  tem dois vizinhos em  $X$ . Então, podemos supor que  $|\bar{X}| = 5$ . Nesse caso, pelo Lema 7.1.6,  $s_1$  tem dois vizinhos em  $X$ . Isto é uma contradição. De fato, o Caso 1.2.1 não acontece.

CASO 1.2.2 O caso anterior não acontece.

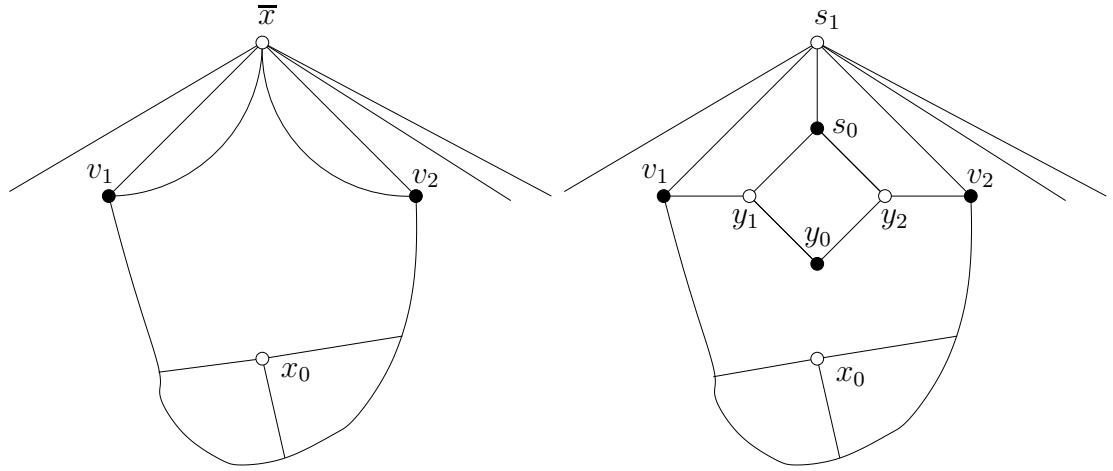


Figura 7.6: A extensão de  $\tilde{H}$  a uma imersão planar de  $G - e$ , no Caso 1.2.2.

Pela hipótese do Caso 1.2,  $\bar{x}$  está em  $F$ , e  $F_G$  é um circuito. Como o Caso 1.2.1 não acontece, um vértice de  $\bar{X}_+ - y_1 - y_2$  pertence a  $F_G$ . Sendo assim,  $|\bar{X}| = 5$  e  $s_1$  está em  $F_G$ . De acordo com o Lema 7.1.7, cada um dentre  $y_1$  e  $y_2$  tem pelo menos um vizinho em  $X$ . Além disso, pelo Lema 7.1.4,  $y_1$  e  $y_2$  tem no máximo um vizinho em  $X$  cada, e estes vizinhos estão em  $\{v_1, v_2\}$ . Ajuste a notação de forma que  $y_1$  seja adjacente a  $v_1$ . Mostraremos, agora, que  $y_2$  é adjacente a  $v_2$ . Suponha, por absurdo, que  $y_2$  seja adjacente a  $v_1$ . Nesse caso,  $v_1$  é o único vértice de  $X$  adjacente a vértice em  $\{y_1, y_2\}$ . Então,  $\{v_1, s_1, x_0\}$  é uma cobertura das arestas de  $C$ . Portanto,  $G - \{v_1, s_1, x_0\}$  é desconexo. No entanto,  $v_1$  e  $s_1$  estão em partes distintas da bipartição de  $G$ . Isto é uma contradição ao Corolário 2.3.15. De fato,  $v_2$  é o único vizinho de  $y_2$  em  $X$  e  $v_1$  é o único vizinho de  $y_1$  em  $X$ . Sendo assim, a imersão planar  $\tilde{H}$  de  $H$  pode ser estendida a uma imersão planar de  $G - e$ , em contradição à hipótese do lema, como visto na Figura 7.6.

CASO 2 O grafo  $F_G$  não é circuito.

CASO 2.1 *O caminho  $F_G$  tem um extremo não adjacente a  $y_0$ .*

Como  $F_G$  não é circuito,  $\bar{x}$  está em  $V(F)$ . Como  $F_G$  tem um extremo não adjacente a  $y_0$ , temos que  $|\bar{X}| = 5$ , e que  $F_G$  incide em  $s_1$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  os vizinhos de  $\bar{x}$  em  $F$ . Pela hipótese do caso,  $s_1$  é adjacente a um dentre  $v_1$  e  $v_2$ . Ajuste a notação de forma que  $s_1$  seja adjacente a  $v_2$ .

#### LEMA 7.1.8

*O corte  $C - e$  de  $G - e$  inclui um emparelhamento  $M$  de  $G - e$  com três arestas, que cobre  $v_1$  e contém a aresta  $s_1v_2$ .*

Demonstração: Vamos inicialmente mostrar que  $C - e$  inclui um emparelhamento  $M$  de  $G$  com três arestas. Suponha, por absurdo, que este não é o caso. Então, existe um conjunto  $Z$  de vértices, com  $|Z| \leq 2$ , que cobre as arestas de  $C - e$ . Assim,  $G - e - Z$  é desconexo. Logo,  $G - Z - x_0$  e  $G - Z - y_0$  são ambos desconexos, pois tanto  $X$  como  $\bar{X}$  tem pelo menos cinco vértices. Isto é uma contradição ao Corolário 2.3.15. De fato,  $C - e$  inclui um emparelhamento com  $M$  três arestas. Mas  $\bar{X}$  tem apenas três vértices incidentes em arestas de  $C - e$ :  $y_1$ ,  $y_2$  e  $s_1$ . Portanto,  $M$  cobre  $\bar{X}_+$ .

Vamos agora mostrar que podemos escolher  $M$  contendo  $s_1v_2$ . Pelo critério utilizado na escolha de  $F$ , e dado que  $F_G$  não é um circuito,  $s_1$  não é adjacente a  $v_1$ . Então,  $v_1$  é adjacente a um vértice de  $\bar{X}_+ - s_1$ . Seja  $w$  um tal vértice. É claro que  $w \in \{y_1, y_2\}$ . Como  $F_G$  não é um circuito,  $w$  não é adjacente a  $v_2$ . Suponha que o vértice  $w'$  de  $\bar{X}_+ - s_1 - w$  seja adjacente a  $v_2$ . Neste caso,  $v_1w$  e  $v_2w'$  são arestas de  $G$ , e poderíamos escolher  $\tilde{H}$  e  $\tilde{F}$  de forma que  $s_1$  não fosse extremo de  $F_G$ , em contradição à escolha de  $F_G$ . De fato,  $s_1$  é o único vértice de  $\bar{X}$  adjacente a  $v_2$ . Suponha que  $s_1v_2 \notin M$ . Então,  $v_2$  não é coberto por  $M$ . Sendo assim, podemos trocar a aresta de  $M$  incidente em  $s_1$  pela aresta  $s_1v_2$ .

Sendo assim, podemos supor que  $s_1v_2$  está em  $M$ . Mostraremos agora que, além disso, podemos escolher  $M$  que cubra  $v_1$ . Suponha que  $M$  não cubra  $v_1$ . Como  $F_G$  não é um circuito,  $v_1$  não é adjacente a  $s_1$ . Logo,  $v_1$  é adjacente a  $y_1$  ou  $y_2$ , digamos  $y_1$ . Então, podemos substituir a aresta de  $M$  incidente em  $y_1$  por  $y_1v_1$ . De fato,  $M$  é um emparelhamento de tamanho três de  $J$  contendo  $s_1v_2$  que cubre  $v_1$ .  $\square$

Seja  $M$  emparelhamento como enunciado no lema anterior. Ajuste a notação de forma que  $y_1$  seja o vértice de  $\bar{X}_+$  emparelhado por  $M$  com  $v_1$ . Seja  $v$  o vértice de  $X - v_1 - v_2$  emparelhado por  $M$  com  $y_2$ . Sem perda de generalidade,  $y_1$  e  $s_1$  são os extremos de  $F_G$ . Então, pelo Lema 7.1.5,  $v$  está em  $X - V(F)$ . Como  $y_2$  está na mesma parte da bipartição de  $x_0$ , temos que  $v$  está em  $X - V(F) - x_0$ . Então, de acordo com o Lema 7.1.4,  $H(v) = H - x_0 - v$  tem um emparelhamento perfeito  $N$  cuja restrição a  $F$  é emparelhamento perfeito de  $F$ . Ajuste a notação, trocando  $N$  com  $N \oplus E(F)$  se necessário, de forma que  $y_1v_1$  seja aresta de  $N$ . Então,  $M := N + x_0y_0 + vy_2 + s_0s_1$  é

emparelhamento perfeito de  $G$ . Vide Figura 7.7. Seja  $Q := F_G + (s_1, s_0, y_1)$ . Note que  $Q$  é um circuito de  $G$ . A restrição de  $M$  a  $Q$  é um emparelhamento perfeito de  $Q$ . Portanto,  $Q$  é conforme em  $G$ . Então, a orientação de  $Q$  em  $D(G)$  é ímpar, pois  $D(G)$  é Pfaffiana. De acordo com o Lema 7.1.3, a orientação de  $F_G$  é par em  $D(G)$ . Então, temos que a orientação de  $(s_1, s_0, y_1)$  é ímpar em  $D(G)$ . Seja  $Q' := (s_1, s_0, y_1, x, s_1)$  quadrilátero de  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$ . Vide Figura 7.7. Por definição de  $D(H')$ , o vértice  $x$  é fonte em  $D(H')$ . A orientação Pfaffiana  $D(H')$  de  $H'$  é uma restrição de  $D(G)$ . Portanto, a orientação de  $Q'$  é par em  $D(H')$ . Por outro lado,  $\{y_0y_2\}$  é emparelhamento perfeito de  $H' - V(Q')$ . Então,  $Q'$  é conforme em  $H'$ . Isto é uma contradição à escolha de  $D(H')$  como orientação Pfaffiana de  $H'$ . De fato, o Caso 2.1 não se aplica.

