Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V
  https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Programação Linear

- Já vimos vários problemas de Otimização. Caminho mínimo, Click, Mochila, AGM,...
- Em todos eles procuramos uma solução que:
  1. satisfaça certas restrições
  2. é a melhor possível, em relação a algum critério bem-definido.

- **Programação Linear** descreve uma ampla classe de problemas em que:
  1. as variáveis podem assumir valores $\mathbb{R}$
  2. as restrições são funções lineares.
  3. o critério (a função objetivo) é uma função linear.
- Acontece que um enorme número de problemas pode ser expresso desse jeito.

Uma chocolateria faz 2 tipos de chocolates. O tradicional Pyramide, e uma versão gourmet Pyramide Nuit. Quanto de cada caixa produzir para maximizar os lucros?

- Cada caixa de Pyramide gera \$1 de lucro.
- Cada caixa de Nuit gera \$6 de lucro.

Sabemos que conseguimos vender

- no máximo 200 caixas de Pyramide.
- no máximo 300 caixas de Nuit.

Além disso, dada a força de trabalho atual

- podemos produzir no máximo 400 caixas de chocolate.

Vamos chamar de

- x_1 a quantidade de caixas de Pyramide, e
- x_2 a quantidade de Nuit a serem produzidas.

O que sabemos sobre cada uma dessas quantidades?

- no máximo 200 caixas de Pyramide

$$x_1 \leq 200$$

- no máximo 300 caixas de Nuit

$$x_2 \leq 300$$

- x_1 a quantidade de caixas de Pyramide, e
- x_2 a quantidade de Nuit a serem produzidas.

Limite de produção:

- podemos produzir no máximo 400 caixas de chocolate.

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

Além disso não é possível produzir quantidades negativas.

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

- x_1 a quantidade de caixas de Pyramide, e
- x_2 a quantidade de Nuit a serem produzidas.

Qual será o lucro total?

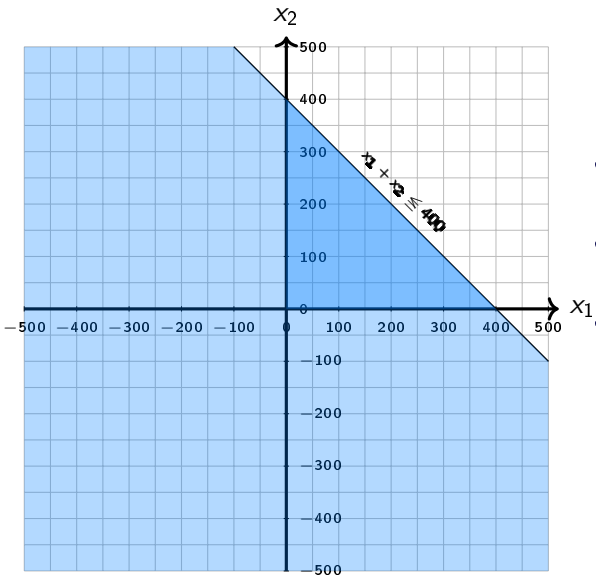
- Cada caixa de Pyramide gera \$1 de lucro.
- Cada caixa de Nuit gera \$6 de lucro.

$$x_1 + 6x_2$$

Podemos então escrever o seguinte **Programa Linear** que representa esse problema:

