Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Teoria dos Conjuntos (Revisão)

- Um **conjunto** é um conceito primitivo, que informalmente pode ser entendido como uma coleção **não ordenada** de entidades distintas, chamadas de **elementos** do conjunto.
- Dizemos que um elemento x **pertence** a um conjunto A se x é um elemento de A. Denotamos este fato por
$$x \in A.$$

- Para denotar que x **não pertence** a A, ou seja, que x não é um elemento do conjunto A, escrevemos
$$x \notin A.$$
- A notação $x, y, z \in A$ é muito usada como uma abreviação de $x \in A$ e $y \in A$ e $z \in A$

- Se x pertence a um conjunto A, diz-se também que A **tem** (ou **possui**) x, e escreve-se

$$A \ni x.$$

- A negação desta afirmação (A **não tem** ou **não possui** x) é denotada por

$$A \not\ni x.$$

- Não é correto dizer que A "contém" x, pois este termo é usado em matemática com um sentido diferente.

- Podemos especificar um conjunto de diversas formas. Se um conjunto tem poucos elementos, podemos listá-los, um a um, em qualquer ordem, entre chaves '{}'.
- Por exemplo, o conjunto cujos elementos são os números inteiros 2, 3 e 5 pode ser escrito $\{2, 3, 5\}$.
- Assim, por exemplo, temos que

$$3 \in \{2, 3, 5\},$$

mas

$$4 \notin \{2, 3, 5\}.$$

- Outra maneira de especificar um conjunto é através das propriedades de seus elementos.
- Para tanto, usamos a notação $\{\, x : P(x) \,\}$, onde x é uma variável arbitrária e $P(x)$ uma afirmação matemática que depende do valor de x.
- Por exemplo, outra maneira de definir o conjunto $\{-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$ é

$$\{\, x : x \text{ é um número inteiro e } -5 < x < 5 \,\}$$

- Comumente também é usado o simbolo '|' em vez de ':' para significar "tais que".

Existem alguns conjuntos de números que são muito usados em matemática, e tem notações convencionais bem estabelecidas:

- o conjunto dos **números inteiros** $\mathbb{Z}$,
- o conjunto dos **números naturais** $\mathbb{N} = \{\, x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x \geq 0 \,\}$,
- Obs: Alguns autores entendem que o conjunto dos números naturais não inclui o zero. Em várias línguas não falamos "tenho zero bois". Em latim nem sequer existia uma palavra para esse número, que não pode ser escrito em algarismos romanos.

- o conjunto dos **números racionais** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$, e
- o conjunto dos **números reais** $\mathbb{R}$.
- o conjunto dos **números complexos** $\mathbb{C} = \{ x + y\mathbf{i} : x, y \in \mathbb{R} \}$, em que $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$.

Exercício

Escreva explicitamente os elementos dos seguintes conjuntos:

1. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 - 2x + 1 \leq 0 \right\}$.
2. $A = \{ x : x \in \mathbb{Z},\ 2 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo} \}$.
3. $A = \left\{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 - 2x = 0 \right\}$.

Definições circulares e contraditórias

- A definição de um conjunto pode usar outros conjuntos

  “seja X o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto Y mas não no conjunto Z”.

- Porém, deve-se tomar cuidado para evitar definições circulares, que podem não ter sentido.

  “seja X o conjunto de todos os elementos que não pertencem a X”

- Esta “definição” não faz sentido pois diz que um elemento que está em X não está em X, e vice-versa.

- Suponha que o barbeiro de um quartel recebeu a ordem de fazer a barba de todos os que não fizessem sua própria barba, e apenas esses.
- O que o barbeiro faz com a sua barba?
- Este contra-exemplo teve um papel muito importante no desenvolvimento da teoria de conjuntos.
- Ele é conhecido pelo nome **Paradoxo de Russel**, por ter sido observado pelo matemático inglês Bertrand Russel (1872–1970).
- Ele é conhecido também como **Paradoxo do Barbeiro**

- Por outro lado, há definições circulares de conjuntos que são perfeitamente válidas.
- Por exemplo, considere o conjunto de inteiros X que possui o inteiro 1, não possui o inteiro 0, possui $x + 2$ e $x - 2$ qualquer que seja o elemento x de X.
- Pode-se verificar que o único conjunto X com estas propriedades é o conjunto dos inteiros ímpares.
- Para entender porque esta definição é válida vamos precisar do conceito de indução matemática, que será visto posteriormente.

