# Matemática Discreta

Pedro Hokama



## Fontes


- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.




# Lógica matemática



## Lógica Proposicional

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que ou é verdadeira ou é falsa. Exemplos:

1. **O morcego é um mamífero**.
2. **Rio de Janeiro é a capital do Brasil**.
3. **Há 36 macacos no zoológico de Londres**.
4. **A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã**.
5. **O trilionésimo algarismo decimal de $\pi$ é 7**.

Não é necessário que saibamos se a sentença é verdadeira ou falsa.

1. Este fato pode depender de informações que não temos no momento: **Há 36 macacos no zoológico de Londres**.
2. de eventos que ainda não aconteceram: **A taxa de juros do Banco Central vai subir amanhã**.
3. ou de cálculos que não temos recursos para realizar: **O trilionésimo algarismo decimal de $\pi$ é 7**.



Não são proposições:

1. frases interrogativas, como "**O que é isto?**",
2. frases imperativas, como "**Leia com cuidado**",
3. certas sentenças auto referentes, como "**Esta frase é falsa**".



Uma sentença declarativa que **depende de variáveis** pode ser considerada uma proposição em um contexto onde as variáveis **tem valor determinado**.

- "*x* **é menor que 3**" isoladamente não é uma proposição.
- se *x* for definido, ela se torna uma proposição.

Dizemos que o **valor lógico** ou **valor-verdade** de uma proposição é **verdadeiro** se ela for verdadeira, e **falso** caso contrário.



## Conectivos lógicos e proposições compostas

Todas as línguas naturais possuem **conectivos lógicos**, como "e", "ou", "não", "se ... então", que permitem combinar proposições simples para formar proposições mais complexas. Por exemplo,

- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **e** [**Montevidéu é a capital da Argentina**].
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **ou** [**Montevidéu é a capital da Argentina**].

- **Se** [**a taxa de juros cair amanhã**], **então** [**a inflação vai aumentar neste mês**].
- **Não** [**haverá sessão da meia-noite hoje neste cinema**].



- Uma proposição que não pode ser decomposta em proposições menores ligadas por conectivos lógicos é dita uma **proposição simples** ou **atômica**.
- O valor lógico (**verdadeiro** ou **falso**) de uma proposição deste tipo depende do valor lógico das proposições simples que a compõem, e da maneira como elas são combinadas pelos conectivos.



- se sabemos que a proposição “**Brasília é a capital do Brasil**” é verdadeira,
- e “**Montevidéu é a capital da Argentina**” é falsa,
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **e** [**Montevidéu é a capital da Argentina**]. É falsa.
- [**Brasília é a capital do Brasil,**] **ou** [**Montevidéu é a capital da Argentina**]. É verdadeira.



# Notação para cálculo proposicional

**Lógica proposicional**, ou **cálculo proposicional**: Permite determinar o valor lógico de proposições compostas, se soubermos os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Para **eliminar as ambiguidades** das linguagens naturais iremos usar uma **notação algébrica**.

Proposições serão representadas por letras minúsculas ($p, q, r, ...$).

Podem ter dois valores:

**V** representando verdadeiro e **F** representando falso.



Os conectivos lógicos serão representados por sinais algébricos especiais (**operadores**) aplicados a essas variáveis. Os mais importantes são:

- **conjunção**: $p \wedge q$, significando "$p$ e $q$".
- **disjunção**: $p \vee q$, significando "$p$ ou $q$".
- **negação**: $\neg p$, significando "não $p$".
- **implicação**: $p \rightarrow q$, significando "se $p$, então $q$".
- **equivalência**: $p \leftrightarrow q$, significando "$p$ se, e somente se, $q$".



# Operador de conjunção

Se $p$, $q$ são duas proposições, então "$p$ e $q$", denotado por $p \wedge q$ também é uma proposição, chamada **conjunção** de $p$ e $q$. $p \wedge q$ é verdadeiro se $p$ e $q$ forem verdadeiros.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **F** |



# Operador de conjunção

A frase "José compra tijolos e vende casas" é uma conjunção de duas proposições atômicas, "(José compra tijolos) $\wedge$ (José vende casas)."

A palavra “e” em português tem vários sentidos diferentes.