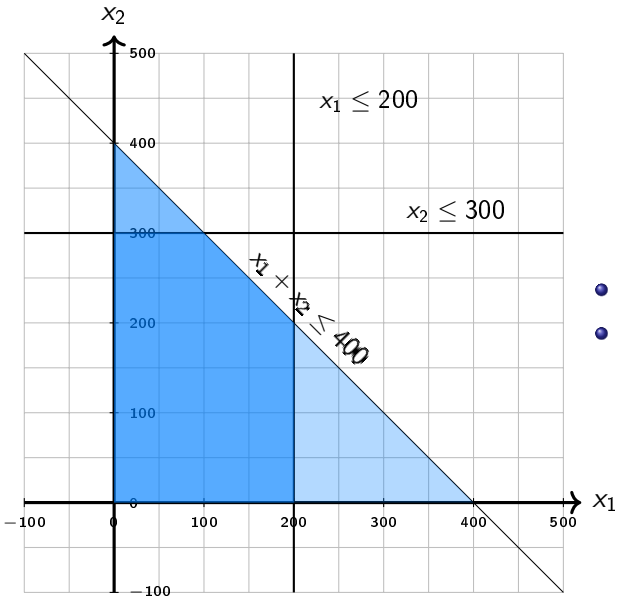
$$\begin{array}{rrl} \text{maximizar} & x_1 + 6x_2 & \\ \text{sujeito a} & x_1 & \leq 200 \\ & x_2 & \leq 300 \\ & x_1 + x_2 & \leq 400 \\ & x_1 & \geq 0 \\ & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Uma interpretação geométrica.

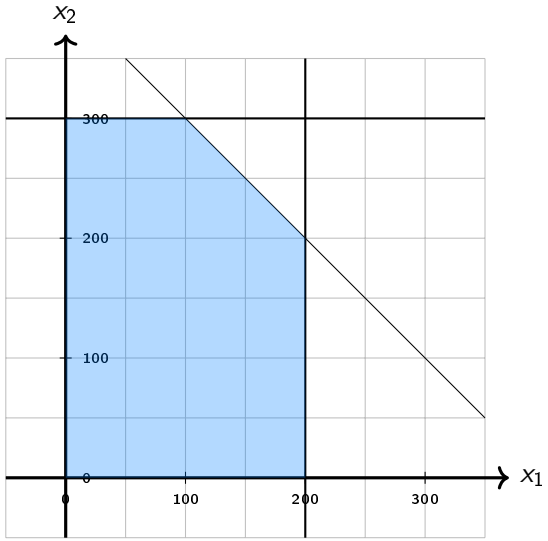


- o que significa $x_1 + x_2 = 400$
- o que significa $x_1 + x_2 \leq 400$
- o que significa

$x_1 \geq 0$ e
$x_2 \geq 0$



- $x_1 \leq 200$
- $x_2 \leq 300$



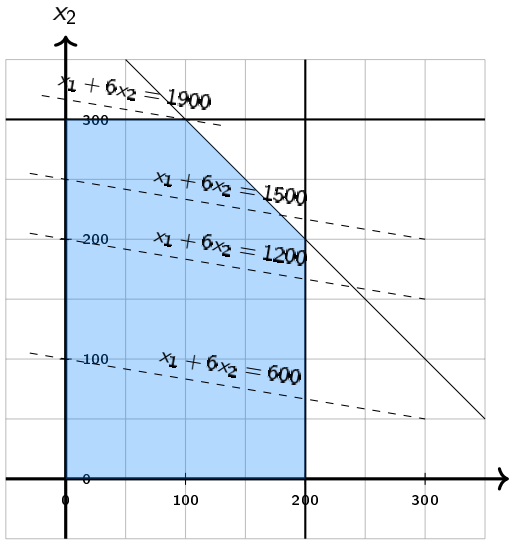
maximizar

$$x_1 + 6x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 200 \\ x_2 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 &\leq 400 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Onde será que está a solução ótima?



