

Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matemática Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

1/57

2/57

Indução Matemática

Indução Matemática

- Seja $P(n)$ uma sentença matemática que depende de uma variável natural n
- se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer
- Estas sentenças são chamadas **sentenças abertas definidas sobre o conjunto dos números naturais** \mathbb{N} .

3/57

4/57

- 1 $P(n)$: “ n é ímpar.” Observe que esta afirmação é verdadeira para alguns valores de n e falsa para outros.
- 2 $P(n)$: “ $n^2 - n + 41$ é um número primo.” Neste exemplo podemos verificar, não tão facilmente, que $P(1), P(2), \dots, P(40)$ são verdadeiros mas $P(41) = 41^2$ é falso.

5/57

- 3 $P(n)$: “ $2n + 6$ é par.” É fácil ver que $2n + 6 = 2(n + 3)$ para qualquer n , portanto $P(n)$ é verdade para todo n .
- 4 $P(n)$: “ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.” Será que conseguiremos encontrar algum m tal que $P(m)$ seja falso?

6/57

Como mostrar que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

é verdade para qualquer n ?

Princípio de Indução Matemática

O **princípio da indução matemática** (PIM) é a principal ferramenta para demonstrar sentenças da forma “ $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ ”. Ele diz o seguinte:

Axioma: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre \mathbb{N} . Suponha que:

- 1 $P(0)$ é verdade, e
- 2 Sempre que $P(k)$ é verdade, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos que $P(k + 1)$ é verdade.

Então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

7/57

8/57

Para demonstrar uma afirmação “ $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ ” usando o PIM, podemos então seguir este roteiro:

- **Base da Indução:** Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução:** Supor que para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Provar que $P(k + 1)$ é verdade.

9/57

Passo de indução: temos de provar que $P(k + 1)$ é verdade, isto é temos que provar que:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$

Pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} [1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2(k + 1) - 1) &= \\ [k^2] + (2(k + 1) - 1) &= \\ k^2 + 2k + 2 - 1 &= \\ k^2 + 2k + 1 &= \\ (k + 1)^2 & \end{aligned}$$

11/57

Exemplo

Provar que, para todo $n \geq 0$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = (n)^2$$

Prova: Vamos provar usando indução em n .

- **Base:** $P(0)$ é verdade pois a expressão acima é trivialmente válida para $n = 0$.
- **Hipótese de indução:** suponhamos que para algum k , $P(k)$ é verdade, isto é,

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = (k)^2$$

10/57

Exemplo 2

Definição: Dizemos que um conjunto de n retas no plano **estão em posição geral** se não possui duas retas paralelas e nem três retas se interceptando num mesmo ponto.

Teorema

Um conjunto de n retas em posição geral divide o plano em $R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ regiões.

Vamos provar por indução no número n retas de retas.

12/57

- **Base:** Para $n = 0$ temos apenas uma região. Como $R_0 = 0(0 + 1)/2 + 1 = 1$, a fórmula é válida neste caso.
- **Hipótese de indução:** Suponhamos que para algum k a fórmula é válida, isto é quaisquer k retas em posição geral dividem o plano em $R_k = k(k + 1)/2 + 1$ regiões.

13/57

Como as retas estão em posição geral, a reta L_{k+1} cruza cada uma das k retas anteriores em k pontos distintos. Em cada um desses cruzamentos, a reta L_{k+1} passa de uma região velha para outra. Essas regiões são duas a duas distintas porque estão em lados opostos de alguma reta L_i , com $1 \leq i \leq k$. Portanto a reta L_{k+1} corta $k + 1$ regiões velhas, que dão origem a $2(k + 1)$ regiões novas. Ou seja,

$$R_{k+1} = R_k - (k + 1) + 2(k + 1) = R_k + (k + 1)$$

15/57

Passo da indução: temos que provar que quaisquer $k + 1$ retas em posição geral definem $R_{k+1} = (k + 1)(k + 2)/2 + 1$ regiões. Sejam L_1, L_2, \dots, L_{k+1} essas retas. Compare as regiões do plano definidas por elas, que chamaremos de **regiões novas**, com as **regiões velhas** definidas pelas primeiras k dessas retas. Observe que algumas das regiões velhas são divididas pela última reta L_{k+1} , cada uma delas formando duas regiões novas; enquanto que as demais regiões velhas são também regiões novas.