Igualdade de conjuntos

- Por definição, um conjunto A **é igual a** um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é elemento de B, e todo elemento de B é elemento de A.
- Esta condição, denotada por

  $$A = B,$$

  significa que A, B são o mesmo conjunto.

- Dito de outra forma, dois conjuntos A e B são diferentes ($A \neq B$) se, e somente se, existe um elemento de A que não pertence a B, ou um elemento de B que não pertence a A.
- Observe que, como os conjuntos não são ordenados, o conjunto $\{1, 2, 3\}$ é igual ao conjunto $\{3, 2, 1\}$.

Conjunto vazio

- É possível definir conjuntos sem elementos.
- Dizemos que tal conjunto é **vazio**.
- Por exemplo, considere o conjunto $A = \{ x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x = x + 1 \}$.
- Todos os conjuntos vazios são iguais; ou seja existe um único conjunto vazio, que é geralmente denotado por
$$\emptyset.$$

Relação de inclusão

- Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que A é um **subconjunto** de B se, e somente se, todo elemento de A é um elemento de B.
- Neste caso, dizemos também que A **está contido em** B, denotado por
$$A \subseteq B,$$
- ou que B **contém** A. Denotamos esta condição por
$$B \supseteq A.$$

- Se existe um elemento de A que não pertence a B, então A não é subconjunto de B, e escrevemos
$$A \nsubseteq B.$$
- De acordo com esta definição, um conjunto está contido em si próprio? e contém o conjunto vazio? sim:
$$A \subseteq A \text{ e } \emptyset \subseteq A,$$
para qualquer conjunto A.

- Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, dizemos que A é um sub-conjunto **próprio** de B, que denotamos por $A \subset B$ ou $B \supset A$.
- Analogamente, $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto próprio de B.

Cardinalidade

- Informalmente, dizemos que um conjunto A é **finito** se ele tem um número finito $n \in \mathbb{N}$ de elementos.
- Este número é a **cardinalidade** de A, denotada por $|A|$ ou $\# A$.
- Observe que $|A| = 0$ se e somente se $A = \emptyset$.
- Dizemos que um conjunto é **infinito** se ele não é finito.

- Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ são infinitos.
- Conjuntos infinitos não podem ter seus elementos listados explicitamente.
- Informalmente, é comum usar '. . . ' nesses casos, por exemplo
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$

  Entretanto, esta notação deve ser evitada pois pode ser ambígua. Por exemplo, o que é o conjunto $\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$?

Operações com conjuntos

União e interseção

Para os próximos conceitos sejam A e B dois conjuntos.

- A **união** de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, A ou B.

  Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- A **intersecção** de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B.

  Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ então $A \cap B = \{2, 3\}$.
- Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que os conjuntos A e B são **disjuntos**, ou **não tem intersecção**, ou **não se intersectam**.
- Diz também que três ou mais conjuntos são **disjuntos dois a dois** se todos os pares desses conjuntos são disjuntos.

Operações com conjuntos

Diferença, universo, e complemento

- A **diferença de** A **e** B é o conjunto de todos os elementos de A que não estão em B. Este conjunto é também chamado A **menos** B, ou o **complemento de** B **em** A, e é denotado por

$$A - B \text{ ou } A \setminus B.$$

- Em certos casos, é conveniente supor que todos os elementos de todos os conjuntos que nos interessam pertencem a um **conjunto universal** ou **universo**, que denotaremos por $\mathcal{U}$. Se A é o conjunto universo $\mathcal{U}$, então $\mathcal{U} - B$ é chamado o **complemento** de B e denotado por $\overline{B}$ ou B^c.
- Observe que se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$, $A \cap B = A$ e $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Operações com conjuntos

Diferença, universo, e complemento

Exercício: Dê exemplos em que:

- $(A \cup B) - B = A$
- $(A \cup B) - B \neq A$

Exercício: Sejam A e B dois conjuntos finitos quaisquer. Encontre uma fórmula matemática que relaciona $|A|$, $|B|$, $|A \cap B|$ e $|A \cup B|$.