“Maria gosta de arroz e feijão”

Não significa “(Maria gosta de arroz) e (Maria gosta de feijão)”

Mas sim “Maria gosta de arroz misturado com feijão” (uma proposição atômica).



# Operador de disjunção

Se $p$, $q$ são duas proposições, então “$p$ ou $q$” também é uma proposição, chamada de **disjunção** de $p$ e $q$.

$$p \lor q$$

É Verdadeiro se pelo menos uma das duas proposições for verdadeira. Se ambas forem falsa $p \lor q$ é falso.



# Operador de disjunção

| $p$ | $q$ | $p \lor q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |



# Operador de disjunção

A frase “O cliente tem celular ou laptop” é uma disjunção de duas proposições atômicas, “(O cliente tem celular) $\lor$ (O cliente tem laptop)”.

Este conectivo é também chamado de “ou inclusivo”.

# Operador de negação

A partir de uma proposição $p$, podemos formar uma nova proposição com o valor lógico oposto ao de $p$.

Essa nova proposição é chamada a **negação** de $p$ e denotada por $\neg p$.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| **V** | **F** |
| **F** | **V** |

A frase "A casa é de qualquer cor menos branca." é uma negação, "¬(A casa é branca)."



# Exercício

Uma proposição composta é **viável** ou **possível** se existe uma atribuição de valores verdades para as variáveis da proposição que a torna verdadeira. Verifique quais das proposições abaixo são viáveis.

a) $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$.



# Exercício

b) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$.

c) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$.



# Operador de implicação

Sejam $p, q$ duas proposições. A proposição "se $p$ então $q$", que denotaremos por $p \rightarrow q$, é chamada de **implicação** ou **condicional**.

O valor lógico de $p \rightarrow q$ é falso apenas se $p$ for verdadeiro e $q$ for falso. Nos demais casos, o valor de $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

# Operador de implicação

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **V** |



# Operador de implicação

Em lógica, este conectivo não pressupõe uma relação causal entre $p$ e $q$.

Por exemplo a sentença:

"se 2 é par então Brasília é a capital do Brasil" é verdadeira apesar de não haver nenhuma relação conhecida entre os dois fatos.

Uma outra notação usada para este operador é $p \Rightarrow q$.



# Operador de implicação

A frase "se José foi para casa, ele perdeu a reunião" contém uma implicação: "(José foi para casa) $\to$ (José perdeu a reunião)."



# Operador de implicação

Muitos teoremas em matemática estão na forma de implicações:

Se determinada afirmação $p$ (a **hipótese**, **premissa**, ou **antecedente**) é verdadeira, então outra afirmação $q$ (a **tese**, **conclusão** ou **consequência**) também é verdadeira.

# Operador de implicação

Em português, a implicação pode ser expressa de muitas outras formas:

- se $p$ então $q$.
- quando $p$, temos $q$.
- caso $p$, vale $q$.
- $q$ segue de $p$.
- $p$ implica $q$.
- $q$ se $p$.
- $q$ sempre que $p$.



# Operador de implicação

Em matemática, as seguintes expressões também são muito usadas para indicar a implicação $p \rightarrow q$:

- $p$ é condição suficiente para $q$.
- $p$ somente se $q$.
- Uma condição suficiente para $q$ é $p$.
- $p$ é uma condição mais forte que $q$.



# Operador de implicação - Reciproca

Dizemos que a implicação

$$q \rightarrow p$$

é a **recíproca** de

$$p \rightarrow q.$$

Observe que que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua reciproca $q \rightarrow p$ é falsa.



# Operador de implicação - Inversa

A proposição $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$ é chamada de **inversa** de $p \rightarrow q$. Observe que há casos em que $p \rightarrow q$ é verdadeira, mas sua inversa é falsa; e vice-versa

# Operador de implicação - Contrapositiva

Dizemos também que proposição

$$(\neg q) \to (\neg p)$$

é a **contrapositiva** de

$$p \to q.$$

A contrapositiva tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição $p \to q$, quaisquer que sejam os valores lógicos de $p$ e de $q$.



Em vista deste resultado, a implicação $p \to q$ é frequentemente enunciada na forma contrapositiva:

- se não $q$, então não $p$.
- se $q$ não vale, então $p$ não vale.
- quando $q$ é falsa, $p$ também é falsa.
- não $q$ implica não $p$.
- não $p$ se não $q$.
- $p$ é falsa sempre que $q$ é falsa.
- $q$ é mais fraco que $p$.
- $q$ é condição necessária para $p$.
- Uma condição necessária para $p$ é $q$.