14/57

Como as retas L_1, L_2, \dots, L_k estão em posição geral, podemos usar a hipótese de indução. Obtemos

$$R_k + (k + 1) = k(k + 1)/2 + 1 + k + 1 = (k + 1)(k + 2)/2 + 1.$$

16/57

Generalizações da Indução Matemática

Há muitas variações do princípio da indução matemática, que são no fundo equivalentes, mas podem tornar algumas demonstrações mais simples. Muitas vezes precisamos provar que uma sentença aberta $P(n)$ vale para todos os números naturais maiores ou iguais a um certo n_0 ; ou seja, que “ $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow P(n)$ ”.

17/57

Este raciocínio nos permite provar tais afirmações por indução matemática de maneira mais direta, usando n_0 como base em vez de 0:

Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer. Se

- 1 $P(n_0)$ é verdadeira, e
- 2 Para todo $k \geq n_0$, $(P(k) \rightarrow P(k + 1))$,
então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$.

19/57

Por exemplo, a afirmação $n^2 > 3n$ é verdadeira para todo natural n maior ou igual a 4, embora não seja verdadeira se n for 0, 1, 2 ou 3.

Podemos usar o PIM para provar esse tipo de afirmação, de maneira indireta. Primeiro definimos um outro predicado $Q(m)$ como sendo equivalente a $P(n_0 + m)$. Provamos então a afirmação $(\forall m \in \mathbb{N}) Q(m)$, usando o PIM. Essa afirmação então implica $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq n_0 \rightarrow P(n)$.

18/57

Exemplo

Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 4$.

Prova:

- **Base:** $n = 4$ é verdade pois $16 > 12$.
- **Hipótese de indução:** suponhamos que para algum $k \geq 4$, $k^2 > 3k$.

20/57

- **Passo da indução:** provar que $(k + 1)^2 > 3(k + 1)$.

Temos que

$$(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

Por hipótese de indução $k^2 > 3k$, então

$$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1.$$

Como $k \geq 4$ temos que $2k + 1 > 3$, logo

$$3k + 2k + 1 \geq 3k + 3 = 3(k + 1)$$

portanto, destas duas desigualdades,

$$(k + 1)^2 > 3(k + 1). \text{ Fim.}$$

21/57

Passo genérico constante

Numa prova por indução, além de começar com uma base n_0 arbitrária, é possível usar um incremento maior que 1 no passo da indução. Ou seja, o passo da indução pode ser a demonstração de que $P(k) \rightarrow P(k + p)$, em vez de $P(k) \rightarrow P(k + 1)$.

22/57

Teorema: Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, n_0 um número natural qualquer, e p um inteiro positivo. Se

- 1 $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n_0 + p - 1)$ são verdadeiros, e
 - 2 Para todo k tal que $k \geq n_0$, $P(k) \rightarrow P(k + p)$.
- então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq n_0$.

23/57

Exemplo

Prove que qualquer valor postal inteiro $n \geq 8$ pode ser obtido utilizando apenas selos com valores 3 e 5. Podemos provar esta afirmação usando o teorema da indução geral com incremento $p = 3$:

24/57

- **Bases:** $n = 8, n = 9, n = 10$. Como $8 = 5 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$ e $10 = 5 + 5$ temos que a proposição é válida para as bases.
- **Hipótese de indução:** Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para algum valor $k \geq 8$.
- **Passo:** Vamos provar que a proposição é válida para $k + 3$. Podemos obter o valor $k + 3$ acrescentando um selo de valor 3 aos selos usados para obter k .