Operações com conjuntos

Diferença simétrica

Outra operação entre conjuntos é a **diferença simétrica**, denotada por $A \oplus B$ ou $A \triangle B$, que consiste de todos os elementos que estão em **exatamente** em um dos dois conjuntos. Isto é,

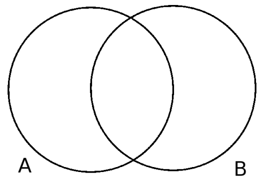
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{1}$$

Exercício: Se $A \triangle B = A$ o que se pode dizer dos conjuntos A e B?

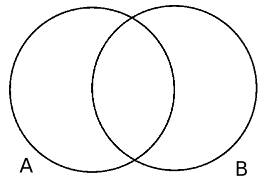
Operações com conjuntos

Diagrama de Venn

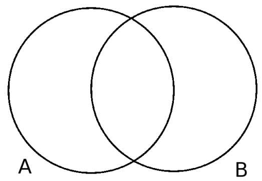
Esta representação gráfica para conjuntos é chamada de **diagrama de Venn**, por ter sido introduzida pelo matemático inglês John Venn (1834–1923).



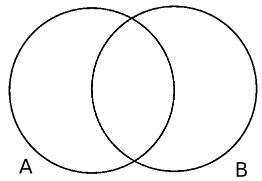
A



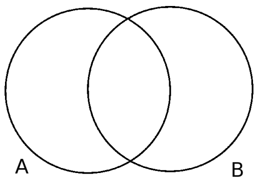
B



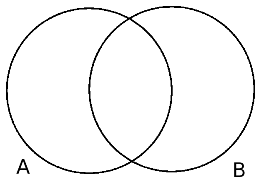
$A \cup B$



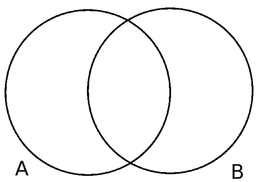
$A \cap B$



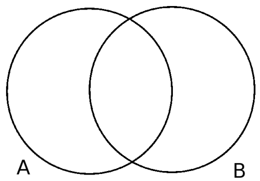
$A \setminus B$



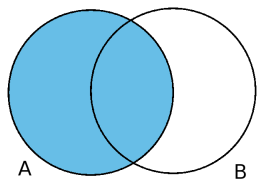
$B \setminus A$



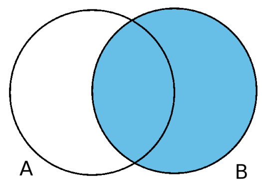
$A \triangle B$



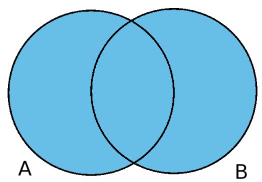
$\overline{A}$



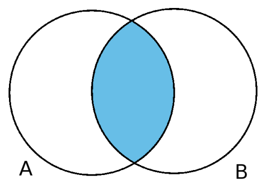
A



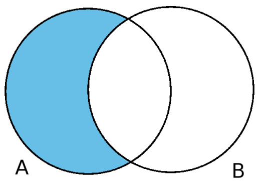
B



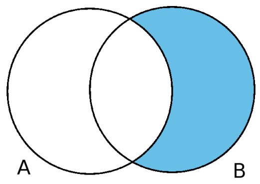
$A \cup B$



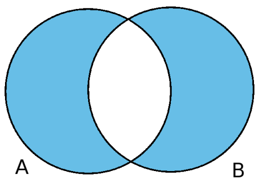
$A \cap B$



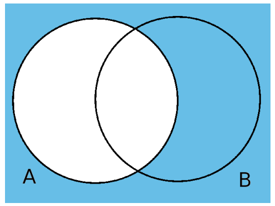
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \triangle B$



$\overline{A}$

Operações com conjuntos

Propriedades das operações com conjuntos

- **Comutatividade**:
  - $A \cup B = B \cup A$.
  - $A \cap B = B \cap A$.
- **Associatividade**:
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- **Distributividade**:
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Operações com conjuntos

Propriedades das operações com conjuntos

- **Idempotência**:
  - $A \cup A = A$.
  - $A \cap A = A$.
- **Leis de De Morgan**:
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

  Estas leis levam o nome do matemático inglês Augustus de Morgan (1806–1871), mas eram conhecidas desde a Antiguidade.

- **Propriedades do complemento**:
  - $\overline{\overline{A}} = A$.
  - $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$.
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
  - $\overline{\mathcal{U}} = \emptyset$.
  - $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$.