- Será que conseguimos uma solução de \$600? Ou seja,

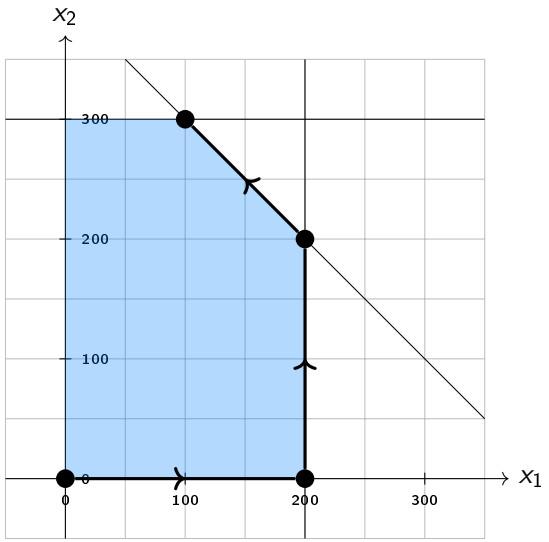
$$x_1 + 6x_2 = 600$$

- $x_1 + 6x_2 = 1200$
- $x_1 + 6x_2 = 1500$

- É uma regra geral de programas lineares que sempre existe pelo menos um vértice da região factível que tem uma solução ótima. Exceto quando o ótimo não existe que pode acontecer quando:
  - O programa é infactível.
  - A solução é ilimitadamente boa.

Resolvendo Programas Lineares

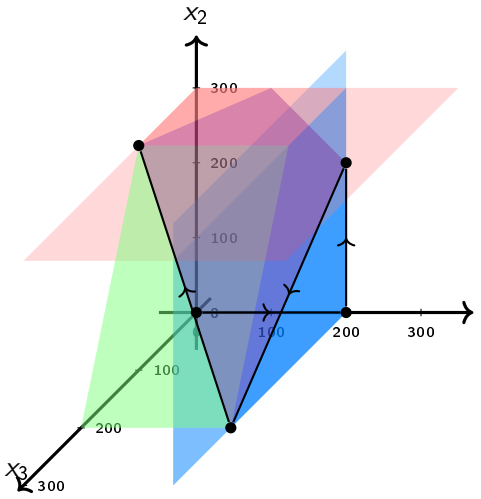
- Aproveitando-se do fato de uma solução ótima estar em um vértice. O algoritmo simplex encontra uma solução ótima com a seguinte estratégia:
  1. Comece de um vértice inicial qualquer da solução viável.
  2. Observe os vértices vizinhos.
  3. Se algum vértice for melhor, mova-se para esse vértice e repita.
  4. Senão, se nenhum vértice for melhor, já está na solução ótima.



Mais Produtos

- A chocolateria decide adicionar ao Pyramide e ao Pyramide Nuit, um novo produto ainda mais luxuoso o Pyramide **Luxe**.
- Cada caixa do Luxe dá um lucro de \$13.
- As antigas restrições ainda valem (e agora x_3 também conta no limite de 400 caixas)
- Além disso, Nuit e Luxe usam o mesmo tipo de embalagem, mas enquanto Nuit usa 1, Luxe usa 3. E a chocolateria tem apenas 600 dessas embalagens disponíveis.

$$
\begin{array}{rll}
\text{maximizar} & x_1 + 6x_2 + 13x_3 & \\
\text{sujeito a} & x_1 & \leq 200 \\
& x_2 & \leq 300 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & \leq 400 \\
& x_2 + 3x_3 & \leq 600 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$



- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
- $x_1 \leq 200$
- $x_2 \leq 300$
- $x_2 + 3x_3 \leq 600$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 400$
- ótimo:

$$0 + 6 \cdot 300 + 13 \cdot 100 = 3100$$

- A região factível de um PL é chamado de poliedro.
- Como podemos mostrar que de fato $(0, 300, 100)$ é uma solução ótima?
- Observe que a solução deve obedecer a desigualdade:

$$x_2 + 3x_3 \leq 600 \quad (x4)$$
$$4x_2 + 12x_3 \leq 2400$$

$$\begin{array}{rcrcrl} & & 4x_2 & + & 12x_3 & \leq 2400 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq 400 \\ & & x_2 & & & \leq 300 \\ \hline x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & \leq 3100 \end{array}$$