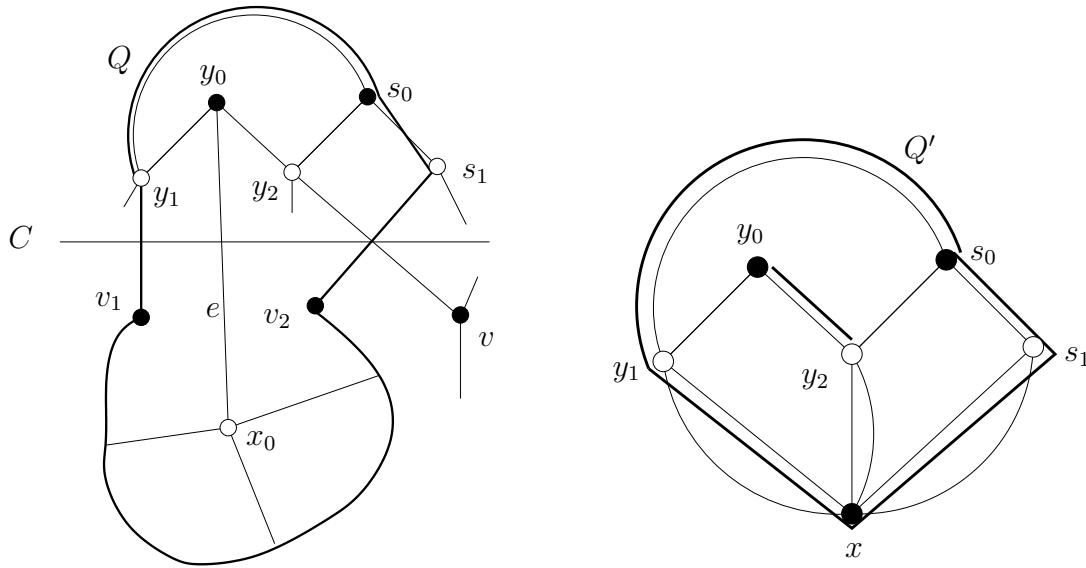


Figura 7.7: Os grafos  $G$  e  $H' = (G - e)\{X \rightarrow x\}$ , no Caso 2.1. Em destaque, os circuitos  $Q$  e  $Q'$  e o emparelhamento perfeito de  $H' - V(Q')$ .

### CASO 2.2 Os extremos de $F_G$ são os vértices $y_1$ e $y_2$ .

Ajuste a notação de forma que  $y_1$  seja adjacente a  $v_1$  e  $y_2$  adjacente a  $v_2$ . Sejam  $e_1 = v_1y_1$  e  $e_2 = v_2y_2$ . Lembremos que  $\tilde{H}$  é uma imersão planar de  $H$ . Para  $i = 1, 2$ , os vértices  $x_0$  e  $v_i$  são ambos incidentes em  $\tilde{F}$ . Então,  $H^* := H + x_0v_1 + x_0v_2$  é planar. Seja  $G^* := G + x_0v_1 + x_0v_2$ . Nenhuma das arestas de  $E(G^*) - E(G)$  está em  $\partial_{G^*}(X)$ . Portanto,  $C - e$  é um corte justo de  $G^* - e$ . Então,  $H^*$  e  $H'$  são as  $(C - e)$ -contrações de  $G^* - e$ . Mostraremos a seguir que  $G^*$  é Pfaffiano.

#### LEMA 7.1.9

A presilha  $G^*$  é Pfaffiana.

Demonstração: O grafo  $H^*$  é planar, e portanto Pfaffiano. Pelo Lema 2.4.6,  $H^*$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $\bar{x}$  é um sorvedouro. Analogamente,  $H'$  tem uma orientação Pfaffiana na qual  $x$  é uma fonte. Portanto, pelo Teorema 2.4.7, a extensão  $D(G^* - e)$  dessas orientações a uma orientação de  $G^* - e$  é Pfaffiana. Pelo Lema 2.4.9,  $D(G^* - e)$  pode ser estendida a uma orientação  $D(G^*)$  de  $G^*$ , cuja restrição a  $G$  é Pfaffiana. Além disso,  $x$  é uma fonte na restrição de  $D(G^*)$  a  $H'$ . Mostraremos que  $D(G^*)$  é Pfaffiana.

Seja  $N$  um emparelhamento perfeito de  $G - e$ . Seja  $s$  o sinal de  $N$  em  $D(G^*)$ . Vamos mostrar que todo emparelhamento  $M$  de  $G^*$  tem sinal  $s$ . As arestas  $x_0v_1, x_0v_2$  e a aresta  $e$  são adjacentes. Portanto,  $M$  tem no máximo uma dessas três arestas. Se  $M$  contém a aresta  $e$ , então  $M$  é um emparelhamento perfeito de  $G$ . Sendo assim, como  $D(G^*)$  restrita a  $G$  é Pfaffiana, temos que o sinal de  $M$  em  $D(G^*)$  é  $s$ . Portanto, podemos supor que  $M$  não contenha  $e$ . Então,  $M$  é emparelhamento perfeito de  $G^* - e$ . Como  $D(G^*)$  restrita a  $G^* - e$  é Pfaffiana, temos que o sinal de  $M$  é  $s$ . Portanto, todo emparelhamento perfeito  $M$  tem sinal  $s$  em  $D(G^*)$ , e  $D(G^*)$  é Pfaffiana. De fato,  $G^*$  é Pfaffiano.  $\square$

Uma ordem cíclica  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  de um subconjunto das arestas de um corte  $C'$  de um grafo  $G$  é uma ordem cíclica *planar* se existe uma imersão planar de  $G$  na qual a ordem cíclica  $(g_1, g_2, \dots, g_n)$  acontece em  $C'$ .

#### LEMA 7.1.10

O corte  $C - e - e_1 - e_2$  contém duas arestas  $f_1$  e  $f_2$ , tais que  $f_1$  e  $f_2$  não são adjacentes em  $G$ , a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_2, f_1)$  é planar em  $H^*$ , e a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_1, f_2)$  é planar em  $H'$ .

Demonstração: Vamos considerar o conjunto  $\gamma^*$  das ordens cíclicas planares  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_r^*)$  de  $\partial(\bar{x})$  em  $H^*$ , tais que  $e_1^* = e_1$  e  $e_2^* = e_2$ . Analogamente, seja  $\gamma'$  o conjunto das ordens cíclicas planares  $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$  de  $\partial(x)$  em  $H'$ , tais que  $e'_1 = e_1$  e  $e'_2 = e_2$ . Vamos escolher uma ordem  $c^*$  de  $\gamma^*$  e uma ordem  $c'$  de  $\gamma'$  tais que o prefixo comum  $(e_1^* = e'_1, e_2^* = e'_2, \dots, e_u^* = e'_u)$  seja o maior possível. É claro que  $u \geq 2$ , pois  $(e_1, e_2)$  é prefixo de ambas  $c^*$  e  $c'$ . Também é verdade que  $u < r$ , caso contrário as ordens cíclicas  $c^*$  e  $c'$  coincidiriam e  $G - e$  seria planar, uma contradição. Seja  $f_1$  a aresta que segue  $e'_u$  em  $c'$  e  $f_2$  a aresta que segue  $e_u^*$  em  $c^*$ . Por hipótese,  $f_1$  e  $f_2$  são distintas. Suponha que  $f_1$  e  $f_2$  sejam adjacentes em  $G$ . Nesse caso,  $f_1$  e  $f_2$  são múltiplas em um dentre  $H'$  e  $H^*$ . Portanto, suas posições em um dentre  $c'$  e  $c^*$  podem ser trocadas, fazendo com que  $e'_{u+1} = f_1 = f_2 = e_{u+1}^*$ . Sendo assim,  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_u^*, f_1 = f_2)$  é um prefixo comum a  $c^*$  e  $c'$  maior do que  $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_u^*)$ , em contradição à escolha de  $c^*$  e  $c'$ . De fato,  $f_1$  e  $f_2$  não são adjacentes, não pertencem a  $\{e_1, e_2\}$  e aparecem na ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_2, f_1)$  em  $C - e$  ao redor de  $\bar{x}$  na imersão  $\tilde{H}^*$ , e na ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_1, f_2)$  em  $C - e$  ao redor de  $x$  na imersão  $\tilde{H}'$ . Então, o Lema é válido.  $\square$

Sejam  $f_1$  e  $f_2$  como definidos no Lema 7.1.10. As arestas  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$  incidem todas em vértices de  $\overline{X}_+$ . No entanto,  $\overline{X}_+$  tem precisamente três vértices. Portanto, pelo menos duas arestas dentre  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$  são incidentes em um mesmo vértice de  $\overline{X}_+$ . Sabemos que  $e_1$  e  $e_2$  não são adjacentes. Pelo Lema 7.1.10, as arestas  $f_1$  e  $f_2$  também não são adjacentes. Além disso, a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_1, f_2)$  é planar em  $H'$ . Logo,  $e_1$  e  $f_1$  não são incidentes em um mesmo vértice de  $\overline{X}$ , nem  $e_2$  e  $f_2$  são incidentes em um mesmo vértice de  $\overline{X}$ . Podemos então concluir que ou  $e_1$  e  $f_2$ , ou  $e_2$  e  $f_1$  são incidentes em um mesmo vértice de  $\overline{X}$ . Ajustemos a notação, trocando  $e_1$  com  $e_2$  e  $f_1$  com  $f_2$  se necessário, de forma que  $e_2$  e  $f_1$  sejam incidentes em um mesmo vértice de  $\overline{X}$ . Vide Figura 7.8.