Operações com conjuntos

Propriedades das operações com conjuntos

- **Propriedades do conjunto universal**:
  - $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
  - $A \cap \mathcal{U} = A$.
- **Propriedades do conjunto vazio**:
  - $A \cup \emptyset = A$.
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Exercício: Usando diagramas de Venn, verifique que a diferença simétrica também é uma operação associativa e comutativa; isto é, que $A \vartriangle B = B \vartriangle A$ e $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$, para quaisquer conjuntos A, B e C.

Exercício: Use diagramas de Venn para verificar as seguintes identidades:

1. $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
4. $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$.

Exercício: Sejam A, B e C três conjuntos finitos quaiquer. Encontre uma fórmula matemática para $|A \cup B \cup C|$ em função de $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$ e $|A \cap B \cap C|$.

Conjuntos de conjuntos

- Conjuntos podem ser elementos de outros conjuntos.
- Por exemplo, o conjunto

$$A = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,4,7\}\}$$

  é um conjunto com quatro elementos.
- Se B é o conjunto $\{2,3\}$, temos que B é elemento de A ($B \in A$), mas B não é sub-conjunto de A ($B \not\subseteq A$).

$$A = \{\emptyset, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,4,7\}\}$$

- Note que $\emptyset$ é elemento de A e também subconjunto de A, enquanto que $\{2\}$ não é nem uma coisa nem outra.
- Em particular, o conjunto $C = \{\emptyset\}$ **não** é vazio, pois ele tem um elemento — o conjunto vazio. Observe que $|C| = 1$, enquanto que $|\emptyset| = 0$.

Conjunto potência

- O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado de **conjunto potência** de A, e denotado por $\mathbb{P}(A)$.

  Exemplo: Se $A = \{1,2,3\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
- Observe que se $A = \emptyset$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset\}$, e se $A = \{\emptyset\}$ então $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Conjunto potência

- Se A é um conjunto finito, quanto é $\left|\mathbb{P}(A)\right|$?
- Se A é um conjunto finito, então $\left|\mathbb{P}(A)\right| = 2^{|A|}$. Por esta razão, muitos autores denotam o conjunto potência de A por 2^A.

Partição

- Seja A um conjunto, e P um conjunto cujos elementos são sub-conjuntos de A (isto é, $P \subseteq \mathbb{P}(A)$).
- Dizemos que P é uma **partição** de A se os elementos de P são não vazios, disjuntos dois a dois, e a união de todos os elementos de P é A.
- Nesse caso, cada elemento de P é também chamado de uma **parte** ou **bloco** da partição.

Exemplo: Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, o conjunto $P = \{\{1, 2, 5, 6, 7\}, \{3\}, \{4, 8, 10\}, \{9\}\}$ é uma partição de A.

Exercício: Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros?

a) $\{P, I\}$ onde P é o conjunto dos pares e I é o conjunto dos ímpares.
b) $\{\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-\}$ onde $\mathbb{Z}^+$ é o conjunto dos inteiros positivos, e $\mathbb{Z}^-$ é o conjunto dos inteiros negativos.
c) $\{R_0, R_1, R_2\}$ onde, para $i = \{0, 1, 2\}$, R_i é o conjunto dos inteiros que tem resto i na divisão por 3.
d) $\{A, B, C\}$ onde A é o conjunto dos inteiros menores que -100, B é o conjunto dos inteiros com valor absoluto menor ou igual a 100, e C é o conjunto dos inteiros maiores que 100.

Exercício: Quais dos conjuntos abaixo são partições do conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros?

e) $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros cujo quadrado termina com o algarismo k. (Por exemplo, $P_6 = \{4, -4, 6, -6, 14, \ldots\}$.)
f) $\{\{0\}\} \cup \{\, P_k : k \in \mathbb{N} \,\}$, onde P_k é o conjunto de todos os inteiros cujo valor absoluto está entre 2^k (inclusive) e 2^{k+1} (exclusive).

Produto cartesiano

- Indicamos por (a, b) um **par ordenado** de elementos, no qual a é o **primeiro elemento** e b é o **segundo elemento**.