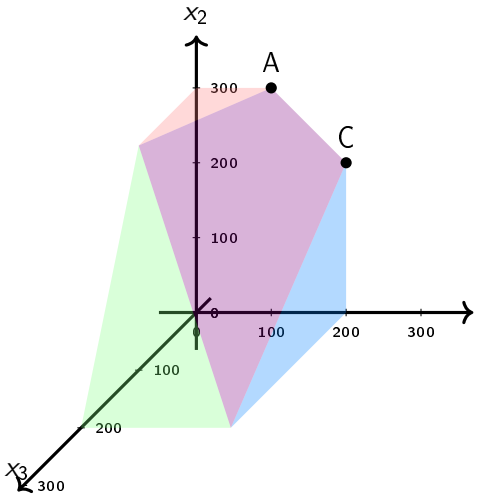
Mas $x_1 + 6x_2 + 13x_3$ é justamente a função objetivo. Então essa desigualdade que é respeitada por qualquer solução nos diz que nenhuma solução vai ter lucro maior que 3100, como já encontramos uma solução $(0, 300, 100)$ com lucro 3100 ela com certeza é ótima.

- É possível resolver um outro Programa Linear que irá encontrar esse valor.
- Esse outro PL está intimamente ligado ao PL original e se chama Dual.
- Podemos ter Programas Lineares com 4, 5 ou centenas de variáveis. Nesses casos já não é tão fácil desenhar o poliedro, mas o principio geral é o mesmo.

- George Dantzig (1914 - 2005) foi um cientista matemático norte-americano.
- Fez várias contribuições na engenharia, pesquisa operacional, computação e matemática. Ao chegar atrasado em uma aula, resolveu dois problemas estatísticos, até então em aberto, confundido-os com lição de casa.
- Inventou o algoritmo simplex para Programação Linear em 1947

- Vamos começar agora a ver o algoritmo simplex. Primeiramente daremos algumas intuições e definições.
- No espaço $\mathbb{R}^n$ cada equação linear define um **hiperplano**,
- e cada inequação define um **semi-espaço**,
- a região factível é dada pela intersecção dos semi-espaços,
- e forma um **poliedro convexo** (politopo se for limitado).

- Como o poliedro é convexo, um ótimo local também é um ótimo global.



max
$x_1 + 6x_2 + 13x_3$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 200 && (1)\\ x_2 &\leq 300 && (2)\\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 400 && (3)\\ x_2 + 3x_3 &\leq 600 && (4)\\ x_1 &\geq 0 && (5)\\ x_2 &\geq 0 && (6)\\ x_3 &\geq 0 && (7) \end{aligned}$$

- O vértice é um ponto único onde um subconjunto de hiperplanos se encontra.
- O ponto A é o único ponto no qual (2), (3) e (7) são satisfeitas com igualdade.
- Por outro lado os hiperplanos (4) e (6) não definem um vértice, porque sua interseção é uma linha inteira.

Selecione um subconjunto das inequações. Se existir um único ponto que satisfaça todas elas com igualdade, e este ponto for factível, então ele será um vértice.

- Se temos n variáveis, precisamos de pelo menos n equações lineares se queremos uma única solução.
- Mais do que n equações é redundante, e pelo menos uma delas pode ser reescrita como combinação linear das outras, e pode ser descartada.

Cada vértice é especificado por um conjunto de n inequações.

- Uma noção de vizinho segue naturalmente

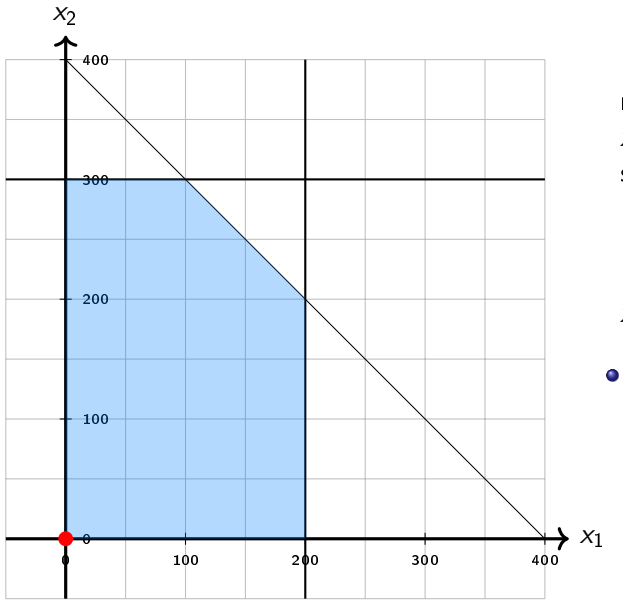
Dois vértices são vizinhos se eles têm em comum $n-1$ das inequações que os definem.

