Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden
- Desmistificando Algoritmos, Thomas H. Cormen.
- Algoritmos, Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou e Umesh Vazirani
- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

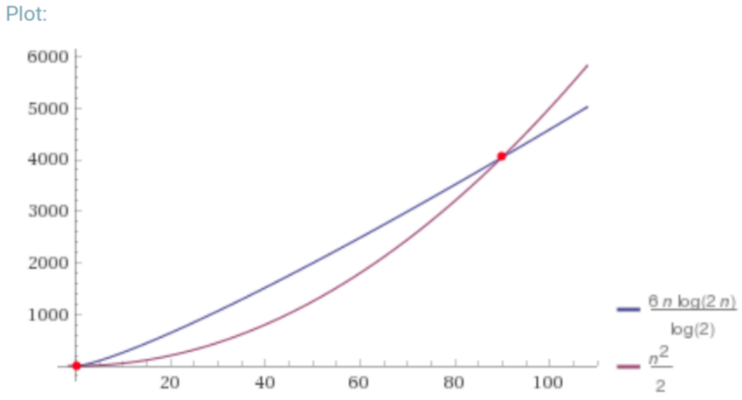
Princípios da Análise de Algoritmos

- O que fizemos no caso do MergeSort foi uma análise de Pior Caso, ou seja, qualquer que seja a entrada sabemos que o algoritmo executaram em tempo $\leq 6n \log_2 n + 6n$.
- Esse limite também é aplicado se um adversário tentasse atribuir números de forma a deixar o algoritmo lento.
- Essa análise é particularmente interessante por não precisar entender a aplicação do problema, padrões de entrada e ela é usualmente mais útil e mais fácil que as alternativas:
  - Análise de Caso Médio (Exige assumir alguma distribuição da entrada, ter conhecimento do domínio, mais difícil de ser feita)
  - Desempenho em *Benchmarks*
  - Análise de Melhor Caso (inútil na maior parte do tempo)

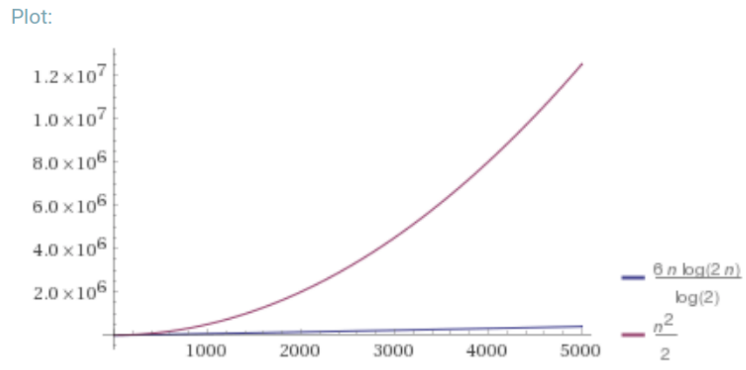
Princípios da Análise de Algoritmos

- Iremos fazer uma Análise **Assintótica** dos algoritmos, o que significa que estamos interessados no comportamento deles para instâncias **grandes**.
- Isso nos permite dizer que um algoritmo é mais rápido que outro assumindo que o tamanho n da instância é suficientemente grande.
- Por exemplo, podemos dizer com segurança que um algoritmo que executa em $6n \log_2 n + 6n$ é mais rápido que um que executa em $\frac{1}{2}n^2$
- Note que isso pode não ser verdade para n pequeno, mas a partir de algum $n = n_0$ sempre será verdade.
- De fato, para n pequeno, tanto faz o algoritmo que você use. Estamos interessados em resolver problemas grandes!

Princípios da Análise de Algoritmos



Princípios da Análise de Algoritmos



Princípios da Análise de Algoritmos

- Você poderia imaginar que com o avanço dos hardwares, bastaria eu usar um computador melhor.
- Na verdade quanto maior o poder computacional, MAIOR é a disparidade entre algoritmos eficientes.
- Podemos pensar no tamanho do problema que podemos resolver com computadores mais potentes usando diferentes algoritmos.
- Suponha que você tem dois algoritmos para um problema.

Algoritmo A	Algoritmo B
n	n^2

- Suponha que você fez um grande investimento e comprou um computador 4 vezes mais potente. Com o algoritmo A você pode resolver um problema 4 vezes maior, enquanto com o algoritmo B você só pode resolver um problema 2 vezes maior.