25 / 57

Troca de variável na hipótese

Na hipótese de indução, podemos fazer uma troca de variável, usando k no lugar de $k + 1$. Nesse caso, o roteiro da demonstração fica assim:

- **Base da Indução:** Provar que $P(0)$ é verdade.
- **Hipótese de Indução:** Supor que para algum inteiro positivo k , $P(k - 1)$ é verdade.
- **Passo da Indução:** Provar que $P(k)$ é verdade.

26 / 57

Usos indevidos da indução matemática

É importante entender e verificar as condições em que a indução matemática se aplica. Se mal utilizada, ela pode levar a conclusões absurdas. Nos exemplos a seguir, tente encontrar o erro na demonstração.

Todos os cavalos têm a mesma cor.

Seja a sentença aberta $P(n)$: “Num conjunto com n cavalos, todos os cavalos têm a mesma cor.”

Prova: Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, por indução.

- **Base:** Para $n = 1$ a sentença $P(n)$ é verdadeira.
- **Hipótese de indução:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$; isto é, em todo conjunto com k cavalos, todos têm a mesma cor.

27 / 57

28 / 57

- **Passo de indução:** Vamos provar que, em todo conjunto com $k + 1$ cavalos, todos têm a mesma cor. Considere um conjunto $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k, c_{k+1}\}$ com $k + 1$ cavalos. Podemos escrever o conjunto C como união de dois conjuntos, cada um com k cavalos, da seguinte forma:

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \{c_2, \dots, c_{k+1}\}$$

29 / 57

$$C = C' \cup C'' = \{c_1, \dots, c_k\} \cup \{c_2, \dots, c_{k+1}\}$$

Pela hipótese de indução, todos os cavalos de C' têm a mesma cor. O mesmo é verdade para C'' . Como c_2 pertence a C' e a C'' , concluímos que os cavalos de C' têm a mesma cor que os cavalos de C'' . **Logo todos os cavalos de C têm a mesma cor. Absurdo!**

30 / 57

Paradoxo dos cavalos

Este exemplo, conhecido como **paradoxo dos cavalos**, foi inventado pelo matemático húngaro George Pólya (1887-1995). O exemplo a seguir ilustra um erro similar na aplicação do PIM, com “conclusão” igualmente absurda:

Todos os números naturais são iguais.

Prova: Seja $P(n)$ a sentença aberta “todos os números naturais menores ou iguais a n são iguais.” Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, por indução.

- **Base:** $P(0)$ é obviamente verdadeira.
- **Hipótese de indução:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 0$, ou seja, todos os números menores ou iguais a k são iguais.

31 / 57

32 / 57

- **Passo de indução:** Vamos provar que $P(k + 1)$ é verdadeira. Pela hipótese de indução, $k - 1 = k$. Somando 1 em ambos os lados da igualdade temos $k = k + 1$. **Portanto $P(k + 1)$ também é verdadeira.**
Absurdo!

33/57

Exemplo: [Descobrir a Moeda Falsa] Num conjunto de 2^n moedas de ouro temos uma que é falsa, ou seja pesa menos que as outras. Prove, por indução, que é possível achar a moeda falsa com n pesagens usando uma balança de dois pratos sem usar peso.

35/57

Exercícios:

- Seja C um conjunto com $n \geq 2$ elementos. Prove que C tem $n(n - 1)/2$ subconjuntos com exatamente dois elementos.
- Prove que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.

34/57

Prova:

- **Base:** Para $n = 1$ temos duas moedas e, portanto, basta colocar uma em cada prato para descobrir a falsa.
- **Hipótese de indução:** Usando k pesagens podemos descobrir a moeda falsa dentre 2^k moedas.