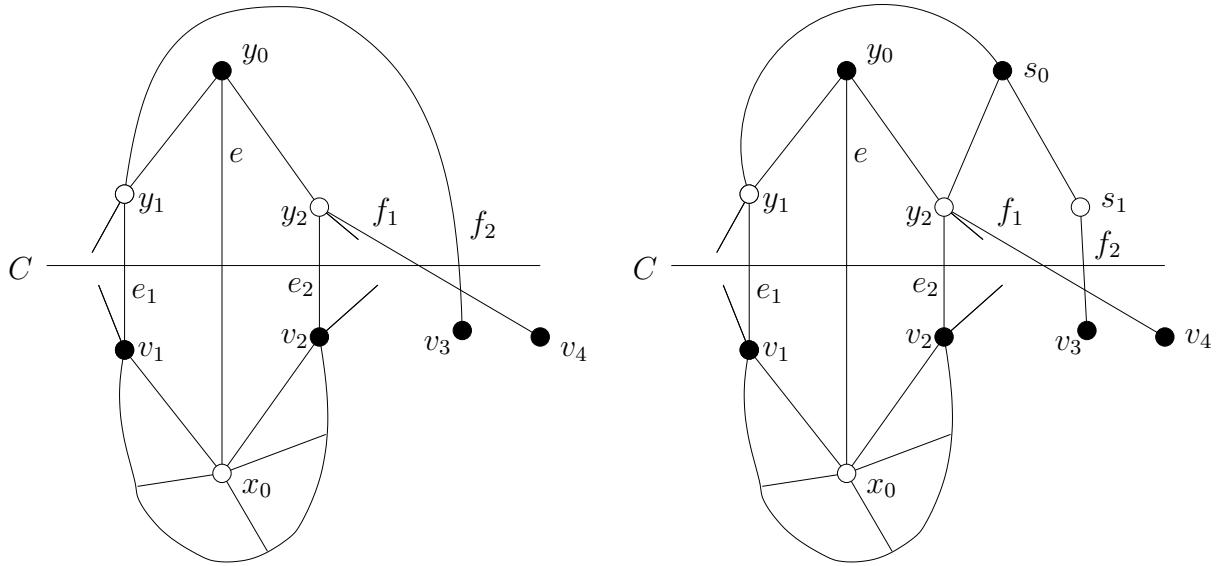


Figura 7.8: O grafo  $G^*$  e as duas possibilidades de incidência da aresta  $f_1$ : em  $y_1$  ou em  $s_1$ .

Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$  contendo  $e_1$  e  $e_2$ . Seja  $N$  um emparelhamento perfeito de  $G$  contendo  $f_1$  e  $f_2$ . Sejam  $w_i$  o extremo de  $f_i$  em  $X$ , para  $i = 1, 2$ . Seja  $L := G[M \oplus N][X]$ . Os vértices de  $L$  tem grau 0, 1 ou 2. Os vértices de grau menor do que dois em  $L$  são precisamente os vértices de  $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ . Assim,  $L$  se decompõe em circuitos e caminhos, sendo que  $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$  é o conjunto dos vértices de  $L$  que são extremos de caminhos na decomposição de  $L$ . Para  $i = 1, 2$ , seja  $P_i$  o caminho em  $L$  cuja origem é  $v_i$ .

Vamos agora mostrar que  $P_1$  e  $P_2$  são disjuntos. O vértice  $v_2$  não é interno em  $P_1$ , pois seu grau em  $L$  é menor do que dois. O vértice  $v_2$  não é origem de  $P_1$ , pois  $v_1$  e  $v_2$  são distintos. O vértice  $v_2$  não é término de  $P_1$ , pois  $v_1$  e  $v_2$  pertencem à mesma parte da bipartição de  $G$ , e qualquer caminho  $M, N$ -alternado que ligasse  $v_1$  a  $v_2$  teria comprimento

ímpar (já que nem  $v_1$  nem  $v_2$  incidem em aresta de  $M$  em  $L$ ). Assim,  $P_1$  não é o caminho da decomposição de  $L$  que contém  $v_2$ , e portanto  $P_1$  e  $P_2$  são disjuntos.

Vamos agora mostrar que  $P_i$  liga  $v_i$  a  $w_i$ , para  $i = 1, 2$ . O caminho  $P_1$  não contém  $v_2$ . Logo seu término é  $w_1$  ou  $w_2$ . Suponha, por absurdo, que seu término é  $w_2$ . Então  $P_2$ , que é disjunto de  $P_1$ , liga  $v_2$  a  $w_1$ . Mas, a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_2, f_1)$  é planar em  $H^*$ . Como  $v_2$  não pertence a  $P_1$ , então concluímos que  $w_1$  pertence a  $P_1$ . O vértice  $w_1$  não é o término  $w_2$  de  $P_1$ , pois  $w_1 \neq w_2$ . O vértice  $w_1$  não é interno em  $P_1$ , pois seu grau em  $L$  é menor do que 2. Finalmente, se  $w_1 = v_1$  então o grau de  $w_1$  em  $L$  é zero, o que força  $w_2 = v_1 = w_1$ , o que é uma contradição. De fato,  $P_i$  liga  $v_i$  a  $w_i$ , para  $i = 1, 2$ , e  $P_1$  e  $P_2$  são disjuntos.

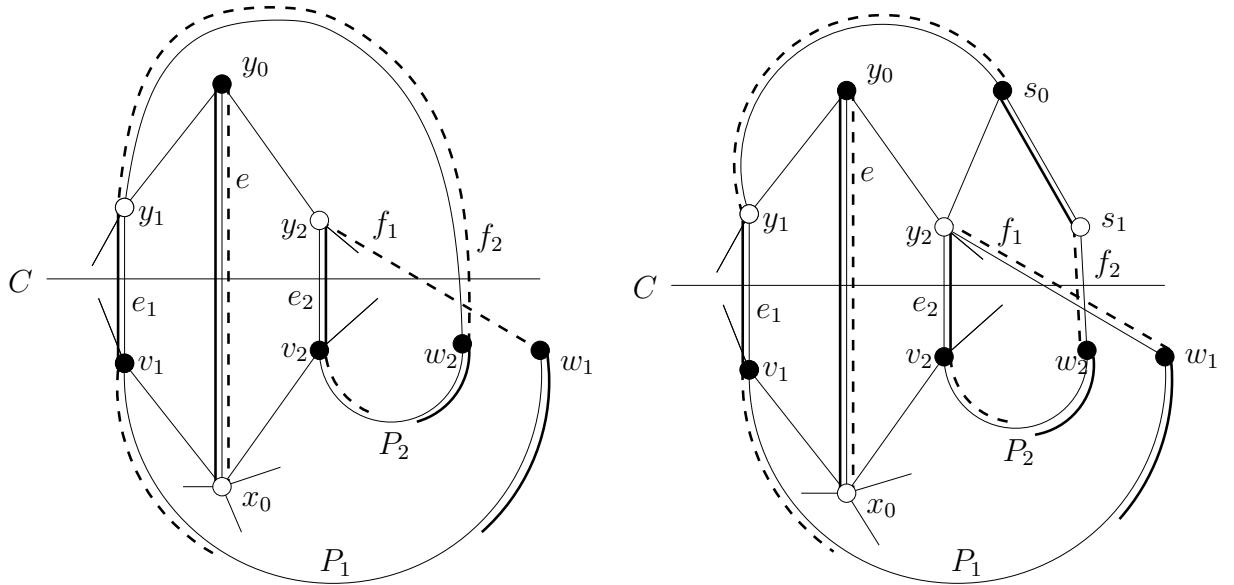


Figura 7.9: O grafo  $G^*$  e os emparelhamentos  $M_1$ , em negrito, e  $M_2$ , em tracejado.

Seja  $Q$  o circuito  $M, N$ -alternado de  $G$  que contém  $e_1$ . Então,  $Q$  contém  $v_1$  e portanto  $P_1$  é um caminho em  $Q$ . Logo,  $f_1 \in E(Q)$ . Mas,  $f_1$  incide em  $y_2$ , portanto  $e_2$  também pertence a  $E(Q)$ . Assim, as quatro arestas  $e_1, e_2, f_1$  e  $f_2$  pertencem a  $E(Q)$  e os caminhos  $P_1$  e  $P_2$  são ambos caminhos em  $Q$ . Dessa forma,  $e_1 + P_1 + f_1 + e_2 + P_2 + f_2$  é um segmento de  $Q$ . Além disso, como  $e \in M \cap N$ , temos que  $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$  é precisamente o conjunto de arestas de  $Q$  em  $C$ . Sendo assim, o segmento de  $Q$  que vai de  $y_1$  a  $f_2$  sem passar por  $e_1$  está inteiramente contido em  $G[\overline{X}]$ . Seja  $K$  o subgrafo de  $G^*$  induzido pelos vértices de  $V(Q) \cup \{x_0, y_0\}$ . A restrição de  $M$  a  $K$  é emparelhamento perfeito de  $K$ , portanto  $M$  restrito a  $G^* - V(K)$  é emparelhamento perfeito de  $G^* - V(K)$ . Então,  $K$  é conforme em  $G^*$ . Além disso,  $K$  é uma bissubdivisão de  $K_{3,3}$ , onde o conjunto de vértices de grau três de  $K$  é  $\{x_0, y_0, v_1, v_2, y_1, y_2\}$ . Isto pode ser observado na Figura 7.9. Portanto,  $G^*$  tem uma

bissubdivisão conforme de  $K_{3,3}$ . No entanto, bissubdivisões de  $K_{3,3}$  não são Pfaffianas. Sendo assim, pelo Corolário 1.2.4,  $G^*$  não é Pfaffiano. Isto é uma contradição à conclusão anterior. A hipótese de que  $H$  é planar nos levou em todos os casos a contradições. De fato,  $H$  não é planar.  $\square$

# **Capítulo 8**

## **Conclusão**

O algoritmo de reconhecimento de grafos bipartidos foi descoberto e provado independentemente por McCuaig [13] e por Robertson, Seymour e Thomas [14]. As duas provas são bastante diferentes. Nesta dissertação, apresentamos uma prova alternativa para o algoritmo. Esta prova utiliza métodos distintos dos utilizados nas duas provas anteriormente conhecidas.