- Um par ordenado não deve ser confundido com um conjunto de dois elementos, pois a ordem é importante (por exemplo, o par $(10, 20)$ é diferente do par $(20, 10)$) e os dois elementos podem ser iguais (como por exemplo no par $(10, 10)$).
- Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais (são o mesmo par) se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Produto cartesiano

Produto cartesiano de dois conjuntos

- Sejam A e B dois conjuntos. O **produto cartesiano**, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) com $a \in A$ e $b \in B$.
- Como os pares são ordenados, temos que $A \times B \neq B \times A$ (exceto quando $A = B$ ou $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$).

Exercício: Quanto elementos tem o conjunto $A \times B$ se o conjunto A tem m elementos, e o conjunto B tem n?

Produto cartesiano

Produto cartesiano de vários conjuntos

- Definimos uma **ênupla ordenada**, ou simplesmente **ênupla**, como sendo uma sequência finita de m elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.
- Observe que, como em um par ordenado, a ordem dos elementos é importante, e pode haver repetições. Assim, por exemplo, as $(10, 20, 20)$, $(10, 10, 20)$ e $(20, 10, 20)$ são três ênuplas diferentes.

- Uma ênupla com dois elementos pode ser considerada um par ordenado, e é geralmente chamada por esse nome.
- Para $m \geq 3$ usam-se os nomes **tripla**, **quádrupla**, **quíntupla**, **sêxtupla**, **séptupla**, **óctupla**, etc..
- Não há um nome especial consagrado quando $m = 1$.
- Na escrita usam-se também as notações 2-upla, 3-upla, etc., e m-upla quando m é genérico.

Produto cartesiano

Produto cartesiano de vários conjuntos

- Em particular, uma 1-upla é uma sequência (a_1) com apenas um elemento. Note que a 1-upla (10) não é a mesma coisa que o inteiro 10.
- Há uma única 0-upla, a **ênupla vazia**, denotada por $()$.
- O **produto cartesiano** de m conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$, é o conjunto das m-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, com $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

- Se todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são o mesmo conjunto A, o produto é denotado por A^m. Por exemplo, se $A = \{10, 20, 30\}$,

$$A^3 = \{(10, 10, 10), (10, 10, 20), (10, 10, 30), (10, 20, 10), \ldots,$$

  e A^1 é o conjunto das 1-uplas $\{(10), (20), (30)\}$.
- Para qualquer conjunto A, A^0 é o conjunto $\{()\}$ que só tem a ênupla vazia.

Produto cartesiano

Produto cartesiano de conjunto consigo mesmo

- Se todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são o mesmo conjunto, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ é denotado por A^m.
- Por exemplo, se $A = \{10, 20, 30\}$ temos

$$A^3 = \{(10, 10, 10), (10, 10, 20), (10, 10, 30), (10, 20, 10), \ldots, (3$$

$$A^2 = \{(10, 10), (10, 20), (10, 30), (20, 10), \ldots, (30, 30)\}$$

$$A^1 = \{(10), (20), (30)\}$$

$$A^0 = \{()\}$$

Intervalos

- Em matemática, um **intervalo real** ou simplesmente **intervalo** geralmente significa o conjunto de todos os números reais em $\mathbb{R}$ compreendidos entre dois valores específicos. Há quatro variações principais deste conceito:
- $(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x < b\}$ (intervalo aberto),
- $[a, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado),

- $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x \leq b\}$ (intervalo fechado à direita),
- $[a, b) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x < b\}$ (intervalo fechado à esquerda),
- a e b são números reais, chamados extremos, limites ou pontas do intervalo.
- Intervalos com as formas acima são ditos **limitados**. O termo finito também é usado, embora esses conjuntos em geral tenham infinitos elementos.

Intervalos

- Também é comum usarmos intervalos **semi-infinitos** que são limitados em apenas um lado.
- $(-\infty, a) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x < a\}$,
- $(-\infty, a] = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq a\}$,
- $(a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x\}$,
- $[a, +\infty) = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x\}$.

Intervalos

Exercício: Explique o significado das notações $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ e $(a, b]$ quando $a = b$ e quando $a > b$.

Exercício: Descreva os conjuntos abaixo:

1. $(-\infty, 2) \cap [-1, 3]$
2. $\overline{(0, 5]}$

Caixas

- O produto cartesiano $[10, 20] \times [2, 4]$ é um retângulo no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.
- O produto cartesiano $[10, 20] \times [2, 4] \times [60, 70]$ é um paralelepípedo no espaço cartesiano $\mathbb{R}^3$.