36/57

- **Passo:** Provar que, num conjunto de 2^{k+1} moedas, podemos descobrir a moeda falsa com $k + 1$ pesagens. Divida o conjunto de 2^{k+1} moedas em dois conjuntos de 2^k moedas. Coloca-se esses conjuntos em cada prato da balança. Dessa forma descobrimos em qual conjunto de 2^k moedas se encontra a falsa. Pela hipótese de indução descobre-se a moeda com k pesagens, e, mais a pesagem anterior temos um total de $k + 1$ pesagens.

Fim

37/57

Prova:

- **Base:** Para $n = 1$ o resultado é trivial pois, se há mais de um objeto, essa caixa terá mais de um objeto.
- **Hipótese de indução:** Suponhamos que o resultado é válido para algum número $k \geq 1$ de caixas, contendo mais do que k objetos.

39/57

Princípio das casas de pombos

O matemático alemão Johann Dirichlet (1805-1859) enunciou em 1834 o seguinte fato, conhecido como **princípio dos escaninhos** (ou **das gavetas, das casas de pombos** etc.):

Teorema: Se em n caixas ($n \geq 1$) colocarmos mais de n objetos, então alguma caixa conterá mais de um objeto.

38/57

- **Passo:** Queremos provar que o resultado é válido para $k + 1$ caixas contendo mais do que $k + 1$ objetos. Seja $m > k + 1$ o número de objetos. Escolha uma caixa ao acaso. Se essa caixa contiver mais de um objeto, a proposição está provada. Se nessa caixa não há nenhum objeto, nas k caixas restantes estão acomodados $m > k + 1 > k$ objetos; pela hipótese de indução, uma delas deve conter mais de um objeto. ...

40/57

Princípio da Indução Completa

... Finalmente, se na caixa escolhida há apenas um objeto, temos que, nas k caixas restantes estão distribuídos $m - 1 > (k + 1) - 1 = k$ objetos, o que, novamente pela hipótese de indução, implica que uma das caixas contém mais de um objeto. **Fim**

41 / 57

Vamos agora enunciar o **princípio da indução completa** (PIC), também chamado de **princípio da indução forte**. Esta versão alternativa do princípio da indução matemática serve, como a anterior, para demonstrar sentenças na forma “ $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$ ”. Em alguns casos essa técnica torna a demonstração da sentença mais fácil que a técnica anterior.

42 / 57

- 1 **Base da indução:** Provar que $P(0)$ é verdade.
- 2 **Hipótese de indução:** Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$, $P(0), P(1), \dots, P(k)$ são verdadeiros.
- 3 **Passo da indução:** Provar que $P(k + 1)$ é verdade.

43 / 57

Definimos que um número inteiro p é **primo** quando ele é maior que 1 e seus únicos divisores são 1 e p . Vamos provar que todo inteiro maior ou igual a 2 é primo ou é um produto de primos.

44 / 57

Prova: Seja $P(n)$ a sentença aberta “ n é primo ou é um produto de primos.” Vamos provar que $(\forall n \in \mathbb{N}) n \geq 2 \rightarrow P(n)$, por indução completa.

- **Base:** $P(2)$ é verdade pois 2 é primo.
- **Hipótese de indução:** Suponha que, para algum $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $2 \leq i \leq k$.

45/57

Os **números de Lucas** A_1, A_2, \dots são definidos pelas seguintes regras: $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, e $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ para todo número inteiro n maior ou igual a 3. Vamos provar $A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo inteiro $n \geq 1$, por indução completa.

47/57

- **Passo da indução:** Vamos provar que $P(k + 1)$ também é verdade. Se $k + 1$ é primo então $P(k + 1)$ é verdadeiro. Se $k + 1$ não é primo, como $k + 1 \geq 2$, ele deve ter algum divisor diferente de 1 e de $k + 1$. Ou seja, $k + 1 = ab$ para algum a e b , com $1 < a \leq k$. Como $a > 1$, concluímos que $b < k + 1$; como $a < k + 1$, concluímos que $b > 1$. Ou seja, $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. Pela hipótese de indução, portanto, a e b são primos ou produtos de primos. Portanto $k + 1 = a \cdot b$ também é um produto de primos. **Fim.**

46/57

Prova:

Seja $P(n)$ a sentença aberta “ $A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.”

