Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Lógica de Predicados

Proposição aberta

Uma **proposição aberta** é uma proposição que depende de uma ou mais variáveis, por exemplo

- "$x + 1$ é maior que x".
- "o quadrado de x é 16".
- "x é um número primo".
- "x é maior que y".
- "$x + y = 2x + z$"

Proposição aberta

- Em geral, o valor lógico de uma proposição aberta depende dos valores das variáveis que nela ocorrem.

Por exemplo:

- "x é maior que y" é verdadeira se os valores de x e y forem 7 e 4,
- é falsa se os valores forem 10 e 21.

Proposição aberta

Para certos valores, a frase pode até mesmo não fazer sentido: por exemplo, "x é maior que y" não faz sentido se x e y forem números complexos, ou se x for uma matriz e y for um número real.
Sempre que substituímos as variáveis de uma proposição aberta por valores aceitáveis obtemos uma **proposição fechada** que não depende de nenhuma variável — e que portanto pode ser tratada como uma proposição atômica do cálculo proposicional.

Proposição aberta

- Usaremos letras minúsculas x, y, z para denotar variáveis.
- Usaremos letras maiúsculas P, Q, R, $\ldots$, seguidas por uma lista de variáveis distintas entre parênteses, para denotar proposições abertas que dependem dessas variáveis.
- Por exemplo, a notação $P(x)$ pode representar a frase "x é um número primo", e $Q(x, y)$ pode representar "y é maior que x".

Predicados

- Os símbolos P, Q, R, $\ldots$ são chamados de **predicados**
- Podem ser entendidos como funções que, dados valores das variáveis, assumem um valor lógico (**F** ou **V**).
- Como na álgebra, depois de definido um predicado $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, usaremos a notação $P(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ para indicar a substituição da variável x_1 pelo valor v_1, x_2 pelo valor v_2, etc..

Predicados

- $Q(x, y)$ foi definido como a proposição aberta "y é maior que x".
- $Q(3, z + 1)$ representa a afirmação "$z + 1$ é maior que 3"
- Supõe-se, também, que todas as ocorrências da mesma variável na proposição são substituídas pelo mesmo valor.

Quantificação universal

Outra maneira de transformar uma proposição aberta em uma fechada é usando a chamada **quantificação universal**.

Afirmações do tipo "para todo x no conjunto D, $P(x)$".

"para todo x no conjunto D, $P(x)$"
Denotaremos esta frase por $(\forall x \in D)P(x)$.
Nesta frase, D (o **domínio** da quantificação) pode ser qualquer conjunto previamente definido, x pode ser qualquer variável, e $P(x)$ qualquer proposição que depende dessa variável, que tenha valor lógico bem definido sempre que x for substituído por um elemento de D.

Por definição, a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é verdadeira se, e somente se, a proposição $P(x)$ for sempre verdadeira quando substituímos variável x por qualquer elemento do conjunto D.

Se houver um (ou mais de um) elemento de D que torna $P(x)$ falsa quando atribuído à variável x, então a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é falsa.

Por exemplo, se $P(x)$ representa a frase
"$x + 1$ é maior que x",
então a frase
"$(\forall x \in \mathbb{Z})\, P(x)$"
é verdadeira, pois, se substituirmos x por qualquer número inteiro, a afirmação $P(x)$ será sempre verdadeira.

Por outro lado, se $P(x)$ representa a frase
"x é um número primo",
então a frase "$(\forall x \in \mathbb{N})\, P(x)$" é falsa; pois, embora as afirmações $P(3)$ e $P(13)$ sejam verdadeiras, a afirmação $P(6)$ (por exemplo) é falsa.

Em geral, se o domínio D é um conjunto finito, com elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, então a frase $(\forall x \in D)\, P(x)$ é equivalente a $P(v_1) \wedge P(v_2) \wedge \cdots \wedge P(v_n)$.

Quantificação existencial

Outra maneira de transformar uma proposição aberta em fechada é através da **quantificação existencial**, que tem a forma "existe um x no conjunto D tal que $P(x)$".
Denotaremos esta frase por $(\exists x \in D)\, P(x)$.
Aqui também, o domínio D da quantificação pode ser qualquer conjunto já definido; x pode ser qualquer variável; e $P(x)$ qualquer proposição que depende dessa variável.

Por definição, a frase "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é verdadeira se, e somente se, existir pelo menos um elemento de D que, atribuído à variável x, torna a afirmação $P(x)$ verdadeira. A frase "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é falsa se, e somente se, não existe nenhum elemento de D com essa propriedade.

Quantificação existencial

Se D é um conjunto finito com elementos $v_1, v_2, \cdots, v_n$, então a frase $(\exists x \in D)\, P(x)$ é equivalente a $P(v_1) \vee P(v_2) \vee \cdots \vee P(v_n)$.

Exemplo:
Denotemos por $P(x)$ o predicado "x é um número primo".

A proposição $(\exists x \in \mathbb{N})\, P(x)$ é verdadeira, pois, por exemplo, a afirmação $P(7)$ ("7 é um número primo") é verdadeira, e 7 é um elemento de $\mathbb{N}$.