# Referências Bibliográficas

- [1] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. Ear decompositions of matching covered graphs. *Combinatorica*, 19:151–174, 1999.
- [2] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On a conjecture of Lovász concerning bricks. I. The characteristic of a matching covered graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 85:94–136, 2002.
- [3] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On a conjecture of Lovász concerning bricks. II. Bricks of finite characteristic. *J. Combin. Theory Ser. B*, 85:137–180, 2002.
- [4] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. How to build a brace. Technical Report 05-014, Instituto de Computação, UNICAMP, Brasil, 2005. Veja também [www.ic.unicamp.br/~lucchesi/brace-tr.pdf](http://www.ic.unicamp.br/~lucchesi/brace-tr.pdf).
- [5] M. H. de Carvalho, C. L. Lucchesi, and U. S. R. Murty. On the number of dissimilar Pfaffian orientations of graphs. *Theor. Inform. Appl.*, 39:93–113, 2005.
- [6] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1996.
- [7] P. W. Kasteleyn. Dimer statistics and phase transitions. *J. Math. Phys.*, 4:287–293, 1963.
- [8] C. Little and F. Rendl. Operations preserving the pfaffian property of a graph. *Austral Math. Soc., Series A*(50):248–257, 1991.
- [9] C. H. C. Little. A characterization of convertible  $(0, 1)$ -matrices. *J. Combin. Theory Ser. B*, 18:187–208, 1975.
- [10] L. Lovász. Matching structure and the matching lattice. *J. Combin. Theory Ser. B*, 43:187–222, 1987.

- [11] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Number 29 in Annals of Discrete Mathematics. Elsevier Science, 1986.
- [12] W. McCuaig. Brace generation. *J. Graph Theory*, 38:124–169, 2001.
- [13] W. McCuaig. Pólya’s permanent problem. *The Electronic J. of Combin.*, 11, 2004.
- [14] N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Permanents, Pfaffian orientations and even directed circuits. *Ann. of Math. (2)*, 150:929–975, 1999.
- [15] P. A. Samuelson. *Foundations of Economic Analysis*. Atheneum, New York, 1971.
- [16] A. Schrijver. *Combinatorial optimization : polyhedra and efficiency*. volume A, paths, flows, matchings, chapter 1-38. Springer, 2003. Schrijver.
- [17] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.
- [18] W. T. Tutte. *Graph Theory as I Have Known It*. Number 11 in Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [19] L. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*, 8:189–201, 1979.
- [20] V. V. Vazirani and M. Yannakakis. Pfaffian orientation of graphs, 0,1 permanents, and even cycles in digraphs. *Discrete Applied, Math.*, 25:179–180, 1989.
- [21] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *American Journal of Mathematics*, 54(1):150–168, Janeiro 1932. <http://links.jstos.org/sici?0002-9327%28193201%2954%3A1%3C150%3ACGATCO%3E2.0.CO%3B2-X>.

# Índice Remissivo

- aresta
  - magra, 18, 122
  - removível, 12, 119
  - verdadeiramente magra, 18, 122
- aro, 18
- bicontração, 18, 122
- bissubdivisão, 3
- centro, 18
- círculo
  - orientação de, 2
- complemento bipartido, 29
- conforme, vii
- $C$ -contração, 4
- $G\{X \rightarrow x\}$ , 9, 118
- $\partial_G(X)$ , 9, 118
- corte justo, 4
  - decomposição em, 4
- diferença simétrica, 3, 117
- emparelhamento perfeito
  - sinal de, 2
- expansão, 9, 118
- grafo
  - coberto por emparelhamentos, 4, 10
  - conforme, vii
  - irreduzível, 5, 74
  - menor, 41
  - Pfaffiano, 2
  - Pfaffiano, vii
- presilhas de, 13, 119
- redutível, 5, 74
- subgrafo conforme, 2
- imersão
  - igual, 29
  - única, 29
- índice, 18, 122
- majoritária, 13, 119
- matriz
  - anti-simétrica, 1
  - minoritária, 13, 119
- ordem cíclica planar, 110
- orientação
  - similar, 21
- orientação
  - bipartida orientada, 26, 125
  - ímpar, vii, 2
- parcela, 31
- permutação
  - sinal de, 2
- Pfaffiano
  - polinômio, 1
- Pfaffiano, Pfaffiana
  - grafo, 2
  - orientação, 2
- presilha, 4
  - consecutiva, 16, 121
  - externa, 16, 121
  - interna, 16, 121

- reduzir, 5
- similar, 21
- soma
  - 4-soma, 31
  - 4-soma
    - completa, 31
    - fina, 31
  - $(Q, R)$ -soma, 31
- spin, 40
- subdivisão, 3
- tijolo, 4
- transitivo
  - $P_n$ -transitivo, 24, 124

# Listas de Asserções

**Notação 1.2.1** ..... 3

Vamos denotar a operação de diferença simétrica por  $\oplus$ .

**Lema 1.2.2** {lem:parity:circuit} ..... 3

Seja  $D$  uma orientação de um grafo  $G$ , fixe uma enumeração arbitrária dos vértices de  $D$ . Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois emparelhamentos perfeitos de  $G$ . Seja  $k$  o número de circuitos de  $M_1 \oplus M_2$  cuja orientação em  $D$  é par. Então,

$$\operatorname{sgn}(M_1) \cdot \operatorname{sgn}(M_2) = (-1)^k.$$

**Teorema 1.2.3** {thm:define-pfaffian} ..... 3

Seja  $G$  um grafo,  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G$  e  $D$  uma orientação de  $G$ . Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

- $D$  é Pfaffiana;
- todo emparelhamento perfeito de  $G$  tem o mesmo sinal de  $M$  em  $D$ ;
- todo circuito conforme em  $G$  tem orientação ímpar em  $D$ ;
- todo circuito  $M$ -alternado tem orientação ímpar em  $D$ .

**Corolário 1.2.4** {cor:conformalPfaffian} ..... 3

Seja  $D$  uma orientação Pfaffiana de um grafo  $G$ . Seja  $H$  um subgrafo conforme de  $G$ . Então, a restrição de  $D$  a  $H$  é Pfaffiana.

**Teorema 1.5.1** ..... 5

**(Teorema Principal)** Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana irredutível e não planar. Então,  $G$  é o grafo de Heawood.

**Notação 2.1.1** ..... 9

Sejam  $G$  um grafo, e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ . Então,  $G\{X \rightarrow x\}$  é o grafo obtido de  $G$  pela contração de todos os vértices em  $X$  ao vértice  $x$ .

**Notação 2.1.2** ..... 9

Sejam  $G$  um grafo, e  $x$  um vértice de  $G$ . Então,  $H := G\{x \rightarrow X\}$  é o grafo obtido de  $G$  pela substituição de  $x$  pelos vértices de  $X$ , onde as arestas de  $G$  incidentes em  $x$  incidem em  $H$  em um vértice de  $X$ . Chamamos esta operação de *expansão*.

**Notação 2.1.3** ..... 9

Seja  $G$  um grafo, e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ . Então,  $\partial_G(X)$  é o conjunto das arestas de  $G$  com precisamente um extremo em  $X$ . Então,  $X$  e  $\overline{X}$  são as praias de  $\partial_G(X)$ .

**Lema 2.2.1 {lem:mc-2-connected}** ..... 10

Todo grafo coberto por emparelhamentos com quatro ou mais vértices é 2-conexo.

**Lema 2.2.2 {lem:mc-cut-mc}** ..... 10

Seja  $G$  um grafo,  $C := \partial(X)$  um corte justo de  $G$ . Então,  $G$  é coberto por emparelhamentos se e somente se cada  $C$ -contração de  $G$  é coberta por emparelhamentos.

**Corolário 2.2.3 {cor:mc-cut-connected}** ..... 10

Toda praia de corte justo de um grafo coberto por emparelhamentos gera um grafo conexo.

□

**Lema 2.2.4** ..... 10

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos. Seja  $C_G := \partial_G(X_G)$  um corte justo não trivial de  $G$ . Seja  $H := G\{X_G \rightarrow x_G\}$  uma das  $C_G$ -contrações de  $G$ . Suponha que  $C_H := \partial_H(X_H)$  seja um corte justo de  $H$ . Então,  $C_H$  é corte justo de  $G$ . □

**Teorema 2.2.5 {thm:lovasz-tight-cut}** ..... 10

**(Teorema de Lovász)** Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos. O conjunto de grafos resultantes de uma decomposição em cortes justos de  $G$  é único a menos de isomorfismos e arestas múltiplas.

**Teorema 2.3.1 {thm:bipartite:mc:char, item:Gmc, item:NX>=X+1, item:G-u-v:pm, item:A1-A2-B1-B2}** ..... 11

Seja  $G$  um grafo com bipartição  $\{U, W\}$ . Se  $|U| = |W|$  e  $G$  tem pelo menos quatro vértices, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) O grafo  $G$  é coberto por emparelhamentos

(ii) Para cada subconjunto não vazio  $X$  de  $U$ , se  $|X| \leq |U| - 1$  então  $|N(X)| \geq |X| + 1$ .

- (iii) Para todo  $u \in U$ ,  $w \in W$ , o grafo  $G - u - w$  tem emparelhamento perfeito
- (iv) O grafo  $G$  tem emparelhamento perfeito, e para toda partição  $\{U', U''\}$  de  $U$  e toda partição  $\{W', W''\}$  de  $W$ , tal que  $|U'| = |W'|$ , o grafo  $G$  tem pelo menos uma aresta que liga  $U'$  a  $W''$ .

**Definição 2.3.2** ..... 12

Uma aresta  $e$  de um grafo coberto por emparelhamentos  $G$  é *removível* se o grafo  $G - e$  é coberto por emparelhamentos.

**Corolário 2.3.3 {cor:removable:bipartite}** ..... 12

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com pelo menos quatro vértices e bipartição  $\{U, W\}$ . Uma aresta  $e$  de  $G$  não é removível se e somente se existe uma partição  $\{U', U''\}$  de  $U$  e existe uma partição  $\{W', W''\}$  de  $W$ , com  $|U'| = |W'|$  e  $e$  é a única aresta que liga vértice de  $U'$  a vértice de  $W''$ .  $\square$

**Notação 2.3.4 {not:X+-}** ..... 13

Sejam  $G$  um grafo bipartido com bipartição  $\{U, W\}$ , e  $X$  um subconjunto dos vértices de  $G$ , tal que  $|X \cap U|$  e  $|X \cap W|$  sejam distintos. Então, definimos como  $X_+$  ou  $X^+$  o conjunto dentre  $X \cap U$  e  $X \cap W$  que contém mais vértices. Analogamente,  $X_-$  ou  $X^-$  é definido como o conjunto dentre  $X \cap U$  e  $X \cap W$  que contém menos vértices. Dizemos que  $X_+$  é a parte *majoritária* de  $X$  e que  $X_-$  é a parte *minoritária* de  $X$ .