- Por exemplo, na nossa figura, A e C compartilham as inequações (3) e (7).

- O algoritmo simplex trabalha com um sistema de equações, dessa forma devemos transformar o nosso PL.

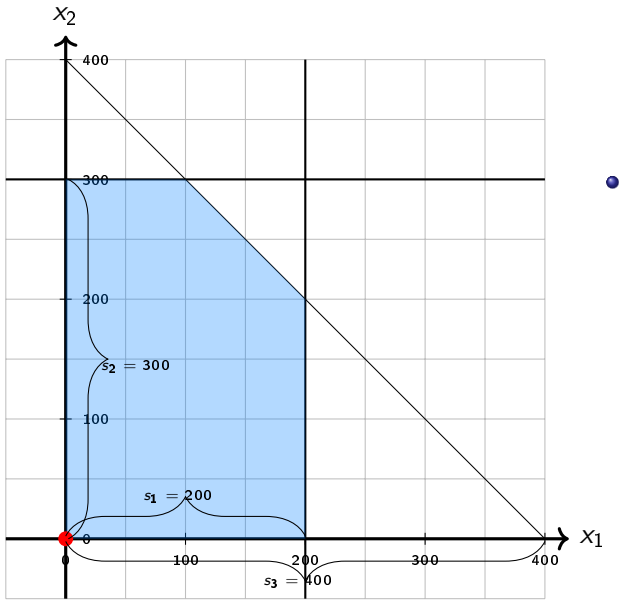
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 6x_2 & & \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + s_1 & \leq & 200 \\ & x_2 + s_2 & \leq & 300 \\ & x_1 + x_2 + s_3 & \leq & 400 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{aligned}$$

- Iremos dividir nossas variáveis em duas partes, vamos chamar de variáveis **na base** aquelas com algum valor e variáveis **fora da base** aquelas que são iguais a zero.
- Escrevemos as variáveis na base em função das variáveis fora da base.
- Vamos começar com as variáveis de folga na base e as variáveis x_1 e x_2 fora da base (ou seja, iguais a zero, e portanto estamos falando do vértice na origem).



maximizar
$x_1 + 6x_2$
sujeito a
$s_1 = 200 - x_1$
$s_2 = 300 - x_2$
$s_3 = 400 - x_1 - x_2$
$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

- agora olhe para a função objetivo, alguma tem coeficiente positivo? Isso significa que vale a pena aumentar aquela variável.



- intuitivamente o valor das variáveis de folga (com os devidos ajustes) significa a distância que estamos de cada uma das restrições

- como x_1 tem coeficiente positivo na função objetivo, vamos aumentar o valor dela (colocar ela na base), mas para isso precisamos tirar alguém da base.
- seja b_i o valor da constante da equação i, e seja a_{i1} o valor do coeficiente de x_1 na equação i. Vamos procurar o $\frac{b_i}{-a_{i1}}$ mínimo