Se $Q(y)$ é a proposição aberta

"y é igual a $y + 1$",

então a frase "$(\exists y \in \mathbb{R})\, Q(y)$" é falsa; pois, qualquer número real que for atribuído a y, a afirmação $Q(y)$ ("y é igual a $y + 1$") é falsa.

Quantificador de existência e unicidade

"existe um **único** x no conjunto D tal que $P(x)$."

$$(\exists! x \in D)\, P(x)$$

Quantificação sobre o conjunto vazio

A afirmação "existe um estudante com mais de duzentos anos que gosta de física" é verdadeira?

$(\exists x \in D)\, P(x)$, onde D é o conjunto dos estudantes com mais de duzentos anos de idade, e $P(x)$ denota a afirmação "x gosta de física". De modo geral, se o domínio D é vazio, a afirmação "$(\exists x \in D)\, P(x)$" é **falsa, qualquer que seja o predicado** P.

Considere agora a afirmação: "todos os estudantes com mais de duzentos anos de idade gostam de física." Qual o valor lógico desta frase?

Na notação acima, esta afirmação pode ser escrita $(\forall x \in D)\, P(x)$. A questão é: qual o valor lógico da afirmação "$P(x)$ é verdadeira, para qualquer elemento x de D", se D não tem nenhum elemento?

Dizemos que tais afirmações são **verdadeiras por vacuidade**.

Cálculo de predicados

A área da lógica que trata de predicados e quantificadores é chamada **cálculo de predicados**.

Estudam-se as regras de raciocínio que valem para **quaisquer** predicados.

Em particular, estamos interessados em **equivalências lógicas** e **implicações lógicas** entre proposições com quantificadores.

- Tautologia
  Exemplo "$(\forall x \in D)\, P(x) \vee \neg P(x)$"
- Contradição
  Exemplo, "$(\exists x \in D)\, P(x) \wedge \neg P(x)$"
- Equivalência Lógica
  Se $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia
- Implicação lógica
  Se $P \rightarrow Q$ é uma tautologia

- Negação de quantificadores
  - $\neg[(\forall x \in D)\, P(x)]$ é equivalente a $(\exists x \in D)\, \neg P(x)$
  - $\neg[(\exists x \in D)\, P(x)]$ é equivalente a $(\forall x \in D)\, \neg P(x)$

Cálculo de predicados

- Distributividade de quantificadores
  - $(\forall x \in D)\,(P(x) \wedge Q(x))$ equivale a $((\forall x \in D)\, P(x)) \wedge ((\forall x \in D)\, Q(x))$.
  - $(\exists x \in D)\,(P(x) \vee Q(x))$ equivale a $((\exists x \in D)\, P(x)) \vee ((\exists x \in D)\, Q(x))$.

Linguagem natural

Traduzindo linguagem natural para proposições quantificadas

- “macacos gostam de bananas."
- “**todos** os macacos gostam de bananas. ”

$$(\forall x \in M)\, B(x)$$

onde M é o conjunto dos macacos, e $B(x)$ é o predicado “x gosta de banana.”

Linguagem natural

É preciso tomar cuidado com certas frases em língua natural cujo sentido é ambíguo. Por exemplo, “um elemento x de D satisfaz $P(x)$” pode significar tanto $(\forall x \in D)\, P(x)$ quanto $(\exists x \in D)\, P(x)$.

Exercício: Escreva as afirmações abaixo na forma simbólica, definindo os predicados e os domínios dos quantificadores.

a) Todo triângulo equilátero é equiângulo.
b) Todos os estudantes gostam de física.
c) Alguns estudantes não gostam de física.
d) Cada pessoa tem uma mãe.
e) Pelo menos uma das letras da palavra **banana** é uma vogal.

Expresse, em português (e em forma simbólica), a negação de cada uma das proposições

Mudança de domínio

Podemos restringir o domínio das quantificações universais:

- As afirmações $D \subseteq E$ e $(\forall x \in E)\, P(x)$ implicam logicamente $(\forall x \in D)\, P(x)$.

"todo ruminante tem quatro patas", e que as zebras são um subconjunto dos ruminantes, podemos concluir que "todas as zebras tem quatro patas".

Mudança de domínio

Podemos ampliar o domínio de quantificações existenciais:

- As afirmações $D \subseteq E$ e $(\exists x \in D)\, P(x)$ implicam logicamente $(\exists x \in E)\, P(x)$.

"existe um boi preto", e que os bois são um subconjunto dos ruminantes, podemos concluir que "existe um ruminante preto".

- Se $D \subseteq E$, a afirmação $(\forall x \in D)\, P(x)$ é logicamente equivalente a $(\forall x \in E)\, (x \in D \to P(x))$.
- Se $D \subseteq E$, a afirmação $(\exists x \in D)\, P(x)$ é logicamente equivalente a $(\exists x \in E)\, (x \in D \wedge P(x))$.

"todo papagaio tem um bico" equivale a dizer "todo animal, se for um papagaio, tem um bico;"

"existe um papagaio amarelo" equivale a dizer que "existe um animal que é papagaio e é amarelo."