**Lema 2.3.5 {lem:tight:bipartite}** ..... 13

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos com bipartição  $\{U, W\}$ . Um corte  $C$  com praia  $X$  de  $G$  é justo se e somente se: (i)  $|X \cap U|$  e  $|X \cap W|$  diferem de exatamente um, e (ii) toda aresta de  $C$  é incidente em um vértice da parte majoritária de  $X$ .

**Lema 2.3.6** ..... 13

Os grafos resultantes da decomposição em cortes justos de um grafo bipartido coberto por emparelhamentos são todos bipartidos.

**Definição 2.3.7** ..... 13

As *presilhas* de um grafo bipartido  $G$  coberto por emparelhamentos são as presilhas resultantes de uma decomposição em cortes justos de  $G$ .

**Teorema 2.3.8 {thm:brace:char, item:Gbrace, item:NX>=X+2, item:G-u1-u1-w1-w2:pm}** ..... 13

Seja  $G$  um grafo com bipartição  $\{U, W\}$ . Se  $|U| = |W|$  e  $G$  tem pelo menos seis vértices, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) O grafo  $G$  é uma presilha.

- (ii) Para cada subconjunto não vazio  $X$  de  $U$ , se  $|X| \leq |U| - 2$  então  $|N(X)| \geq |X| + 2$ .
- (iii) Para quaisquer dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  em  $U$  e quaisquer dois vértice  $w_1$  e  $w_2$  em  $W$ , o grafo  $G - u_1 - u_2 - w_1 - w_2$  tem um emparelhamento perfeito.

**Corolário 2.3.9** {cor:brace-x-y-mc} ..... 13

Sejam  $G$  uma presilha com seis ou mais vértices e  $x$  e  $y$  vértices em partições diferentes de  $G$ . O grafo  $G - x - y$  é coberto por emparelhamentos.  $\square$

**Corolário 2.3.10** {cor:brace-2-extensivel} ..... 14

Sejam  $G$  uma presilha e  $e_1$  e  $e_2$  duas arestas não adjacentes de  $G$ . O grafo  $G$  tem um emparelhamento perfeito contendo  $e_1$  e  $e_2$ .  $\square$

**Corolário 2.3.11** {cor:brace+e=brace} ..... 14

Sejam  $G$  uma presilha com bipartição  $\{U, W\}$ ,  $u$  um vértice de  $U$  e  $w$  um vértice de  $W$ . Então, o grafo  $G + uw$  é uma presilha.  $\square$

**Corolário 2.3.12** {cor:brace>=6=>edge-removable} ..... 14

Toda aresta de uma presilha com seis ou mais vértices é removível.

**Corolário 2.3.13** {cor:brace-3} ..... 14

Sejam  $G$  uma presilha com bipartição  $\{U, W\}$  e  $X$  um conjunto de três vértices de  $G$ . Se  $X$  não é subconjunto de  $U$ , nem de  $W$ , então  $G - X$  é conexo.

**Corolário 2.3.14** {cor:brace-3-connected} ..... 14

Toda presilha com seis ou mais vértices é 3-conexa.

**Corolário 2.3.15** {cor:brace-321} ..... 14

Seja  $G$  uma presilha com seis ou mais vértices. Seja  $Z$  um subconjunto de  $V(G)$  com no máximo três vértices, sendo que  $Z$  tem no máximo dois vértices em cada parte da bipartição de  $G$ . Então,  $G - Z$  é conexo.

**Corolário 2.3.16** {cor:g-presilha-C-e-separa-x0-y0} ..... 15

Sejam  $G$  uma presilha e  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ . Seja  $C := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Então, um dentre  $x_0$  e  $y_0$  está em  $X_-$ , o outro em  $\overline{X}_-$ .

**Corolário 2.3.17** {cor:brace-e-match-e-tight-cut} ..... 15

Seja  $G$  uma presilha,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $C := \partial(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Então todo emparelhamento perfeito de  $G$  contendo  $e$  tem precisamente três arestas em  $C$ .

**Lema 2.3.18 {lem:ordem-total-G-e}** ..... 15

Sejam  $G$  uma presilha,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ , e  $\mathcal{C} := \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ , com  $r \geq 1$ , o conjunto de cortes justos de uma decomposição em cortes justos de  $G - e$ . Seja  $X_i$  subconjunto de  $V(G)$ , tal que  $C_i = \partial_G(X_i) - e$ . Então, é possível ajustar a notação, complementando algumas praias de cortes de  $\mathcal{C}$  se necessário, tal que  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_r \subset V(G)$ . Além disso, o conjunto das presilhas de  $G - e$  é  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} G_i$ , onde:

- $G_0 := (G - e)\{\overline{X_1} \rightarrow \overline{x_1}\};$
- $G_i := (G - e)\{X_i \rightarrow x_i\}\{\overline{X_{i+1}} \rightarrow \overline{x_{i+1}}\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ;
- $G_r := (G - e)\{X_r \rightarrow x_r\}.$

**Corolário 2.3.19 {cor:3case}** ..... 16

Sejam  $G$  uma presilha,  $e$  uma aresta removível de  $G$  e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Então  $H$  tem no máximo dois vértices de contração. Além disso, (i) se  $H$  tiver precisamente um vértice de contração, então o (único) extremo de  $e$  em  $V(H)$  está na mesma parte da bipartição do vértice de contração, (ii) se  $H$  tiver dois vértices de contração, estes vértices estão em partes distintas de sua bipartição.

**Notação 2.3.20** ..... 16

Considerando a notação utilizada no Lema 2.3.18, dizemos que  $G_i$  e  $G_{i+1}$  são presilhas *consecutivas* de  $G - e$ , para  $i = 0, 1, \dots, r - 1$ . Além disso, dizemos que  $G_0$  e  $G_r$  são presilhas *externas*, e que  $G_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$ , são presilhas *internas* de  $G - e$ .

**Lema 2.3.21** ..... 17

Sejam  $G$  uma presilha,  $e$  uma aresta removível de  $G$  e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Então, uma das seguintes afirmações acontece:

- $H = G - e$ .
- Seja  $C_X := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , tal que o corte  $C_X - e$  é justo em  $G - e$  e o grafo  $H$  é a  $(C_X - e)$ -contração  $(G - e)\{X \rightarrow x\}$  de  $G - e$ . Então,  $e \in C_X$  e o extremo de  $e$  não contraído está na mesma parte de  $x$  da bipartição de  $H$ .
- Sejam  $C_X := \partial_G(X)$  e  $C_Y := \partial_G(Y)$  cortes não triviais de  $G$ , tais que os cortes  $C_X - e$  e  $C_Y - e$  são justos em  $G - e$ , e o grafo  $H$  é a  $(C_X - e), (C_Y - e)$  contração  $(G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$  de  $G - e$ . Então,  $e \in (C_X \cap C_Y)$ , e  $x$  e  $y$  estão em partes distintas da bipartição de  $H$ .

**Lema 2.3.22** {lem:brace-3-match} ..... 17

Seja  $G$  uma presilha,  $X \subset V(G)$  e  $C := \partial(X)$  um corte de  $G$ , tal que  $|X| \geq 3$  e  $|\overline{X}| \geq 3$ . Então,  $H := G[C]$  tem um emparelhamento de tamanho três.

**Definição 2.3.23** ..... 18

Uma *bicontração* é uma operação aplicada sobre um grafo onde se contrai um vértice de grau dois e seus dois vizinhos a um único vértice.

**Definição 2.3.24** ..... 18

O *índice* de uma aresta  $e$  é o número de extremos de  $e$  que têm grau três.

**Definição 2.3.25** ..... 18

Seja  $e$  uma aresta de uma presilha  $G$  com mais de quatro vértices. A aresta  $e$  é dita *magra* se uma presilha pode ser obtida de  $G - e$  por  $k$  bicontrações, onde  $k$  é o índice de  $e$ .

**Definição 2.3.26** ..... 18

Uma aresta magra  $e$  é dita *verdadeiramente magra* se a presilha obtida de  $G - e$  através de  $k$  bicontrações for simples.

**Teorema 2.3.27** {thm:truly-thin} ..... 19

Toda presilha simples com pelo menos seis vértices distinta de roda dupla  $B_{2n}$  ( $n \geq 4$ ); distinta de prisma bipartido  $L_{4n}$  ( $n \geq 2$ ); e distinta de escada de Möbius bipartida  $M_{4n+2}$  ( $n \geq 1$ ), tem uma aresta verdadeiramente magra.

**Teorema 2.3.28** ..... 19

Toda presilha com seis ou mais vértices tem uma aresta magra.