maximizar
$x_1 + 6x_2$
sujeito a

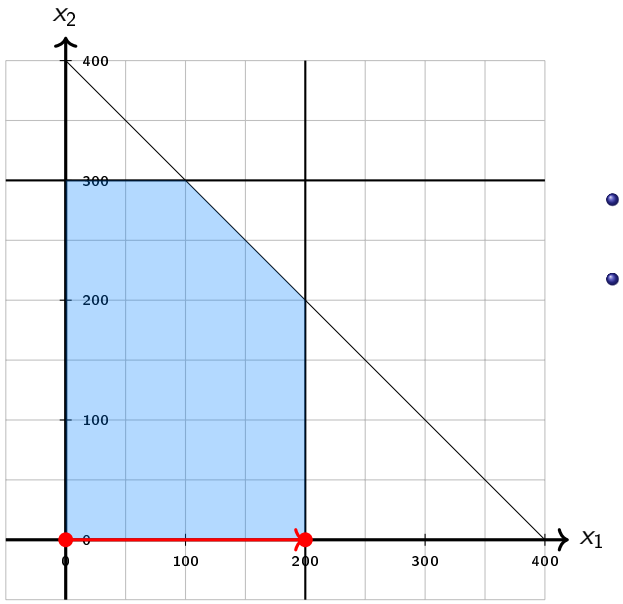
$s_1 = 200 - x_1$		$\frac{b_1}{-a_{11}} = \frac{200}{-(-1)} = 200$
$s_2 = 300 - x_2$		$\frac{b_2}{-a_{21}} = \frac{300}{0}$
$s_3 = 400 - x_1 - x_2$		$\frac{b_3}{-a_{31}} = \frac{400}{-(-1)} = 400$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$(200 - s_1) + 6x_2$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 \\ s_2 &= 300 - x_2 \\ s_3 &= 400 - (200 - s_1) - x_2 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



- x_1 era zero, foi para 200
- note que se escolhêssemos s_3 para sair da base, sairíamos da região viável.

maximizar
$200 - s_1 + 6x_2$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 & \frac{b_1}{-a_{12}} &= \frac{200}{0} \\ s_2 &= 300 - x_2 & \frac{b_2}{-a_{22}} &= \frac{300}{-(-1)} = 300 \\ s_3 &= 200 + s_1 - x_2 & \frac{b_3}{-a_{32}} &= \frac{200}{-(-1)} = 200 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$200 - s_1 + 6x_2$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 \\ s_2 &= 300 - x_2 \\ x_2 &= 200 + s_1 - s_3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$200 - s_1 + 6(200 + s_1 - s_3)$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 \\ s_2 &= 300 - (200 + s_1 - s_3) \\ x_2 &= 200 + s_1 - s_3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$200 - s_1 + 1200 + 6s_1 - 6s_3$
sujeito a

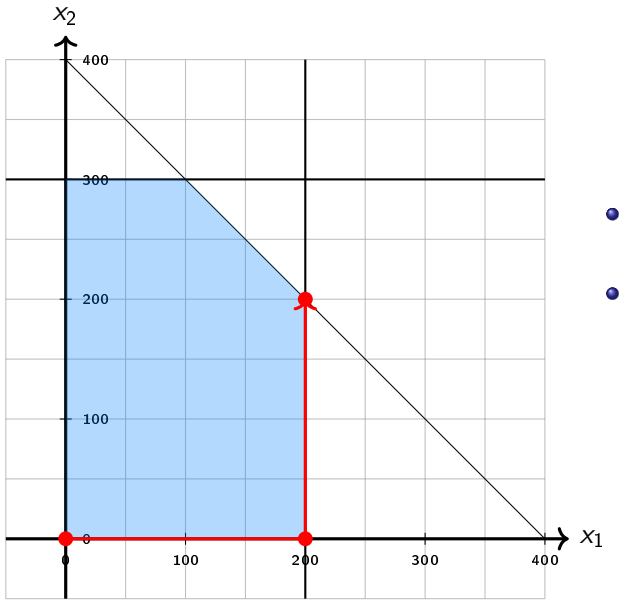
$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 \\ s_2 &= 300 - 200 - s_1 + s_3 \\ x_2 &= 200 + s_1 - s_3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$1400 + 5s_1 - 6s_3$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 &= 200 - s_1 \\ s_2 &= 100 - s_1 + s_3 \\ x_2 &= 200 + s_1 - s_3 \end{aligned}$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



- x_2 era zero, foi para 200
- note que tirar s_3 da base, significa zerar a distância até a restrição 3.