Erro comum: confundir as duas regras, e mudar o domínio do quantificador universal com $\wedge$ ao invés de $\rightarrow$.

- "todo macaco gosta de banana"

$$(\forall x \in A)\,(x \in M) \wedge B(x) \quad \textit{ERRADO}!$$

Onde A é o conjunto dos animais, M é o conjunto dos macacos, e $B(x)$ significa "x gosta de banana".

- na verdade quer dizer: "todo animal é macaco e gosta de banana"

- "existe um macaco que voa"

$$(\exists x \in A)\,(x \in M) \rightarrow V(x) \quad \textit{ERRADO}!$$

Onde A é o conjunto dos animais, M é o conjunto dos macacos, e $V(x)$ significa "x voa".

- na verdade quer dizer: "existe um animal que, se for macaco, voa"

Esta afirmação é verdadeira, pois basta considerar um x em $A \setminus M$ (um animal que não é macaco) e a frase $(x \in M) \rightarrow V(x)$ fica $\mathbf{F} \rightarrow V(x)$ e portanto verdadeira.

Quantificadores múltiplos

Se uma proposição aberta menciona mais de uma variável, é preciso mais de um quantificador — um para cada variável distinta — para transformá-la numa proposição fechada. Por exemplo, se escolhermos $\mathbb{Z}$ como o domínio, há oito maneiras de transformar a afirmação aberta "$x + y = 2x$" em uma proposição fechada:

$$\begin{array}{ll}
(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x & (\forall y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x \\
(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x & (\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x \\
(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x & (\forall y \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x \\
(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x & (\exists y \in \mathbb{Z})(\exists x \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x
\end{array}$$

- $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x$
  - "para todo inteiro x, existe um inteiro y (que pode ser diferente para cada x!) tal que $x + y = 2x$".
  - Esta afirmação é verdadeira.
- $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\, x + y = 2x$
  - "existe um inteiro y tal que, para todo inteiro x (e esse mesmo y!), $x + y = 2x$".
  - Esta frase é falsa.
  - Como $x + y = 2x$ é o mesmo que $y = x$, ela equivale a dizer que "existe um inteiro y que é igual a todos os inteiros".

De modo geral, sempre podemos trocar a ordem de dois quantificadores do mesmo tipo (ambos $\forall$, ou ambos $\exists$). Ou seja, para quaiquer variáveis, domínios e predicados,

- A fórmula $(\forall x \in D)(\forall y \in E)\, P(x, y)$ é logicamente equivalente a $(\forall y \in E)(\forall x \in D)\, P(x, y)$
- A fórmula $(\exists x \in D)(\exists y \in E)\, P(x, y)$ é logicamente equivalente a $(\exists y \in E)(\exists x \in D)\, P(x, y)$

Quando um quantificador sobre uma variável é aplicado dizemos que cada ocorrência dessa variável está **amarrada**. Todas as demais variáveis que ocorrem na proposição continuam **livres**.

Por exemplo, na fórmula $(\forall x \in \mathbb{R})\, x^2 + x - y > z/(x + y)$, as três ocorrências de x em $x^2 + x - y > z/(x + y)$ estão amarradas.

Enquanto houver variáveis livres, a fórmula continua sendo uma proposição aberta.

Escopo de um quantificador

- A parte da fórmula onde um quantificador tem efeito é chamada de **escopo** do quantificador.
- É toda a parte da fórmula que segue ao quantificador; mas podemos usar parênteses para limitar esse escopo.

- $((\forall x \in D)\, P(x)) \wedge ((\exists x \in E)\, Q(x)) \vee R(x)$
- o escopo do primeiro quantificador é apenas $P(x)$, o do segundo quantificador é $Q(x)$
- e a fórmula $R(x)$ está fora do escopo de ambos — ou seja, a ocorrência de x em $R(x)$ ainda está livre.

Omissão do domínio

O domínio da quantificação pode ser omitido em dois casos:

- Todos os quantificadores tiverem o mesmo domínio D, podemos anunciar esse fato no início, e escrever apenas $(\forall x)\, P(x)$ ou $(\exists x)\, P(x)$, em vez de $(\forall x \in D)\, P(x)$ ou $(\exists x \in D)\, P(x)$.

- Se supõem que existe um **conjunto universal** U cujos elementos são todos os elementos de todos os conjuntos que podem vir a ser usados em quantificadores. Nesse caso, podemos usar equivalências para trocar qualquer domínio D pelo domínio universal U:
  - $(\forall x \in D)\, P(x)$ equivale a $(\forall x \in U)\, (x \in D) \to P(x)$.
  - $(\exists x \in D)\, P(x)$ equivale a $(\exists x \in U)\, (x \in D) \wedge P(x)$.
- em vez de $(\forall x \in D)\, P(x)$, pode-se escrever $(\forall x)\, (x \in D) \to P(x)$.
- em vez de $(\exists x \in D)\, P(x)$, pode-se escrever $(\exists x)\, (x \in D) \wedge P(x)$.