**Lema 2.3.29** {lem:brace-gen} ..... 20

**(Geração de Presilhas)** Seja  $H$  uma presilha com bipartição  $\{A, B\}$ . As seguintes operações resultam em uma presilha  $G$ :

- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$  tais que  $x \in A$  e  $y \in B$ . A presilha  $G$  é obtida de  $H$  pela adição da aresta  $xy$ .
- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$  tais que  $x, y \in A$ , e o grau de  $x$  seja pelo menos quatro. Seja  $H' := H\{x \rightarrow \{x_1, x_2\}\}$  tal que tanto  $x_1$  como  $x_2$  tenham dois vizinhos em  $H'$ . A presilha  $G$  é obtida de  $H'$  pela adição de um vértice  $x_0$  e das arestas  $x_0x_1$ ,  $x_0x_2$  e  $x_0y$ .
- Sejam  $x$  e  $y$  vértices de  $H$ , tais que  $x \in A$ ,  $y \in B$  e cujos graus são pelo menos quatro. Seja  $H'' := H\{x \rightarrow \{x_1, x_2\}\}\{y \rightarrow \{y_1, y_2\}\}$ , tal que cada um dentre  $x_1, x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$  tenham dois vizinhos, e pelo menos um vizinho em  $V(H) - \{x, y\}$ . A presilha

<i>G</i> é obtida de $H''$ pela adição de dois vértices $x_0$ e $y_0$ , e das arestas $x_0x_1$ , $x_0x_2$ , $y_0y_1$ , $y_0y_2$ e $x_0y_0$ .	
<b>Lema 2.3.30</b> {lem:roda-prisma-planar} .....	20
Toda roda dupla e todo prisma é planar.	
<b>Lema 2.3.31</b> .....	20
Toda escada de Möbius bipartida é coberta por emparelhamentos. $\square$	
<b>Lema 2.3.32</b> {lem:escada-mobius-nao-pfaffian} .....	20
Toda escada de Möbius bipartida é não Pfaffiana.	
<b>Teorema 2.4.1</b> {thm:caracteriza-pfaffian} .....	21
Um grafo bipartido $G$ é Pfaffiano se e somente se não existe um subgrafo $H$ conforme de $G$ que é uma bissubdivisão de $K_{3,3}$ .	
<b>Lema 2.4.2</b> {lem:similarPfaffian} .....	21
Sejam $D_1$ e $D_2$ duas orientações similares de $G$ . Então, $D_1$ é Pfaffiana se e somente se $D_2$ for Pfaffiana.	
<b>Teorema 2.4.3</b> {thm:unique-extension} .....	21
Seja $G$ um grafo coberto por emparelhamentos, $e$ uma aresta removível de $G$ , e $D'$ uma orientação Pfaffiana de $G - e$ . Se $G$ é Pfaffiano, então existe precisamente uma extensão de $D'$ a uma orientação Pfaffiana $D$ de $G$ .	
<b>Lema 2.4.4</b> {lem:similar-bipartido} .....	21
Sejam $D_1$ e $D_2$ duas orientações Pfaffianas de um grafo bipartido $G$ . Então, $D_1$ é similar a $D_2$ .	
<b>Teorema 2.4.5</b> {thm:existence-extension-conformal} .....	21
Seja $G$ um grafo bipartido coberto por emparelhamentos, $H$ um subgrafo conforme de $G$ coberto por emparelhamentos, e $D'$ uma orientação Pfaffiana de $H$ . Existe uma extensão de $D'$ a uma orientação Pfaffiana de $G$ se e somente se $G$ é Pfaffiano.	
<b>Lema 2.4.6</b> {lem:similar-source-sink} .....	22
Seja $D$ uma orientação Pfaffiana de um grafo bipartido $G$ . Sejam $u$ e $w$ dois vértices de $G$ em partes distintas da bipartição de $G$ . Existe uma orientação Pfaffiana $D'$ similar a $D$ tal que $u$ é fonte e $w$ é sorvedouro.	
<b>Teorema 2.4.7</b> {thm:little-cut-extension} .....	22
Sejam $G$ um grafo coberto por emparelhamentos, $C$ um corte justo de $G$ e $G_1$ e $G_2$ as duas $C$ -contrações de $G$ . Então, $G$ é Pfaffiano se e somente se $G_1$ e $G_2$ são Pfaffianos.	

Além disso, se  $D_1$  e  $D_2$  são orientações Pfaffianas de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, e  $D_1$  e  $D_2$  são orientadas em  $C$  e concordam em  $C$ , então a extensão de  $D_1$  e  $D_2$  a uma orientação de  $G$  é Pfaffiana.

**Corolário 2.4.8** {cor:little-cut} ..... 22

Sejam  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos Pfaffiano e  $e$  uma aresta removível de  $G$ . Então, todos os grafos de uma decomposição em cortes justos de  $G - e$  são Pfaffianos. Em particular, todas as presilhas de  $G - e$  são Pfaffianas.  $\square$

**Lema 2.4.9** {lem:orientacao-canonica-Gstar} ..... 23

Seja  $G$  um grafo bipartido coberto por emparelhamentos Pfaffiano, seja  $R$  um conjunto de arestas adicionadas a  $G$  tal que  $G^* := G + R$  é bipartido e coberto por emparelhamentos. Seja  $e$  uma aresta removível de  $G$ . Toda orientação Pfaffiana de  $G^* - e$  tem uma extensão a uma orientação  $D^*$  de  $G^*$  cuja restrição a  $G$  é Pfaffiana.

**Lema 2.4.10** {lem:estende-contracao} ..... 23

Seja  $G$  um grafo coberto por emparelhamentos Pfaffiano. Seja  $H$  um grafo obtido a partir de  $G$  por contração de praias de cortes justos de  $G$ . Seja  $D(H)$  uma orientação Pfaffiana de  $H$  na qual todo vértice de contração de  $H$  é ou uma fonte ou um sorvedouro. Então  $G$  tem uma orientação Pfaffiana cuja restrição a  $H$  é igual a  $D(H)$ .

**Lema 2.5.1** {lem:hea-vert-trans} ..... 24

O grafo de Heawood é transitivo nos vértices.

**Definição 2.5.2** ..... 24

Um grafo  $G$  é  $P_n$ -transitivo se, para todo par de caminhos  $P := (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$  e  $Q := (q_0, q_1, \dots, q_{n-1})$ , existe um automorfismo  $\varphi$  de  $G$  tal que  $\varphi(p_i) = q_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Lema 2.5.3** {lem:hea-p2-trans} ..... 24

O grafo de Heawood é  $P_2$ -transitivo.

**Lema 2.5.4** {lem:hea-p5-trans} ..... 25

O grafo de Heawood é  $P_5$ -transitivo.

**Lema 2.5.5** {lem:H14properties} ..... 25

O grafo de Heawood é  $P_5$ -transitivo, não planar, tem diâmetro três e cintura seis.

**Corolário 2.5.6** {cor:hea-sym-e} ..... 26

Sejam  $v_0$  e  $v_1$  dois vértices adjacentes de  $H_{14}$ . Sejam  $v'_0$  e  $v'_1$  dois vértices adjacentes de  $H_{14}$  (possivelmente  $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$  não é vazio). Existe um automorfismo que leva  $v_0$  a  $v'_0$  e  $v_1$  a  $v'_1$ .

<b>Corolário 2.5.7 {cor:hea-sym+e} .....</b>	26
Sejam $v_0$ e $v_1$ dois vértices não adjacentes de $H_{14}$ em partes distintas da bipartição de $H_{14}$ . Sejam $v'_0$ e $v'_1$ dois vértices não adjacentes de $H_{14}$ em partes distintas da bipartição de $H_{14}$ . (possivelmente $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$ não é vazio). Existe um automorfismo que leva $v_0$ a $v'_0$ e $v_1$ a $v'_1$ .	
<b>Corolário 2.5.8 {cor:hea-sym-uu} .....</b>	26
Sejam $v_0$ e $v_1$ dois vértices de $H_{14}$ em uma mesma parte da bipartição de $H_{14}$ . Sejam $v'_0$ e $v'_1$ dois vértices de $H_{14}$ em uma mesma parte da bipartição de $H_{14}$ . (possivelmente $\{v_0, v_1\} \cap \{v'_0, v'_1\}$ não é vazio). Existe um automorfismo que leva $v_0$ a $v'_0$ e $v_1$ a $v'_1$ .	
<b>Definição 2.5.9 .....</b>	26
Uma orientação $D$ de um grafo com bipartição $\{U, W\}$ é <i>bipartida orientada</i> se ou (i) toda aresta de $D$ tem sua origem em $U$ , ou (ii) toda aresta de $D$ tem sua origem em $W$ .	
<b>Lema 2.5.10 {lem:hea-dir-bip} .....</b>	27
Toda orientação bipartida orientada do grafo de Heawood é Pfaffiana.	
<b>Lema 2.5.11 {lem:H14Pfaffian} .....</b>	27
O grafo de Heawood é uma presilha Pfaffiana.	
<b>Lema 2.6.1 {lem:planar-Pfaffiano} .....</b>	28
Todo grafo planar é Pfaffiano.	
<b>Lema 2.6.2 {lem:2-conexo-face-circuito} .....</b>	28
Seja $G$ um grafo planar simples 2-conexo. Então toda face de $G$ é delimitada por um circuito.	
<b>Lema 2.6.3 {lem:mc-face-conforme} .....</b>	29
Toda face de um grafo bipartido planar coberto por emparelhamentos é delimitada por um circuito conforme.	
<b>Lema 2.6.4 {lem:paridade-Q-v-interno} .....</b>	29
Se $D$ é uma orientação das arestas de um grafo planar conexo tal que todo circuito facial de $D$ (exceto possivelmente o circuito que delimita a face infinita) tem um número ímpar de arestas no sentido horário, então em cada circuito, o número de arestas orientadas no sentido horário tem paridade oposta à paridade do número de vértices de $D$ dentro do circuito. Dessa forma, $D$ é Pfaffiano.	
<b>Corolário 2.6.5 {cor:plan-par} .....</b>	29
A paridade da orientação de um circuito em uma orientação Pfaffiana de um grafo bipartido planar coberto por emparelhamentos é o oposto da paridade do número de vértices internos ao circuito numa imersão planar.	