Análise Assintótica

- É a linguagem que os cientistas da computação (sérios) usam para discutir o desempenho em alto nível de algoritmos.
- É fundamental para o vocabulário do cientista da computação. Quando alguém diz "O MergeSort executa em $\Theta(n \log n)$, e o InsertionSort executa em $o(n^2)$" o que exatamente ele está dizendo?
- A análise assintótica é uma ferramenta adequada pois:
  - É simples o bastante para suprimir detalhes de arquitetura/linguagem/compilador.
  - Mas é complexa o bastante para permitir a comparação entre diferentes algoritmos, especialmente em instâncias grandes.

Análise Assintótica

Ideia geral

Suprimir fatores constantes e termos de ordens inferiores.

- Por exemplo em:

$$6n \log_2 n + 6n$$

  6n é um termo de ordem inferior, 6 é constante então resultaria em:

$$n \log n$$

  Exercício: A base do log também não importa. Por que?
- Então quando dizemos que o tempo de execução do MergeSort é $O(n \log n)$, ou de maneira geral quando dizemos que um algoritmo é $O(f(n))$. Estamos dizendo que depois de eliminar os termos de ordem inferior e constantes acabamos apenas com $f(n)$.

Análise assintótica de funções quadráticas - termos de menor ordem

Considere a função quadrática $3n^2 + 10n + 50$:

n	$3n^2 + 10n + 50$	$3n^2$
64	12978	12288
128	50482	49152
512	791602	786432
1024	3156018	3145728
2048	12603442	12582912
4096	50372658	50331648
8192	201408562	201326592
16384	805470258	805306368
32768	3221553202	3221225472

- Como se vê, $3n^2$ é o termo dominante quando n é grande.
- De um modo geral, podemos nos concentrar nos termos dominantes e esquecer os demais.

Exemplos

Exemplo de um laço

Algoritmo 1: Procura

Entrada: Um vetor A de tamanho n e um inteiro t

Saída: Verdadeiro se A contêm t, Falso caso contrário

```
1 para k de 1 até n faça
2     se A[k] == t então
3         devolva Verdadeiro;
4 devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

- O tempo de execução do exemplo depende por exemplo se t está ou não em A, e se t estiver na primeira posição? Estamos interessados no pior caso!
- Quantas operações estamos fazendo nas linhas 1 e 2? Uma, duas, três? Isso é constante e é suprimido pela notação O.

Exemplos

Exemplo de dois laços consecutivos

Algoritmo 2: Procura2

Entrada: Dois vetores A e B de tamanho n e um inteiro t

Saída: Verdadeiro se A ou B contêm t, Falso caso contrário

```
para k de 1 até n faça
    se A[k] == t então devolva Verdadeiro;
para k de 1 até n faça
    se B[k] == t então devolva Verdadeiro;
devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

a. $O(1)$
b. $O(\log n)$
c. $O(n)$
d. $O(n^2)$

- Evidentemente, nesse problema a entrada é na verdade de tamanho $2n$, então o algoritmo não seria $O(2n)$? Essa constante é suprimida na notação O.

Exemplos

Exemplo de dois laços aninhados

Algoritmo 3: ProcuraComum

Entrada: Dois vetores A e B de tamanho n

Saída: Verdadeiro se A ou B têm um numero em comum, Falso caso contrário

```
para j de 1 até n faça
    para k de 1 até n faça
        se A[j] == B[k] então devolva Verdadeiro;
devolva Falso;
```

Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a) $O(1)$
- b) $O(\log n)$
- c) $O(n)$
- d) $O(n^2)$

- Pior caso ✓. Constantes ✓.
- Nesse caso se o tamanho dos vetores dobrar, o tempo de execução quadruplica!

Exemplo de dois laços aninhados

Algoritmo 4: ProcuraComum

Entrada: Um vetor A de tamanho n

Saída: Verdadeiro se A tem números duplicados, Falso caso contrário

```
para j de 1 até n faça
    para k de j + 1 até n faça
        se A[j] == A[k] então devolva Verdadeiro;
devolva Falso;
```

- Dessa vez, obviamente, procuramos no vetor A ao invés de B.
- Ao invés de olhar todas combinações de j e k, olhamos apenas aquelas em que $k \geq j + 1$.
- Isso é válido pois comparar, por exemplo, o primeiro com o terceiro elemento é a mesma coisa que comparar o terceiro com o primeiro. Então diminuímos nossas comparações pela metade!