# Exercício

Encontre:

a) A contrapositiva de $\neg p \to q$.
b) A recíproca de $\neg q \to p$.
c) A inversa da recíproca de $q \to \neg p$.
d) A negação de $p \to \neg q$.
e) A recíproca de $\neg p \to q$.



# Operador de equivalência

Se $p$, $q$ são duas proposições, a proposição "$p$ se, e somente se, $q$" é chamada de **equivalência** ou **bicondicional** de $p$ e $q$.

$$p \leftrightarrow q$$

O valor lógico de $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro quando $p$ e $q$ tem o mesmo valor lógico, e falso caso contrário.

## Operador de equivalência

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** |



## Operador de equivalência

A frase "a encomenda será enviada se, e somente se, o cheque tiver fundo" afirma uma equivalência lógica: "[a encomenda será enviada] $\leftrightarrow$ [o cheque tem fundo]."

Outros símbolos usados para este operador são $p \Leftrightarrow q$, $p \equiv q$, e $p = q$.



O conectivo lógico "se e somente se" também é muito usado em matemática, e pode ser expresso de várias outras maneiras; como, por exemplo:

- $p$ é condição necessária e suficiente para $q$.
- as condições $p$ e $q$ são equivalentes.
- se $p$ então $q$, e se $q$ então $p$.
- $p$ implica $q$, e vice-versa.

Alguns autores usam a abreviação "$p$ sse $q$" (com dois "s") para significar "$p$ se e somente se $q$". (em inglês iff)



## Operador de disjunção exclusiva

Se $p$, $q$ são duas proposições, denotamos por $p \oplus q$ a proposição "ou $p$ ou $q$, mas não ambos." Este conectivo é chamado de **disjunção exclusiva** de $p$ e $q$.

O valor lógico de $p \oplus q$ é verdadeiro se $p$ e $q$ tem valores lógicos opostos, ou seja, exatamente um deles é verdadeiro.

# Operador de disjunção exclusiva

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** |
| **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** |



# Operador de disjunção exclusiva

É importante observar que, em português, o conectivo “ou” pode significar tanto a disjunção inclusiva ($\vee$) quanto a disjunção exclusiva ($\oplus$).

“o original foi enviado pelo correio, ou pelo malote,”

“a bateria está descarregada ou o tanque está vazio”



# Precedência dos operadores lógicos

Qual o valor lógico de:

$$p \vee q \wedge r$$

Podemos sempre usar parênteses para indicar a ordem correta, por exemplo $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.



# Precedência dos operadores lógicos

| *Operador* | *Precedência* |
|---|---|
| $\neg$ | 1 |
| $\wedge$ | 2 |
| $\vee, \oplus$ | 3 |
| $\rightarrow, \leftrightarrow$ | 4 |

# Precedência dos operadores lógicos

## Associatividade

Em matemática, diz-se que uma operação $\star$ é **associativa** se $(x \star y) \star z$ é igual a $x \star (y \star z)$, quaisquer que sejam $x$, $y$, e $z$.

Nesse caso, podemos omitir os parênteses dessas duas fórmulas, e escrever simplesmente $x \star y \star z$.

A soma e a multiplicação de números reais, por exemplo, são operações associativas; enquanto que a subtração não é.



# Precedência dos operadores lógicos

Dentre os conectivos lógicos que vimos até agora, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$ e $\leftrightarrow$ são associativos. Portanto, podemos escrever $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$, ou $p \oplus q \oplus r$, ou $p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$, sem risco de ambiguidade.

Por outro lado, a fórmula $p \rightarrow q \rightarrow r$ é ambígua, pois $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ não é equivalente a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.



# Precedência dos operadores lógicos

Normalmente avaliamos operadores de mesma precedência da esquerda para a direita. Porém é aconselhável sempre usar parênteses.

Note que esta convenção também é usada em álgebra: a fórmula $x - y - z$ deve ser entendida como $(x - y) - z$, e não como $x - (y - z)$. A mesma regra poderia ser usada para interpretar $p \oplus q \vee r$.