<b>Teorema 2.6.6</b> {thm:planar-3-conexo} .....	29
Um grafo simples planar 3-conexo tem uma única imersão planar.	
<b>Lema 2.6.7</b> {lem:cubo-unico-planar-pfaffian-8} .....	30
O cubo é a única presilha simples planar com oito vértices, e a única presilha simples Pfaffiana com oito vértices.	
<b>Teorema 3.1.1</b> {thm:braces-4-sum-braces, item:brace-down, item:brace-up} 32	
Seja $G$ um grafo bipartido coberto por emparelhamentos que é uma 4-soma de $n \geq 2$ grafos bipartidos. Então,	
(i) se $G$ é uma presilha, então cada parcela é uma presilha;	
(ii) se $G$ não é uma presilha mas cada parcela é uma presilha, então $n \leq 3$ e a soma não é completa. Se, além disso, $n = 3$ , então a soma é fina e $G = H_{10}$ .	
<b>Corolário 3.1.2</b> {cor:summand-conformal} .....	35
Seja $G$ uma presilha que é uma $(Q, R)$ -soma dos grafos de uma coleção $\mathcal{G}$ de grafos bipartidos. Para cada sub-coleção $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ e para cada superconjunto $R'$ de $R$ , a $(Q, R')$ -soma $G'$ dos grafos em $\mathcal{G}'$ é um subgrafo conforme de $G$ .	
<b>Teorema 3.2.1</b> {thm:pfaffian-braces-sum} .....	36
Seja $G$ uma $(Q, R)$ -soma de $n \geq 2$ grafos bipartidos. Se a 4-soma é completa ou se $n \geq 3$ , então $G$ é uma presilha Pfaffiana se e somente se cada parcela é uma presilha Pfaffiana.	
<b>Lema 4.1.1</b> .....	41
O grafo de Heawood é irreduzível.	
<b>Teorema 4.1.2</b> .....	42
<b>(Teorema Principal)</b> Seja $G$ uma presilha simples Pfaffiana irreduzível e não planar. Então, $G$ é o grafo de Heawood.	
<b>Lema 4.1.3</b> {lem:G-e:has-heawood} .....	42
<b>(Lema do Grafo de Heawood Não Contido)</b> Seja $G$ uma presilha simples Pfaffiana, $e$ uma aresta de $G$ . Então, nenhuma presilha de $G - e$ é isomorfa ao grafo de Heawood, mesmo desconsiderando-se arestas múltiplas.	
<b>Lema 4.1.4</b> {lem:heranca-redutibilidade} .....	42
<b>(Lema da Herança da Redutibilidade)</b> Seja $G$ um spin, $e$ uma aresta de $G$ , e $H$ uma presilha de $G - e$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que $G$ , e se (i) o grafo $H$ tem no máximo um vértice de contração, ou se (ii) a aresta $e$ é magra, então $H$ é irreduzível.	

**Lema 4.1.5** {lem:j-e-contracao-nao-planar} ..... 42

**(Lema da Não Planaridade das Contrações)** Seja  $G$  uma presilha Pfaffiana e irreduzível e  $e$  uma aresta de  $G$ . Seja  $C := \partial_G(X)$  um corte de  $G$  tal que  $C - e$  é justo em  $G - e$ . Se  $G - e$  não é planar, e  $|\overline{X}| \leq 5$ , então a contração  $(G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$  não é planar.

**Corolário 4.1.6** {cor:lnpc} ..... 42

Seja  $G$  um spin, e  $e$  uma aresta de  $G$ . Então,  $G - e$  não é planar.

**Lema 4.1.7** {lem:g-e-nao-planar} ..... 43

Seja  $J$  uma presilha simples Pfaffiana não planar,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $J$ . Então  $J - e$  não é planar.

**Lema 4.1.8** {lem:g-e-presilha-planar} ..... 43

Seja  $e$  uma aresta de  $G$ , e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Se  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se  $e$  é magra, então  $H$  é planar.

**Lema 4.1.9** {lem:e-magra-tipo-2-planar-so} ..... 43

Toda aresta magra  $e$  de  $G$  tem índice igual a 2, e a presilha interna de  $G - e$  é planar.

**Notação 4.1.10** {not:H+xy} ..... 45

- $X := \{x_0, x_1, x_2\}$  e  $C(X) := \partial_G(X)$ ;
- $Y := \{y_0, y_1, y_2\}$  e  $C(Y) := \partial_G(Y)$ ;
- $H := (G - e)\{X \rightarrow x\}\{Y \rightarrow y\}$ ;
- $H(\overline{x}) := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$  e  $H(\overline{y}) := (G - e)\{\overline{Y} \rightarrow \overline{y}\}$ ;
- $H(x) := (G - e)\{X \rightarrow x\}$  e  $H(y) := (G - e)\{Y \rightarrow y\}$ .

**Lema 4.1.11** {lem:G-14v} ..... 45

O grafo  $H$  tem dez ou mais vértices, e portanto  $G$  tem pelo menos quatorze vértices.

**Lema 4.1.12** {lem:quadrupla-nobre} ..... 46

As arestas de  $\partial_G(x_1) - x_1x_0$  não são contíguas na ordem cíclica de  $\partial_H(x)$  ao redor de  $x$  em  $\tilde{H}$ . Vide Figura 4.3.

**Lema 4.1.13** {lem:e-fora-quadrilatero} ..... 48

A aresta  $e$  não pertence a quadrilátero de  $G$  que tenha vértice de grau três não incidente em  $e$ .

<b>Lema 4.1.14 {lem:f-incide-quad-g3}</b> .....	48
Se $f$ for uma aresta verdadeiramente magra de $H$ e se um extremo $v$ de $f$ tem grau três em $G$ , então $v$ não pertence a quadrilátero de $G - f$ .	
<b>Lema 4.1.15 {lem:2-c4-ruim}</b> .....	50
Suponha que $f$ seja uma aresta verdadeiramente magra de $H$ , e que $G_0$ tenha precisamente quatro vértices. Então, $G_1$ tem mais de quatro vértices.	
<b>Teorema 4.1.16 {thm:f-magra-H-magra-G-2cond}</b> .....	51
Seja $f$ uma aresta magra de $H$ , tal que ou (i) $f$ é verdadeiramente magra em $H$ , ou (ii) o índice de $f$ em $G$ é menor do que 2. Então, $f$ é uma aresta magra de $G$ .	
<b>Lema 4.1.17</b> .....	52
O número de presilhas com mais de quatro vértices obtidas na decomposição em cortes justos de $G - f$ é precisamente um.	
<b>Teorema 4.1.18 {thm:h-sem-vm-g-h14}</b> .....	54
Se a presilha $H$ não tem aresta verdadeiramente magra, então $G$ é o grafo de Heawood.	
<b>Lema 4.1.19 {lem:h-sem-vm-b10}</b> .....	55
Se a presilha $H$ não tem aresta verdadeiramente magra, então $H$ é a roda dupla $B_{10}$ .	
<b>Lema 4.1.20 {lem:h-b10-g-h14}</b> .....	55
Se $H$ é igual ao grafo $B_{10}$ , então $G$ é igual ao grafo de Heawood.	
<b>Teorema 4.1.21 {thm:f-nao-vm-H}</b> .....	56
A presilha $H$ não tem aresta verdadeiramente magra.	
<b>Lema 4.1.22 {lem:x-rs-disjuntos}</b> .....	57
Se $f$ não incide nem em $x$ nem em adjacente de $x$ , então $X \cap (R \cup S) = \emptyset$ .	
<b>Lema 4.1.23 {lem:x-r-1-xr-ys-0}</b> .....	58
Se $f$ não incide em $x$ , mas incide em adjacente de $x$ , então podemos ajustar a notação de forma que $x_1 = r_1$ seja o único vértice de $X \cup R$ que pertença a mais de um conjunto dentre $X$ , $Y$ , $R$ e $S$ . Além disso, $x_1 = r_1$ não pertence a $Y \cup S$ .	
<b>Lema 4.1.24 {lem:contiguo-H-L}</b> .....	63
Seja $\tilde{L} := (\tilde{H} - f)\{\{x, r_0, r_2\} \rightarrow p\}\{\{y, s_0, s_2\} \rightarrow q\}$ uma imersão de $L$ obtida de $\tilde{H} - f$ pela contração dos caminhos $(x, r_0, r_2)$ e $(y, s_0, s_2)$ aos vértice $p$ e $q$ , respectivamente. Seja $F$ um subconjunto das arestas de $\partial_H(x) - xr_0$ . Então, as arestas de $F$ são contíguas em $\partial_H(x)$ ao redor de $x$ em $\tilde{H}$ se e somente se as arestas de $F$ são contíguas em $\partial_L(p)$ ao redor de $p$ em $\tilde{L}$ .	

**Lema 5.1.1** ..... 67

Seja  $G$  uma presilha simples Pfaffiana,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ . Então, o grafo simples subjacente de qualquer presilha de  $G - e$  não é isomorfo ao grafo de Heawood.

**Lema 6.1.1** ..... 75

**(Lema da Herança da Redutibilidade)** Seja  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ , e  $H$  uma presilha de  $G - e$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que  $G$ , e se (i) o grafo  $H$  tem no máximo um vértice de contração, ou se (ii) a aresta  $e$  é magra, então  $H$  é irreduzível.

**Lema 6.1.2** ..... 76

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  não contém vértices de contração de  $H$ , e se o Teorema Principal vale para presilhas menores do que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Corolário 6.1.3** ..... 76

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém precisamente um vértice de contração de  $H$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Lema 6.1.4** ..... 76

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém dois vértices de contração de  $H$ , a aresta  $e$  é magra, e o Teorema Principal vale para todo grafo com menos vértices que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Lema 6.1.5 {lem:heranca-redutibilidade-b}** ..... 76

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  não contém vértices de contração de  $H$ , e se o Teorema Principal vale para presilhas menores do que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Lema 6.1.6** ..... 77

A orientação  $D(G^*)$  é Pfaffiana.

**Lema 6.1.7 {lem:heranca-redutibilidade-a-unido}** ..... 82

Sejam  $G$  uma presilha Pfaffiana irreduzível,  $e = x_0y_0$  uma aresta de  $G$ , e  $C := \partial_G(X)$  um corte não trivial de  $G$ , com  $C - e$  justo em  $G - e$ , e  $x_0 \in X$ . Sejam  $H := (G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ , e  $\{U, W\}$  a bipartição de  $H$ . Seja  $Z \subseteq V(H)$ , tal que  $\overline{x} \in Z$ , e  $|Z \cap U| = 2 = |Z \cap W|$ . Seja  $H^*$  o grafo bipartido obtido de  $H$  pela adição de arestas com ambos os extremos em  $Z$ , de forma que  $H^*[Z]$  seja um quadrilátero. Suponha que  $H^*$  é Pfaffiano e  $H - Z$  tenha emparelhamento perfeito. Seja  $c$  o número de componentes conexas de  $H - Z$ . Então,  $c \leq 2$ , com igualdade somente se  $e$  não incide em vértice de  $Z$ .

**Corolário 6.1.8** ..... 82

Sejam  $G$  um spin,  $e$  uma aresta de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$ . Se  $Z$  contém precisamente um vértice de contração de  $H$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Proposição 6.1.9 {prp:lhr-a-unido}** ..... 83

O conjunto  $\overline{X}$  tem somente um vértice adjacente a vértices em  $V(J_1) \cup V(J_2)$ , e este vértice está em  $\overline{X}_+$ .