maximizar
$1400 + 5s_1 - 6s_3$ coef. de s_1 é positivo
sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 200 - s_1 && \frac{200}{-(-1)} = 200 \\
s_2 &= 100 - s_1 + s_3 && \frac{100}{-(-1)} = 100 \\
x_2 &= 200 + s_1 - s_3 && \frac{200}{-1} = -200
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$
precisamos escolher o menor coeficiente positivo

maximizar
$1400 + 5s_1 - 6s_3$
sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 200 - s_1 \\
s_1 &= 100 - s_2 + s_3 \\
x_2 &= 200 + s_1 - s_3
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$1400 + 5(100 - s_2 + s_3) - 6s_3$
sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 200 - (100 - s_2 + s_3) \\
s_1 &= 100 - s_2 + s_3 \\
x_2 &= 200 + (100 - s_2 + s_3) - s_3
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$1400 + 500 - 5s_2 + 5s_3 - 6s_3$
sujeito a

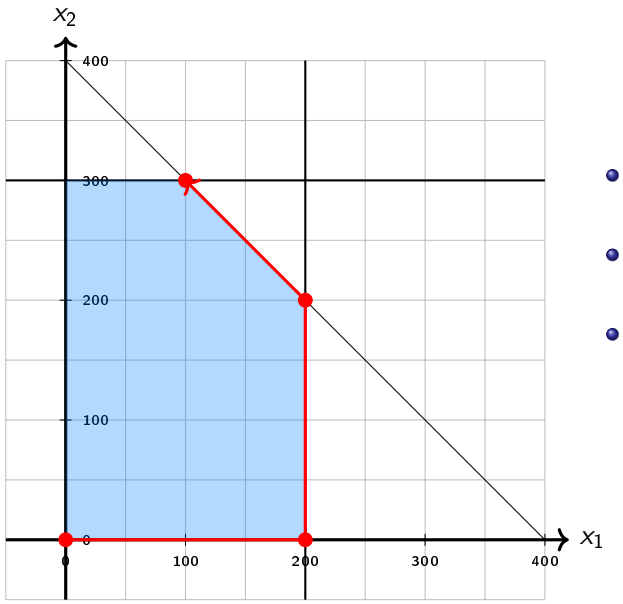
$$
\begin{aligned}
x_1 &= 200 - 100 + s_2 - s_3 \\
s_1 &= 100 - s_2 + s_3 \\
x_2 &= 200 + 100 - s_2 + s_3 - s_3
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

maximizar
$1900 - 5s_2 - s_3$
sujeito a

$$x_1 = 100 + s_2 - s_3$$
$$s_1 = 100 - s_2 + s_3$$
$$x_2 = 300 - s_2$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$



- x_1 era 200, foi para 100
- x_2 era 200, foi para 300
- note que tirar s_2 da base, significa zerar a distância até a restrição 2.

como nenhum coef. é positivo não vale a pena aumentar
maximizar
$1900 - 5s_2 - s_3$
sujeito a

$$x_1 = 100 + s_2 - s_3$$
$$s_1 = 100 - s_2 + s_3$$
$$x_2 = 300 - s_2$$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

Bibliotecas

- Felizmente existem várias bibliotecas que implementam o simplex (e várias formas de resolução) para resolver PLs (e outras modelagens matemáticas)
- Talvez as mais conhecidas sejam:
  - IBM CPLEX Optimization Studio (comercial)
  - Gurobi Solver (comercial)
  - Google OR-Tools (open source)
  - GLPK (open source)

OR-Tools

- É uma ferramenta de código aberto para otimização combinatória.
- Em geral, o objetivo é encontrar a melhor solução para um problema em um conjunto muito grande de soluções possíveis.

- Exemplos de problemas que podem ser resolvidos com o OR-Tools:
  - Roteamento de Veículos: Encontrar as melhores rotas para uma frota de veículos que coletam e entregam pacotes dadas algumas restrições ("um caminhão não pode carregar mais do que 23 toneladas", "todas as entregas devem ser feitas dentro de uma janela de 8 horas", etc)
  - Escalonamento: Encontrar o escalonamento (agendamento) ótimo para um conjunto complexo de tarefas, sujeito a algumas restrições ("algumas atividades precisam ser executadas antes de outras atividades", "algumas atividades podem compartilhar um mesmo recurso", etc)
  - *Bin packing*: Empacotar vários objetos pequenos em recipientes, minimizando o número de recipientes necessários.