- **Base:**
 - ▶ $P(1)$ é verdade pois $A_1 = 1 < \frac{7}{4}$.
 - ▶ $P(2)$ é verdade pois $A_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.
- **Hipótese de indução:** Suponha que, para algum inteiro $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq k$.

48/57

- **Passo da indução:** Vamos provar que $P(k + 1)$ também é verdade, ou seja $A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$. Como $k + 1 \geq 3$, pela definição temos que $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$. Então, pela hipótese de indução, temos

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4} + 1\right)\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Como $\frac{11}{4} < 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ temos que,

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

49/57

Exercícios:

- Prove que todo inteiro maior ou igual a 5, par ou ímpar, é a soma de números primos ímpares (isto é, primos diferentes de 2). Por exemplo, $6 = 3 + 3$, $7 = 7$, e $10 = 3 + 7$.
- Seja x um número real diferente de zero, tal que $x + \frac{1}{x}$ é um número inteiro. Prove que, para todo número natural n , $x^n + \frac{1}{x^n}$ é inteiro.

50/57

Princípio da Boa Ordenação

Uma outra maneira de provar sentenças abertas sobre número naturais é usar uma propriedade dos números naturais conhecida como o **princípio da boa ordenação** (PBO).

Seja S um conjunto de números reais. Um **elemento mínimo** de S é um $y \in S$ tal que para todo $x \in S, y \leq x$. O princípio da boa ordenação diz que

Teorema: Todo subconjunto não vazio S de \mathbb{N} tem um elemento mínimo.

Note que esta afirmação não é válida para subconjuntos de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} ; isto é, existem subconjuntos de \mathbb{R} e de \mathbb{Z} que não tem elemento mínimo.

51/57

52/57

Como exemplo de uso do PBO, vamos provar o

Teorema da Divisão de Euclides:

Teorema: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

53/57

$$r = a - bq$$

Suponha agora que $r \geq b$. Nesse caso

$a - b(q + 1) = r - b \geq 0$, e portanto $r - b$ está também em S . Como $b > 0$, temos $r - b < r$. Isto contraria a escolha de r como o menor elemento de S . Portanto $r < b$.

55/57

Prova:

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, e seja

$$S = \{ a - bk : k \in \mathbb{N}, a - bk \geq 0 \}.$$

Observe que $S \subseteq \mathbb{N}$ pois $a - bk \geq 0$; e que $S \neq \emptyset$ pois contem $a = a - b \cdot 0$. Então pelo PBO, o conjunto S tem um elemento mínimo. Seja $r = a - bq$ esse elemento.

...

54/57

Formas equivalentes do princípio da indução

O princípio da indução matemática, o princípio da indução completa e o princípio da boa ordenação (PBO) são equivalentes. Mais precisamente, podemos provar que

PIM \rightarrow PBO \rightarrow PIC \rightarrow PIM.

Exercício.

56/57

Exercício: Considere o seguinte jogo para duas pessoas. Coloca-se um número qualquer $n \geq 1$ de botões na mesa, e cada jogador, alternadamente, retira no mínimo 1 e no máximo 4 botões da pilha. Quem tira o último botão perde.

Vamos definir f_n como sendo 1 se o jogador da vez consegue ganhar quando há n botões na mesa, se jogar corretamente; e 0 se ele vai sempre perder, não importa como jogue. Por exemplo, f_1 é zero, por definição; mas f_5 é 1 pois o jogador da vez consegue ganhar (tirando 4 botões).

- a) Determine f_n para n entre 1 e 30.
- b) Determine uma fórmula eficiente para f_n e prove-a por indução.