**Lema 6.1.10 {lem:heranca-redutibilidade-c}** ..... 86

Seja  $G$  um spin,  $e$  uma aresta magra de  $G$ ,  $H$  uma presilha de  $G - e$ , e  $Z$  uma quádrupla de vértices de  $H$  contendo dois vértices de contração de  $H$ . Se o Teorema Principal vale para todo grafo menor que  $G$ , então  $Z$  não reduz  $H$ .

**Definição 6.1.11** ..... 87

Sejam  $v_i \in Q_i$ , e  $v_{i+1} \in Q_{i+1}$ , onde os índices são tomados módulo quatro, e  $k$  um inteiro,  $1 \leq k \leq n$  tais que:

- $v_i$  é ligado por uma aresta  $e_i$  de  $G$  a um vértice  $w_i$  de  $J_k$ ;
- $v_{i+1}$  é ligado por uma aresta  $e_{i+1}$  de  $G$  a um vértice  $w_{i+1}$  de  $J_k$ .

Vide Figura 6.6. Se  $H_k$  tem um emparelhamento perfeito que contém  $e_i$ ,  $e_{i+1}$ , e a aresta  $q_{i+2}q_{i+3}$  de  $Q$ , então diz-se que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos. Representa-se por  $v_i \xrightarrow{k} v_{i+1}$ . Estendemos esta definição para o caso em que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são adjacentes em  $G$ . Nesse caso, dizemos que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos para todo  $k$ .

**Notação 6.1.12** ..... 87

Chamaremos de  $T$  o conjunto  $\bigcup Q_i$ .

**Definição 6.1.13** ..... 87

Seja  $G^*$  a presilha obtida de  $G$  pela adição das arestas em

$$\Delta := \{uw : \exists j, u \xrightarrow{j} w; u, w \in \bigcup Q_i\} - E(G).$$

**Definição 6.1.14** ..... 87

Dizemos que uma aresta  $f = v_iv_{i+1}$  de  $E(G^*)$  tem cor  $k$  se  $v_i \xrightarrow{k} v_{i+1}$ .

**Lema 6.1.15 {lem:vi-vi1-conexo}** ..... 88

Seja  $v_i \in Q_i$  um vértice adjacente a vértice de  $J_k$ . Então, existe um vértice  $v_{i+1} \in Q_{i+1}$ , adjacente a vértice de  $J_k$ , tal que  $v_i$  e  $v_{i+1}$  são  $H_k$ -conexos.

**Lema 6.1.16** {lem:Qi-adj-Ik} ..... 88

Para  $i = 0, 1, 2, 3$  e para  $k = 1, 2, \dots, n$ , o conjunto  $Q_i$  contém um vértice adjacente a vértice de  $J_k$ .

**Lema 6.1.17** {lem:Qi+-adj-Qi-1} ..... 88

Para  $i = 0, 1, 2, 3$ , todo vértice de  $Q_i^+$  é adjacente em  $G^*$  a algum vértice de  $Q_{i-1}$  e a algum vértice de  $Q_{i+1}$ .

**Lema 6.1.18** {lem:H-red-2v-red} ..... 89

Para  $i = 0, 1, 2, 3$ ,  $v$  um vértice de  $Q_i^+$ ,  $w$  um vértice de  $Q_{i+1}^+$  e para  $k = 1, 2, \dots, n$ , pelo menos um dentre  $v$  e  $w$  é adjacente a vértice de  $V(G) - T - V(J_k)$ .

**Lema 6.1.19** {lem:descarga1} ..... 89

**(Lema da Descarga)** Seja  $f$  uma aresta de  $\Delta$  de cor  $k$ . Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$  contendo  $f$ , tal que  $M \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ . Então,  $G^*$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$  tal que:

- $M' \cap \Delta = (M \cap \Delta) - f$ ;
- $M' \cap \partial(V(J_\ell)) = M \cap \partial(V(J_\ell))$ , para todo  $\ell$  distinto de  $k$ ;
- o sinal de  $M'$  é igual ao sinal de  $M$  em  $D(G^*)$ .

**Lema 6.1.20** {lem:carga} ..... 90

**(Lema da Carga)** Seja  $M$  um emparelhamento perfeito de  $G^*$  tal que  $|M \cap \partial(V(J_k))| = 2$ . Então,  $G^*$  tem um emparelhamento perfeito  $M'$  tal que:

- $M' \cap \partial(V(J_k)) = \emptyset$ ;
- $M' \cap \partial(V(J_j)) = M \cap \partial(V(J_j))$ , para todo  $j \neq k$ ;
- o sinal de  $M'$  é igual ao sinal de  $M$  em  $D(G^*)$ .

**Lema 6.1.21** {lem:H-red-x1y2-nao} ..... 91

Em  $G^*$  não existem duas arestas adjacentes que ligam vértice de  $Q_1$  a vértice de  $Q_2$ .

**Lema 6.1.22** {lem:H-red-cubo} ..... 93

O grafo  $G^*[T]$  é o cubo.

**Notação 6.1.23** ..... 93

Ajustamos a notação de forma que  $x_1y_1$  e  $x_2y_2$  sejam arestas de  $G^*$ .

**Notação 6.1.24** ..... 93

Denotamos por  $\Theta$  o grafo  $G^*[T - x_0 - y_0]$ , um hexágono com uma corda. Vide Figura 6.9.

<b>Lema 6.1.25 {lem:H-red-xiyi-cor-i}</b> .....	94
A aresta $x_1y_1$ tem uma cor $c_1$ e a aresta $x_2y_2$ tem uma cor $c_2$ tal que $c_1 \neq c_2$ .	
<b>Notação 6.1.26</b> .....	94
Ajustamos a notação de forma que $x_1y_1$ tenha cor 1 e $x_2y_2$ tenha cor 2.	
<b>Lema 6.1.27</b> .....	94
O grafo $G^*$ é Pfaffiano.	
<b>Lema 6.1.28 {lem:H-red-q0xiyiq3}</b> .....	96
Se $N_k \neq V(\Theta)$ então $N_k = \{q_0, x_1, y_1, q_3\}$ ou $N_k = \{q_0, x_2, y_2, q_3\}$ .	
<b>Corolário 6.1.29</b> .....	96
Existe uma componente conexa $J_k$ de $H - V(Q)$ tal que todo vértice de $\Theta$ é adjacente a vértice de $J_k$ .	
<b>Lema 6.1.30 {lem:H-red-L-reduvel}</b> .....	97
O grafo $L$ é uma presilha redutível Pfaffiana e não planar.	
<b>Lema 6.1.31 {lem:H-red-L-red-G-red}</b> .....	98
Todo conjunto que reduz $L$ reduz também $G$ .	
<b>Lema 7.1.1</b> .....	99
<b>(Lema da Não Planaridade das Contrações)</b> Seja $G$ uma presilha Pfaffiana, irreduzível. Seja $C := \partial_G(X)$ um corte (possivelmente trivial) de $G$ tal que $C - e$ é justo em $G - e$ . Se $G - e$ não é planar, e $ \overline{X}  \leq 5$ , então a contração $(G - e)\{\overline{X} \rightarrow \overline{x}\}$ não é planar.	
<b>Lema 7.1.2 {lem:H-x0-2-conexo}</b> .....	100
O grafo $H - x_0$ é 2-conexo.	
<b>Lema 7.1.3 {lem:par-FG}</b> .....	102
Se $H$ é planar, então a orientação de $F_G$ é par em $D(G)$ .	
<b>Lema 7.1.4 {lem:Mv-F-conforme}</b> .....	102
Suponha que $H$ seja planar. Então, $H(v)$ tem um emparelhamento bom $M$ . Além disso, se $F_G$ for um circuito, e se $f$ denotar a aresta de $M \cap C$ , então o extremo em $G$ de $f$ em $\overline{X}$ é o único vértice de $\overline{X}$ adjacente a $v$ em $G$ .	
<b>Lema 7.1.5 {lem:NH(y)&lt;=2}</b> .....	103
Se $H$ for planar, então $ (V(F)) \cap N_H(\overline{x})  \leq 2$ , com igualdade se e somente se $\overline{x}$ está em $V(F)$ .	
<b>Lema 7.1.6 {lem:adj-Xb-lem-lnpc}</b> .....	104
É possível ajustar a notação de forma que:	

- Se  $|\overline{X}| = 3$ , então  $\overline{X} = \{y_0, y_1, y_2\}$  e  $\{y_0y_1, y_0y_2\}$  é o conjunto de arestas de  $G[\overline{X}]$ ; além disso, tanto  $y_1$  quanto  $y_2$  tem pelo menos dois vizinhos em  $X$ .
- Se  $|\overline{X}| = 5$ , então  $\overline{X} = \{y_0, y_1, y_2, s_0, s_1\}$  e  $\{y_0y_1, y_0y_2, s_0y_1, s_0y_2, s_0s_1\}$  é o conjunto de arestas de  $G[\overline{X}]$ ; além disso, tanto  $y_1$  como  $y_2$  tem pelo menos um vizinho em  $X$ , e  $s_1$  tem pelo menos dois vizinhos em  $X$ .

**Lema 7.1.7** {lem:FG-unico} ..... 107

O vértice de  $F_G$  em  $\overline{X}$  é o único vértice de  $\overline{X}$  adjacente a mais de um vértice de  $X$ . Além disso, os demais vértices de  $\overline{X}_+$  não são adjacentes a vértices de  $X - v_1 - v_2$ .

**Lema 7.1.8** ..... 109

O corte  $C - e$  de  $G - e$  inclui um emparelhamento  $M$  de  $G - e$  com três arestas, que cobre  $v_1$  e contém a aresta  $s_1v_2$ .

**Lema 7.1.9** ..... 111

A presilha  $G^*$  é Pfaffiana.

**Lema 7.1.10** {lem:cruzamento-no-corte} ..... 111

O corte  $C - e - e_1 - e_2$  contém duas arestas  $f_1$  e  $f_2$ , tais que  $f_1$  e  $f_2$  não são adjacentes em  $G$ , a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_2, f_1)$  é planar em  $H^*$ , e a ordem cíclica  $(e_1, e_2, f_1, f_2)$  é planar em  $H'$ .