OR-Tools

OR-Tools inclui resolvedores:

- Programação por Restrições.
- Programação Linear.
- Programação Linear Inteira Mista.
- Roteamento de Veículos.
- Algoritmos em Grafos (caminho mais curto, fluxo de custo mínimo, fluxo máximo, etc)

OR-Tools

OR-Tools é escrito em **C++**, mas também pode ser usado com Python, Java ou C#.

- Link para instalação: `https://developers.google.com/optimization/install/cpp`
- Meu sistema é o Linux Mint 19.3 Tricia, então baixei a versão do OR-Tools para Ubuntu 18.04
- Link para vários exemplos: `https://developers.google.com/optimization/examples`

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 3x + y, \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 2, \\ & 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 3x + y, \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 2, \\ & 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

```
#include "ortools/linear_solver/linear_solver.h"
using namespace operations_research;
int main() {
  // Criar o Resolvedor, que usa o GLOP
  MPSolver solver("simple_lp_program",
                  MPSolver::GLOP_LINEAR_PROGRAMMING);

  // Criar as variaveis x e y, ja dizendo o tipo,
  // os limitantes, e um nome
  MPVariable* const x = solver.MakeNumVar(0.0, 1, "x");
  MPVariable* const y = solver.MakeNumVar(0.0, 2, "y");
```


$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 3x + y, \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 2, \\ & 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

```
// Criar a restricao, 0 <= x + y <= 2.
MPConstraint* const ct = solver.MakeRowConstraint(0.0,
2.0, "ct");
ct->SetCoefficient(x, 1);
ct->SetCoefficient(y, 1);
// Criar a funcao objetivo, 3 * x + y.
MPObjective* const objective = solver.MutableObjective();
objective->SetCoefficient(x, 3);
objective->SetCoefficient(y, 1);
objective->SetMaximization();
```


$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 3x + y, \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 2, \\ & 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 \leq y \leq 2. \end{aligned}$$

```
  // Resolver!
  solver.Solve();

  std::cout << "Solution:" << std::endl;
  std::cout << "Objective value = " << objective->Value()
                                    << std::endl;
  std::cout << "x = " << x->solution_value() << std::endl;
  std::cout << "y = " << y->solution_value() << std::endl;
  return EXIT_SUCCESS;
}
```

```
hokama@fanatico:~$ cd /opt/or-tools_Ubuntu-18.04-64bit_v7.6.7691/
hokama@fanatico:/opt/or-tools_Ubuntu-18.04-64bit_v7.6.7691$ make run SOURCE=/home/hokama/cic111/teste.cc
g++ -fPIC -std=c++11 -O4 -DNDEBUG -Iinclude -I. -DARCH_K8 -Wno-deprecated -DUSE_CBC -DUSE_CLP -DUSE_BOP -DUSE_GL
OP \
 objs/teste..o \
 -Llib -Llib64 -lprotobuf -lglog -lgflags -lCbcSolver -lCbc -lOsiCbc -lCgl -lClpSolver -lClp -lOsiClp -lOsi -lCo
inUtils -lortools -Wl,-rpath,"\$ORIGIN" -Wl,-rpath,"\$ORIGIN/../lib64" -Wl,-rpath,"\$ORIGIN/../lib" -lz -lrt -lp
thread \
 -o bin/teste
bin/teste
Solution:
Objective value = 4
x = 1
y = 1
hokama@fanatico:/opt/or-tools_Ubuntu-18.04-64bit_v7.6.7691$
```


Exercício: Modelar o seguinte problema:

Problema do fluxo máximo

Dado um grado direcionado $D = (V, A)$ em que cada arco $(u, v) \in A$ tem uma capacidade $c_{(u,v)}$, um vértice fonte $s \in V$ e um vértice sorvedouro $t \in V$.
Desejamos encontrar um fluxo máximo de s até t, sendo que em todos os vértices exceto s e t a quantidade de fluxo que entra deve ser igual a quantidade de fluxo que sai, e as capacidades dos arcos são respeitadas.