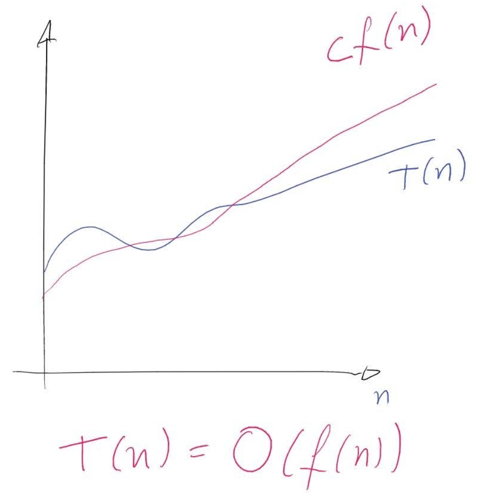
Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- a) $O(1)$
- b) $O(\log n)$
- c) $O(n)$
- d) $O(n^2)$

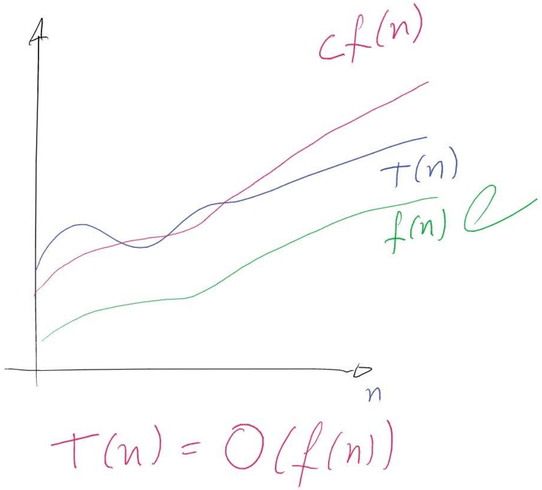
Exercício: É possível fazer esse algoritmo mais eficiente? Como?

Notação O

- Big Oh, Ózão, O grande.
- Notação O é utilizada em funções definidas nos inteiros positivos.
- Seja $T(n)$ uma função sobre $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $T(n) : \mathbb{Z}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$
- Pergunta: Quando podemos dizer que $T(n) = O(f(n))$?
- Resposta: Se eventualmente, para um n suficientemente grande, $T(n)$ é limitado superiormente por uma alguma constante vezes $f(n)$.



- $T(n) = O(f(n))$ se quanto multiplicado por alguma constante c tal que $c \cdot f(n)$ está sempre acima de $T(n)$



- É válido mesmo se $f(n)$ ou $c' \cdot f(n)$ esteja sempre abaixo de $T(n)$, o importante é existir uma constante que a deixe sempre acima.

Formalizando o O

Definição

$T(n) = O(f(n))$ se e somente se exitem constantes c, $n_0 > 0$ tais que
$$T(n) \le c.f(n)$$
para todo $n \ge n_0$.

- Então para provar que $T(n) = O(f(n))$ você precisa exibir c e n_o que provem que $T(n) \le c.f(n)$ para todo $n \ge n_0$.
- Dizer que c e n_0 são constantes, significa que não dependem de n. (Tudo bem se c depender de n_0 e vice versa).
- (muito) Formalmente $O(f(n))$ é um conjunto de funções que podem ser limitadas por $f(n)$, então o correto seria dizer que $T(n) \in O(f(n))$. Mas dizer que $T(n) = O(f(n))$ é um abuso de notação comumente aceito e que facilita a manipulação dessas funções.

Exemplo

Teorema

Se $T(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ então $T(n) = O(n^k)$

- Para provar precisamos exigir constantes c e $n_0 > 0$ tais que $T(n) \le c.f(n)$ para todo $n \ge n_0$.
- Vamos então escolher $n_0 = 1$ e $c = |a_k| + |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \\
&\le |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \ldots + |a_1| n + |a_0| \\
&\le |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \ldots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \text{ (vál. para } n > n_0) \\
&= (|a_k| + |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) n^k \\
&= cn^k \\
&\text{portanto, } T(n) \le cn^k \text{ logo, } T(n) = O(n^k) \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema

Para todo $k \ge 1$, n^k não é $O(n^{k-1})$.

- Podemos provar por contradição, ou seja, assumimos que a premissa é verdadeira porém a conclusão é falsa e chegamos a algum absurdo.
- Supomos que existe um $k \ge 1$ e constantes c, $n_0 > 0$ tal que $n^k = O(n^{k-1})$, ou seja,

$$\begin{aligned}
n^k &\le cn^{k-1} && \forall n \ge n_0 \\
nn^{k-1} &\le cn^{k-1} && \forall n \ge n_0 \\
n\cancel{n^{k-1}} &\le c\cancel{n^{k-1}} && \forall n \ge n_0 \\
n &\le c && \forall n \ge n_0
\end{aligned}$$

Como n pode ser todos os naturais maiores do que n_0, não pode existir tal constante c que seja maior do que qualquer natural. Portanto chegamos a um absurdo e provamos que todo $k \ge 1$, n^k não é $O(n^{k-1})$. $\square$